



Mills Memorial Library
McMaster University

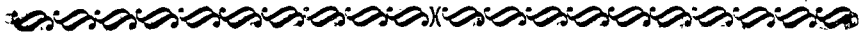
SCIENTIA
NAVALIS
SEV
TRACTATUS
DE
CONSTRVENDIS AC DIRIGENDIS
NAVIBVS
PARS POSTERIOR
IN QVA
RATIONES AC PRAECEPTA
NAVIVM CONSTRVNDARVM
ET
GVBERNANDARVM FVSIVS EXPONVNTVR

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

PROF. HONORARIO ACADEMIAE IMPER. SCIENT. ET
DIRECTORE ACAD. REG. SCIENT. BORVSSICAE.

*INSTAR SVPPLEMENTI AD TOM. I. NOVORVM
COMMENTAR ACAD. SCIENT. IMPER.*



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXIX.

Index Capitum

- Caput I. De Nauibus in genere a §. 1. ad §. 95.
--- II. — situ aequilibrü nauium a §. 96. ad §. 191
--- III. — stabilitate situs aequilibrü a §. 192. ad §. 287.
--- IV. — motu nauium oscillatorio a §. 288. ad §. 387.
--- V. — inclinatione, quam naues a viribus quibuscun-
que patiuntur a §. 388. ad §. 469.
--- VI. — acción gubernaculi a §. 470. ad §. 551.
--- VII. — — — remorum a §. 552. ad §. 671.
--- VIII. — construcción nauium remis propellendarum a
§. 672. ad §. 727.
--- IX. — vi, quam ventus in vela exerit a §. 728. ad
§. 811.
--- X. — malorum constitutione a §. 812. ad §. 895.
--- XI. — cursu nauium obliquo a §. 896. ad §. 967.

Cap. I.
DE NAVIBVS IN GENERE.

§. I.

Quanquam in superiori libro Theoria de situ et motu corporum aquae innatantium tam fuse et luculenter est exposita, vt eius eximius vsus cum ad naues construendas tum ad dirigendas et gubernandas non difficulter perspiciatur: tamen accurata traditorum praeceptorum ad naues cuiusque generis accommodatio eo magis necessaria videtur, quo maiore doctrina navigationis, pro vti quidem ea etiam nunc tractari solet, indiget emendatione. Quae enim in praecedente libro continentur, proprie ad natationem quorumque corporum generatim spectant, neque conclusiones ad navigationis vsum ex iis sunt formatae, nisi quas propositiones tractatae vltro suppeditauerunt. Quod autem potissimum est, regulae, quae quidem sunt prolatae, non solum nimium sunt dispersae, sed etiam quandoque inter se pugnant: ex quo necessitas huius peculiaris tractationis eo magis elucet.

§. 2. Hanc obrem in praesenti libro omnia, quae in praecedente inuenta sunt et demonstrata, ad vsum navigationis atque ad praxin accommodare constitui: quo in negotio singula, quae ad scientiam naualem pertinent, secundum certa capita distribui ac digeri conueniet, quo cunctae huius scientiae partes ordine percurri atque accurate pertractari quam commodissime queant. Tot enim ac tam diuersae sunt res, quibus scientia naualis continetur, vt, nisi singulae diligentissime seorsim perpendantur,

et deinceps summa circumspeditione inter se comparentur et coniungantur; vix quicquam ad vtilitatem publicam traduci possit. Ne igitur ista tractatio vage instituat, in hoc capite doctrinam de nauibus ingenere proponam, vt non solum quibus de rebus explicari oporteat intelligatur, sed etiam quem ordinem, quamque operis partitionem sequi expediat.

§. 3. Quantumuis naues, si in genere considerentur, cum ratione magnitudinis, tum figuræ, tum destinationis etiam discrepent inter se, tamen omnes communibus aliquot proprietatibus præditas esse deprehendimus. Primo enim omnes naues ad natandum aptæ esse debent, in hocque ipsa nauium essentia continetur: secundo naues a quaque rudi mole, quæ pariter aquæ innatare valeat, discernuntur eo, quod cum hominibus tum oneribus quibusvis excipiendis et vehendis sint pares. Tertio omnes naues etiam in hoc conueniunt, vt ex duabus partibus æqualibus et similibus constent, si quidem figura externa spectetur, quæ ambo nauium latera constituent, ac plano verticali per medium nauis secundum longitudinem transeunte a se inuicem discernantur. Quarto quoque omnium nauium hic solet esse finis principalis, vt a viribus quibuscunque per aquam promoueri queant. Atque his quatuor rebus natura nauium ingenere spectatarum aptissime comprehendi videtur.

§. 4. Si ergo iuxta primam proprietatem communem consideremus nauem aquæ insidentem vel innatantem, duæ partes inter se maxime diuersæ sponte se offerunt, quarum altera complectitur portionem supra aquæ superficiem eminentem altera vero portionem sub aqua
mer-

ſam : hæcque diſtinctio in examine et diiudicatione nauium maximi eſt momenti. Eſt enim eiſdem nauis prout magis minusue eſt onerata , ita etiam maior minorue pars ſub aqua verſatur , atque ipſa pars ſubmerſa mutatur , ſi nauis inclinetur ; tamen hæc in æqualitates non admodum ſpectari ſolent : ſed quando de parte ſubmerſa ſermo eſt , quæ carina cuiusque nauis appellatur , ea nauis portio intelligitur quæ infra aquæ ſuperficiem abditur , cum nauis debito modo eſt onerata , ac ſitum erectum in aqua tenet.

§. 5. Eſt itaque carina ea cuiusque nauis portio , quæ ſubmerſioni eſt deſtinata , et quæ actû infra aquæ ſuperficiem verſatur tum , quando nauis ita , vt decet , eſt onuſta , neque viribus externis ex ſitu æquilibrîi declinatur. Nititur igitur magnitudo carinæ onerum , quibus ferendis nauem parem eſſe oportet , quantitate et pondere. Quo plura enim onera grauioraque pondera ſunt vehenda , eo amplior eſſe debet carina atque omnino ſecundum primam hydroſtaticæ regulam quantitas carinæ vniuerſæ nauis onuſtæ pondere determinatur. Dato enim tam ipſius nauis quam onerum portandorum pondere , volumen carinæ tantum eſſe debet , vt æquale volumen aquæ tantundem ponderet , quantum nauis et onera imponenda coniunctim.

§. 6. Cum igitur quantitas totius nauis a quantitate carinæ pendeat , hæc vero ipſa a pondere nauis onuſtæ , quantitas nauis aptiſſime definietur pondere ipſius , quando completam habet onerationem. Ita quantitas cuiusque nauis commodiſſime meſſuratur numero librarum vel centenarum pondus nauis debito modo oneratae experimentium. Vel quod eodem redit meſſura eadem nauis habebitur , ſi definiatur

volumen carinae in pedibus cubicis. Nam cum pes aquae cubicus pendat circiter 64 libras, si numerus pedum cubicorum per 64 multiplicetur, prodibit numerus librarum ponderi totius navis onustae respondens; qui est alter mensurandi modus. Contra vero si detur pondus navis cum oneribus per libras expressum, numerus librarum per 64 diuisus dabit volumen carinae in pedibus cubicis.

§. 7. Intellego hic pedes Rhenanos, librasque Parisinas sedecim vnciarum; neque vero ista relatio generatim exactissime definiri potest; cum alia aqua alia sit grauior, atque eo magis, quo plus salis in se continet. Praeterea etiam quantitas onerum non tam accurate solet definiri; sed aliquando plura onera aliquando etiam pauciora imponuntur quam destinatus onerandi modus requirit. Vnde fit vt tam ob ipsam onerum quantitatem, quam ob diuersae aquae grauitatem specificam modo aliquanto maior modo aliquanto minor navis pars aquae immergatur, quam ea, quae carina vocatur. Interim tamen carina nobis semper erit determinata navis portio, quae aquam subit quando navis debitam obtinet onerationem: hocque non obstante, cum maior minorue pars aquae immergatur, eius ratio, si opus fuerit, haberi poterit.

§. 8. Duae ergo memoratae cuiusque navis partes, quarum altera supra aquam eminent, altera in aquam immergitur, a se inuicem separatur sectione horizontali in ipsa aquae superficie facta; quam sectionem vti in priore libro sectionem aquae appellabimus. Sectio igitur aquae separat partem navis superiorem a carina, atque est figura terminata, cuius perimeter in ipsa navis superficie est sita. Ex quo si data fuerit navis figura externa vna cum carina, simul
sectio

sectio aquae atque aequatio eius naturam exprimens assignari poterit. Ex superiore autem libro abunde intelligitur, quanti sit momenti tam sectionis aquae figuram quam ipsius carinae nosse ad naues cum cognoscendas tum diiudicandas; ita ut sectio aquae vna sit ex praecipuis rebus, quas circa naues contemplari oportet.

§. 9. Si porro ad motum nauium progressiuum in aqua attendamus, quaelibet nauis in duas partes quoque distingui reperietur, quarum altera prora vocari solet, altera puppis, quae quidem denominationes ex cursu directo originem traxerunt, sed tamen etiam si cursus instituat oblique, eadem partes eadem nomina retinent. Prora vero non tam anterior nauis pars vocatur, quam ea quae in motu cum aqua conficitur; siue prora ea nauis vocatur pars, quae vel in aquam impingit, vel in quam aqua irruit. Atque hinc simul indoles alterius partis, quae puppis nominatur, facile perspicitur: puppis namque ea erit nauis portio, quae dum nauis in aqua progreditur nullam aquae allisionem patitur; si quidem cursus sit directus, uti ponimus; cursus enim obliquus in his nominibus nil mutat, quamuis in re ipsa ingens pariat discrimen.

§. 10. Cum igitur superficies nauis, quae quidem sub aqua versatur, impulsui aquae eatenus est exposita, quatenus versus puppim diuergit, ex hoc ipso quantitas prae colligi, eaque a puppi discerni poterit. Namque superficies nauis eo usque diuergit, quoad fiat amplissima, hincque iterum conuerget, usque ad extremam puppim. Quamobrem ea nauis sectio transversalis ad directionem cursus perpendicularis proram terminabit atque a puppi secernet, quae omnium est amplissima. Hanc igitur sectionem

proram a puppi discernentem , cum sit maximi momenti appellabimus sectionem tranuersalem amplissimam , eaque simul erit perpendicularis ad sectionem aquae , quia est ad directionem impulsus aquae normalis.

§. 11. Quoniam ratio huius diuisionis ad solam nauium partem inferiorem seu carinam respicit , tamen etiam superior nauium portio supra aquam eminens simili modo distinguitur. Hanc ob rem sectio nauis transuersalis amplissima non solum carinam , sed etiam vniuersam nauem in duas partes diuidit , quarum altera prorae nomen obtinet altera puppis. Saepenumero quidem difficile est sectionem transuersalem amplissimam assignare , cum naues plerumque , vbi sunt amplissimae , per satis longum intervallum aequae amplitudinis confici soleant. At vbi hoc accidit , vt sectio amplissima per intervallum dispersa esse videatur , perinde est quatenus sectio transuersalis pro amplissima habeatur atque error insensibilis tuto negligi potest.

§. 12. Stabilitatis nunc prora et puppi in quacunque naue , quarum illa partem anticam haec posticam repraesentat , vtro se offerunt ambo latera , dextrum alterum , alterum sinistrum. Vocari autem solet latus dextrum id , quod stanti in puppi et proram intuenti ad dextram est situm , sinistrum vero quod huic ad sinistram iacet. Iam autem satis superque colligere licet , ambo haec latera inter se omnino similia esse debere : si enim ad cursum directum respiciamus , nulla foret ratio cur amborum laterum figurae essent dissimiles : eademque rationes , quae figuram alterius lateris determinant , simul quoque alterius lateris figuram determinabunt. Quod autem ad cursum nauium obliquum attinet , quia is in vtrumque latus aequae declina-

re solet, propter eum quoque vlla dissimilitudo inter ambo latera intercedere nequit. Denique ista similitudine laterum venustati maxime consulitur.

§. 13. Cum igitur in qualibet naui ambo latera debeant esse similia, cunctae naues plano diametrali praeditae sint necesse est, hoc est eiusmodi sectione, qua tota navis in duas partes similes et aequales diuidatur. Istud ergo planum diametrale erit verticale, si quidem vti ponimus nauis situm obtinet directum, quoniam in neutrum latus inclinatio esse potest: ac quia hoc planum diametrale a prora ad puppim porrigitur, simul erit normale ad sectionem transuersalem amplissimam. Quamobrem tam sectio aquae quam sectio transuersalis amplissima figurae erunt diametro gaudentes; in vtraque enim figura intersectio plani diametralis praebit diametrum, similemque ob rationem omnes sectiones, quae vel sunt horizontales, hoc est sectioni aquae parallelae, vel sectioni transuersali amplissimae parallelae diametrum habebunt, quam pariter planum diametrale in iis designabit.

§. 14. Tres itaque habemus in quaque naui principales sectiones, quarum vna est horizontalis secundum aquae superficiem facta seu sectio aquae, reliquae autem duae sunt verticales, altera sectio transuersalis amplissima, altera vero ipsum planum diametrale: hisque tribus sectionibus cognitis, fatis prope totius nauis figura determinabitur, si praeter has principales sectiones omnes sectiones iis parallelae definiantur. Neque vero ad hoc opus est, vt omnium harum sectionum figurae determinentur, sed sufficit, si vel solae sectiones horizontales omnes vel alterae verticales solae in notescant, cum istis reliquae sponte deter-

determinentur. Ad nauium autem constructionem expedit sectiones parallelas ampliffimae sectioni transuersali assignare, quia secundum has constructio nauium praecipue dirigi solet.

§. 15. Si autem ad theoriam, qua constructio et gubernatio nauium nititur, respiciamus; parum refert quamnam figuram habeat portio nauis superior ex aqua eminens, cum ea neque pressionem nec impulsum aquae excipiat; hancobrem praecipue in figura carinae inuestiganda operam collocabimus, atque tantisper a parte superiore cogitationes omnino abstrahemus. Si enim pro quouis instituto forma carinae commodiffima fuerit definita, non est difficile partem superiorem ad circumstantias praesentes accommodare: qua quidem in re finis potiffimum, cui nauis destinatur, est spectandus, vt tum ad onera gestanda, tum ad operationes necessarias absoluendas pars superior maxime fit accommodata: imprimis autem, cum haec pars sola in aspectum cadat, decori et venustatis ratio est habenda.

Tab. I.
fig. 1.

§. 16. Consideremus igitur carinam cuiusuis nauis sectionem, cuius sectio aquae sit figura plana $AEBF$ in horizonte repraesentata, atque ADB denotet planum diametrale, ita vt recta AB sit diameter orthogonalis sectionis aquae: sectio vero transuersalis ampliffima sit EDF , cuius diameter erit recta verticalis CD , in qua interfecatur a plano diagonali. Huius ergo carinae prora erit portio $ADEF$, puppis vero reliqua pars $BDEF$, quae a se mutuo fecernuntur per sectionem transuersalem ampliffimam EDF . Quaecunque nunc sit huius carinae figura, eius natura aptiffime exprimetur per aequationem tres variables inuoluentem. Scilicet pro prora definienda, sumto
in

in C initio abscissarum, ponatur abscissa quaecunque $CX = X$; portioque applicatae sectionis aquae XR quaecunque $XY = y$; atque longitudo verticalis ex Y ad carinam vsque demissa $YZ = z$; quo facto aequatio inter x, y , et z exprimet naturam prorae, similique modo puppis natura exprimetur.

§. 17. Ex aequatione autem inter x, y et z vel data vel inuenta tota carinae figura facile reperietur et ad vsum delineabitur. Primo enim si ponatur $z = 0$, aequatio inter x et y exprimet naturam sectionis aquae $AEBF$, ita vt x fit abscissa CX et y applicata XR . Deinde si fiat $y = 0$ punctum Z cadet in V , eritque $XV = z$: ex quo aequatio inter x et z exprimet naturam plani diametralis ADB , existente x abscissa CX et z applicata XV . Denique si in aequatione proposita trium variabilium ponatur $x = 0$, cadet Y in P et Z in M , atque aequatio inter y et z , quarum illa y exponit abscissam CP haec vero z applicatam PM ; praebebit naturam sectionis transversalis amplissimae EDF .

§. 18. Eadem vero aequatio naturam carinae exprimens per tres variables x, y et z , non solum tam facile praebet tres memoratas sectiones principales, sectionem aquae scilicet, planum diametrale et sectionem transversam amplissimam, sed etiam sectiones quascunque his parallelas. Nam si ponatur variabilis x constans, tum aequatio inter y et z exprimet naturam sectionis transversae $RZVS$ sectioni amplissimae parallelae inter eius abscissam $XY = y$ et applicatam $YZ = z$; quae sectio distabit a principali EDF , cui est parallela intervallo $CX = x$. Simili modo si y ponatur constans sectio

Part. II.

B

habe-

habebitur plano diametrali parallela ab eoque distans interuallo y ; cuius natura exprimetur aequatione inter coordinatas x et z . Denique si variabilis z ponatur constans prodibit aequatio inter coordinatas x et y naturam sectionis horizontalis a sectione aquae interuallo z distitae exponens.

§. 19. Si igitur descriptionem ad receptum naues construendi modum maxime accommodare velimus, conueniet singulas sectiones transuersales, verticales scilicet et plano diametrali normales determinari et describi. Neque vero omnes has sectiones, quarum numerus foret infinitus, repraesentare necesse est; verum sufficit aliquot earum datis interuallis a sectione amplissima tam versus proram quam versus puppim distantes describere, cum intermediae vi structurae ex his sponte determinentur. Si enim figura puppis et prorae fuerit continua, tum sectiones transuersae puppim spectantes obtinebuntur tribuendis ipsi x negatiuis valoribus. Sin autem natura puppis peculiari exprimatur aequatione, tum ex hac ipsa aequatione sectiones transuersales puppis simili modo definientur, quo eae, quae in prora sunt sitae, ex aequatione naturam prorae exprimente.

§. 20. Cum igitur imprimis volumen carinae nosse oporteat, ostendendum est, quomodo quantitas huius voluminis ex aequatione inter memoratas tres variables commodissime determinari queat. Ad hoc autem requiritur vt aequatio ista tres variables continente differentietur: ponamus ergo prodidisse hanc aequationem $Pdx + Qdy + Rdz = 0$; quae innumerabilibus formis exprimi potest, prout integralis ante differentiationem fuerit disposita.

Pona-

Ponamus nunc x constans, habebitur ob $dx=0$ haec aequatio $Qdy + Rdz=0$ ad sectionem RVS pertinet, quare cum fit $dy = -\frac{Rdz}{Q}$ erit area XYZV $= \int z dy = \int -\frac{Rzdz}{Q}$ integrali ita sumto ut evanescat posito $y=0$. Si iam in hoc integrali ponatur $z=0$, dabit $\int -\frac{Rzdz}{Q}$ aream XVR, ac $2 \int -\frac{Rzdz}{Q}$ aream totius sectionis transversae RVS; eo quod omnes hae sectiones constant ex duabus partibus aequalibus et similibus.

§. 21. Quoniam ergo in integrali $2 \int -\frac{Rzdz}{Q}$ positum est $z=0$, quo casu abit y in XR, quae est applicata sectionis aquae, ideoque per abscissam respondentem CX $=x$ determinatur ope aequationis naturam sectionis aquae continentis: expressio $2 \int -\frac{Rzdz}{Q}$ erit functio ipsius x tantum, neque amplius quantitates y et z in se comprehendet. Quare si ea multiplicetur per dx , erit $2 dx \int -\frac{Rzdz}{Q}$ elementum solidi EDFSRV, ex quo hoc volumen erit $= 2 \int dx \int -\frac{Rzdz}{Q}$, integrali ita accepto, ut evanescat posito $x=0$. Si igitur post integrationem hanc ponatur $x=CA$, praebit integrale prodiens soliditatem prorae, ad quam si addatur soliditas puppis simili modo invenienda, habebitur integrum carinae volumen, quod quaerebatur.

§. 22. Praeter hanc expressionem plures aliae exhiberi possunt, quae pariter ac illa soliditatem propositae carinae exponent, prout alia atque alia voluminis elementa considerentur. Primo enim cum spatii XYZV elementum sit zdy , dabit $2 \int zdy$ aream RVS, si ita integretur, ut evanescat posito $y=0$, tumque ponatur $z=0$. Simili modo eadem area exprimetur formula $2 \int ydz$, integrali ita sumto, ut evanescat posito $z=0$, tumque ponatur y

$= 0$. Quare tam $\int dx \int z dy$, quam $\int dx \int y dz$ praebebit soliditatem prorae integralibus ita sumtis vt euanescent posito $x=0$, tumque ponatur $x=AC$. Expedit autem eiusmodi formulas integrales inducere, quae euanescent, si ea quantitas cuius differentiale inest, ponatur $= 0$.

§. 23. Pari modo si ponatur y constans, expressio $\int z dx$ ita integrata vt euanescat posito $x=0$, si tum ponatur vel $z=0$ vel $x=AC$, dabit sectionis prorae plano diametrali parallelae per Y factae aream; hincque $\int dy \int z dx$ exprimet soliditatem totius prorae, si quidem integrale ita capiatur, vt euanescat posito $y=0$, tumque fiat $y=CE$. Eodem modo illa sectio plano diametrali parallela exprimetur formula $\int x dz$ integrali ita sumto vt euanescat posito $z=0$, tumque fiat vel $x=0$ vel $z=CD$, vnde integrale $\int dy \int x dz$ quoque soliditatem prorae exhibebit. Denique si initio z ponatur constans formulae $\int y dx$ et $\int x dy$ debito modo integratae dabunt sectiones prorae horizontales, ideoque tam formula $\int dz \int y dx$ quam $\int dz \int x dy$ expriment prorae volumen: ita vt sex diuersae habeantur expressiones ad soliditatem prorae inueniendam.

§. 24. Cum autem haec ita late pateant, vt eorum vsus difficulter perspici possit, conueniet hoc ipsum problema specialius pertractari, atque ad vtilitatem constructionis accommodari. Hoc in negotio sequemur methodum iam in superiore libro adhibitam, qua omnes sectiones vni ex tribus principalibus parallelas inter se vel similes vel affines posuimus. Ex hac tractatione id nanciscemur commodi, vt data carina non difficulter in aequationem possit redigi: consideratis enim tribus sectionibus princi-

principalibus iisque ad aequationes reuocatis facile iudicare licebit; vtrum sectiones vni earum parallelae sint similes an affines: quorum vtrumuis si fuerit compertum aequatio localis naturam istius carinae continens exhiberi poterit. Hanc obrem modum aperiam, cuius ope cum ex similitudine tum ex affinitate sectionum parallelarum tam aequatio localis inter tres coordinatas formari quam volumen definiri queat.

§. 25. Quod primo ad similitudinem figurarum attinet, eius quidem notio ex elementis satis habetur distincta: attamen expediet eam ad nostrum vsum adaptare. Sit igitur CED semivsis sectionis cuiusdam principalis, scilicet Tab. I. vel sectionis amplissimae vel sectionis aquae, vel etiam fig. 2. portio plani diametralis siue in prora siue puppi sumpta; cui omnes sectiones parallelae sint similes, quarum vna sit figura *ced*. Si iam detur figura CED basin habens CE et altitudinem CD, ad aliam quamcunque basin *ce* figura similis *ced* describi poterit. Primo enim ex similitudine erit $CE : CD = ce : cd$, vnde altitudo *cd* datur. Deinde sumpta abscissa quacunque *cp*, quae fit ad CP vt *ce* ad CE erit applicata *pm* ad PM pariter vt *ce* ad CE vnde constructio figurae *ced* admodum commoda consequitur.

§. 26. Deinde etiam, si detur aequatio naturam figurae CED exprimens, ex ea aequatio ad figuram quamcunque ipsi similem facile elicitor. Vocentur enim $CE = A$; $CP = X$ et $PM = Y$, dataque sit aequatio, qua relatio inter X et Y continetur: si ponatur $ce = a$, accipiat $cp = x = \frac{aX}{A}$, erit $pm = y = \frac{aY}{A}$. Quare cum sit $X = \frac{Ax}{a}$ et $Y = \frac{Ay}{a}$, si isti valores in aequatione inter X et Y naturam curuae CED exprimente loco X et Y

substituuntur prodibit aequatio inter x et y , qua natura curuae similis ced ad datam basin ce applicata exprimitur: hocque pacto aequationes pro omnibus sectionibus ipsi CED similibus reperientur.

§. 27. Si igitur figurae similis ced construendae proposita fuerit sola basis ce , ex ea tota figura determinatur: ideoque eius altitudo cd sponte definitur; posita enim figurae principalis altitudine $CD=B$, ob $CD : cd = CE : ce$ erit $cd = \frac{aB}{A}$. Porro quoque area cuiusvis figurae similis ced ex area figurae principalis CED data assignari potest: namque posita area $CED=E$, cum areae figurarum similibus teneant rationem duplicatam laterum homologorum, erit area figura $ced = \frac{a^2 E}{A^2}$. Idem ostendit calculus; cum enim sit area $CED = \int YdX = E$, atque area $ced = \int ydx$ integralibus ad integras figuras extensis; erit ob $y = \frac{aY}{A}$ et $x = \frac{aX}{A}$ area $ced = \int \frac{a^2 YdX}{A^2} = \frac{a^2 E}{A^2}$.

§. 28. Antequam figuras similes relinquamus conueniet in earum centrum grauitatis inquirere, cum eius notitia absolute sit necessaria ad nauium proprietates reliquas eruendas. Ponamus itaque figurae principalis CED datum esse centrum grauitatis, idque situm esse in puncto G. ita ut ambo interualla GH et CH sint cognita. Hinc ergo figurae similis ced centrum grauitatis g in simili loco erit positum, atque interualla gb et cb ad interualla GH et CH rationem habebunt laterum homologorum ce ad CE: ex quo erit $gb = \frac{a \cdot GH}{A}$ et $cb = \frac{a \cdot CH}{A}$. Hacque proprietate calculus centri grauitatis alias perquam prolixus mirifice contrahitur ac simplicior redditur.

§. 29.

§. 29. Figurae, quas hic vocamus affines, multo latius patent quam similes, hasque sub se complectuntur. Quemadmodum enim figura similis, si eius vnica quantitas detur, ex figura principali tota determinatur, ita ad figuram affinem determinandam duo latera prolubitu assumere licet. Repraesentet enim CED figuram principalem, cuius basis sit CE et altitudo CD ; huic figurae affinis poterit assignari, quae non solum datam habeat basem ce sed etiam datam altitudinem cd . Ita autem hae figurae affines sunt comparatae, vt si capiantur abscissae CP , cp basibus CE et ce proportionales, applicatae PM et pm sese sint habiturae vti altitudines CD et cd ex quo si descripta sit figura principalis CED , huius proprietatis ope ad quamuis propositam basim et altitudinem figura affinis facile delinearipotuerit. Intelligitur ergo, si accidat vt sit $cd : ce = CD : CE$ tum figuram affinem ced abire in similem.

Tab. II.
fig. I.

§. 30. Quod si ergo detur aequatio naturam figurae principalis CED exprimens in promptu erit aequationem pro figura quacunque affini exhibere. Positis enim $CE = A$, $CD = B$; abscissa $CP = X$ et applicata $PM = Y$, data sit aequatio inter X et Y : figurae autem affinis describendae ced sit basis $ce = a$, altitudo $cd = b$, abscissa $cp = x$ et applicata $pm = y$. His ergo positis ex natura affinitatis sequitur, si fuerit $A : a = X : x$ fore $B : b = Y : y$; vnde fit $x = \frac{ax}{A}$ seu $X = \frac{Ax}{a}$, atque $y = \frac{by}{B}$ seu $Y = \frac{By}{b}$. Quamobrem si in aequatione in X et Y data scribatur $\frac{Ax}{a}$ loco X et $\frac{By}{b}$ loco Y , prodibit aequatio inter x et y pro curua affini ced .

§. 31.

§. 31. Quod ad areas figurarum affinium attinet eae se habebunt in ratione composita basium et altitudinum, ita vt, si area figurae principalis CED fuerit $= E$, area figurae *ced* futura sit $= \frac{abE}{AB}$. Namque figurae *ced* area est $= \int y dx$ integratione per totam figuram extensa; cum autem sit $y = \frac{bY}{B}$ et $x = \frac{aX}{A}$, erit $\int y dx = \frac{ab}{AB} \int Y dX$. At $\int Y dX$ exhibet aream figurae principalis CED quam posuimus $= E$ ita vt fit $\int Y dX = E$; quocirca area figure affinis *ced* erit $= \frac{abE}{AB}$. Nouo igitur calculo non erit opus ad areas figurarum affinium determinandas, sed eae pariter ac figurae similes ex data figurae principalis area definiri possunt.

§. 32. Pari facilitate locus centri grauitatis in quaue figura affini determinari poterit, si datus fuerit locus centri grauitatis in figura principali, qui sit G. Cum enim ducta ex G ad basin CE perpendiculari GH sit $GH = \frac{\int YYdX}{2\int YdX}$ atque $CH = \frac{\int YXdX}{\int YdX}$, integralibus debito modo sumtis, vt ad totam figuram pateant: si figurae affinis centrum grauitatis situm sit in g, erit pari modo $gb = \frac{\int yydx}{2\int ydx}$; et $cb = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$. At ob $x = \frac{aX}{A}$ et $y = \frac{bY}{B}$, erit $gb = \frac{b\int YYdX}{2B\int YdX} = \frac{b \cdot CH}{B}$, atque $cb = \frac{a\int YXdX}{A\int YdX} = \frac{a \cdot CH}{A}$. Vnde erit $CH:cb = CE:ce$; atque $HG:hg = CD:cd$, quae analogiae punctum g praebent facillime.

§. 33. Hae autem figurae tam similes quam affines sufficere videntur ad formas omnium omnino nauium repraesentandas, saltem vero proxime; in praxi enim minutiae sunt negligendae. Hinc igitur orientur sex nauium species, quarum prima eas naues comprehendat, in quibus omnes sectiones horizontales sint sectioni aquae similes: secunda species

cies vero eas, quae habent omnes sectiones transuersales sectioni ampliffimae parallelas eidem similes: ad tertiam vero eae pertineant naues, in quibus sectiones verticales plano diametrali parallelae eidem sint similes. Pari modo species quarta, quinta et sexta eas complectentur naues, in quibus sectiones, quae in in prioribus speciebus erant similes tantum sunt affines. Atque ad aliquam harum sex specierum cunctae naues referri posse videntur, quamobrem singulas has species percurramus praecipuasque proprietates recensamus.

§ 34. Sit igitur ADB carina naus, cuius figura ad ^{Tab. II.} _{fig. 2.} primam speciem pertineat: existentibus omnibus sectionibus horizontalibus SRTQ sectioni aquae AFBE similibus, quae omnes similiter secantur a sectione ampliffima EFD. Posito plano diametrali ADB, vocetur AC = a, CE = CF = b; et CD = c ac cum sectio aquae AEBF data sit, ponatur abscissa eius CI = p; et applicata IK = IL = q; dabiturque aequatio inter p et q, qua natura sectionis aquae exprimetur. Ponamus porro datam esse sectionem ampliffimam EDF, cuius diameter est CD; ita vt vocatis abscissa CP = r et applicata PQ = s habeatur aequatio relationem inter r et s continens. Hisque datis duabus sectionibus principalibus tota carinae figura determinabitur ex similitudine sectionum horizontalium.

§. 35. Concipiatur sectio horizontalis SQTR per punctum P facta, ac cum tam portio proram spectans QSR similis sit portioni sectionis aquae in prora sitae EAF, quam portio puppis QTR portioni EBF, erit ex natura similitudinis CE : CA = PQ : PS vnde fit $PS = \frac{as}{b}$. Cum autem PS sit applicata in plano diametrali ADB

Pars II.

C

respon-

respondens abscissae $CP = r$, dabitur simul aequatio naturam plani diametralis exprimens ex aequatione inter r et s data. Ex quo perspicitur in hac nauium specie sectionem amplissimam et planum diametrale a se inuicem pendere, ita vt data alterius figura simul figura alterius determinetur: ideoque perinde est, vtra harum sectionum cum sectione aquae coniungatur ad totam figuram determinandam. Sunt igitur portio plani diametralis ACD et semissis sectionis amplissimae ECD figurae affines communem altitudinem CD habentes: similibusque modo figura CDB his erit affinis ob $CB : PT = CE : PQ$; atque omnes sectiones verticales per punctum C factae erunt figurae affines eandem habentes altitudinem CD sed diuersas bases.

§. 36. Quoniam figura QSR similis est figurae EAF sumatur in eius diametro abscissa PO similis abscissae CI , ita vt sit $b : s = p : PO$, seu $PO = \frac{ps}{b}$; erit applicata respondens $OZ = OW = \frac{qs}{b}$. Ducantur nunc rectae verticales OX et ZY , atque cum Z sit punctum in superficie carinae, eius situm ope aequationis tres variables involuentis definiamus. Hunc in finem vocentur $CX = x$ $XY = y$ et $YZ = z$: eritque $x = \frac{ps}{b}$ ob $CX = PO$; porro $y = \frac{qs}{p}$ ob $XY = OZ$; atque $z = r$ ob $YZ = XO = CP$. Cum autem detur aequatio inter r et s , aequabitur s functioni cuidam ipsius z , quae in aequationibus $x = \frac{ps}{b}$ et $y = \frac{qs}{b}$ substituatur. Denique ob q per p datam eruatur valor vtriusque ex aequatione $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$, eiusque valor in alterutra substitutus dabit aequationem inter x et y et z , qua natura superficiei propositae exprimetur.

§. 37.

§. 37. Cum igitur aequatio inter tres coordinatas orthogonales x , y et z naturam superficiei cuiusuis aptissime exprimat, operae pretium erit inuestigare cuiusmodi formam habitura sit ista aequatio, quando ad figuram huius speciei pertinet: vt deinceps, si vicissim aequatio proponatur, iudicare queamus, an figura per aequationem expressa ad primam hanc speciem referenda sit an secus. Cum ergo fit $r=z$ et s per r detur, erit $s=$ functioni ipsius z , quae sit Z : deinde cum fit $\frac{p}{q}=\frac{x}{y}$ atque q per p detur, aequabitur p functioni nullius dimensionis ipsarum x et y . Quare ob $x=\frac{ps}{b}=\frac{pZ}{b}$, erit $Z=\frac{bx}{p}$, hoc est functio quaequam ipsius z aequalis erit functioni vnius dimensionis ipsarum x et y : haecque est proprietas essentialis aequationum figuras ad hanc primam speciem pertinentes complectentium.

§. 38. Quoniam deinde ad constructionem nauium maxime requiritur, vt sectiones transversales sectioni amplissimae EDF parallelae definiantur, ponamus eiusmodi sectionem fieri per punctum X, erit huius sectionis abscissa $XY=y$ et applicata respondens $YZ=z$, quia vero interuallum CX pro hac sectione est constans, ponatur $CX=x=g$; atque in sectione aquae ducatur ordinata quaecunque KIL, existente $CI=p$ et $IK=q$. Cum iam fit $x=\frac{ps}{b}$, erit $s=\frac{bg}{p}$. In sectione igitur amplissima CDE fumatur applicata $PQ=\frac{bg}{p}=\frac{CE \cdot CX}{CI}$ cuius proinde respondens abscissa CP dabitur. Sumta ergo pro sectione quaesita abscissa $XY=\frac{qs}{b}=\frac{gq}{p}=\frac{CX \cdot IK}{CI}$; habebitur applicata respondens $YZ=CP$; vnde tam natura quam constructio singularum sectionum transversalium cognoscitur.

§. 39. Vt denique soliditatem istius carinae reperiamus, fit area totius sectionis aquae $AEBF = E$; ex qua ob similitudinem habebitur area sectionis $SQTR$ illi similis $= \frac{PQ^2 \cdot E}{CE^2} = \frac{Es^2}{b^2}$, quae multiplicata per differentiale altitudinis $CP = \frac{r}{p}$, dabit elementum soliditatis $= \frac{Es^2 dr}{b^2}$. Ex quo volumen carinae inter sectionem aquae $AEBF$ et hanc sectionem illi parallelam $SQTR$ comprehensae erit $= \frac{E}{b^2} \int s^2 dr$ integrali ita sumto, vt euanescat posito $r = 0$. Quare si post integrationem formulae $\int s^2 dr$ hoc modo institutam ponatur $r = CD = c$, prodibit totius carinae volumen $= \frac{E}{b^2} \int s^2 dr$, quod igitur tum ab area sectionis aquae tum a natura sectionis amplissimae pendebit.

§. 40. Ad quantitatem voluminis carinae commodius exprimendam eiusque inuentionem faciliorem reddendam fit sectionis amplissimae EDF area $= F$, atque huius sectionis semissis CDE centrum grauitatis situm fit in g , ex quo ad CD ducatur perpendicularis gG . Quibus factis erit $F = 2 \int s dr$, atque $Gg = \frac{\int s^2 dr}{2 \int s dr}$, his integralibus ita acceptis vt euanescant posito $r = 0$, tumque facto $r = CD = c$. Hinc itaque erit $\int s^2 dr = 2 Gg \cdot \int s dr = F \cdot Gg$. Quocirca soliditas carinae propositae erit $= \frac{E \cdot F \cdot Gg}{b^2} = \frac{E \cdot F \cdot Gg}{CE^2}$; vnde facilis regula pro inuenienda carinae soliditate practice emergit. Scilicet productum ex areis sectionis aquae et sectionis amplissimae multiplicetur per interuallum Gg , et quod resultat diuidatur per quadratum CE ; quotusque indicabit volumen carinae quaesitum.

§. 41. Vt haec clarius inspiciantur iuuabit rem exemplo illustrasse, fit igitur sectio aquae $AEBF$ ellipsis centrum habens in C , cuius axes sint $AB = 2a$ et $EF = 2b$;
erit

erit ex natura ellipsis $q = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - p^2}$; atque posita ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$ erit area sectionis aquae $= \pi ab$. Sit praeterea sectio amplissima EDF parabola verticem habens in D, erit ex natura parabolae $s = b \sqrt{\frac{c-r}{c}}$. Hinc statim natura plani diametralis ADB innotescet, quae pariter erit parabola verticem in D et axem DC habens. Nam eius applicata PS abscissae CP respondens erit $= \frac{as}{b} = a \sqrt{\frac{c-r}{c}}$. Illius quidem parabolae sectionem amplissimam exhibentis parameter est $\frac{bb}{c}$, huius vero parameter est $= \frac{aa}{c}$.

§. 42. Aequatio vero inter tres variables $CX = x$; $XY = y$ et $YZ = z$, quae naturam huius carinae exprimat, inuenietur ex tribus hisce aequalitatibus, $z = r$; $x = \frac{ps}{b}$ et $y = \frac{qs}{b}$. Quoniam ergo est $z = r$ erit $s = b \sqrt{\frac{c-z}{c}}$: atque aequatio $\frac{x}{y} = \frac{p}{q} = \frac{ap}{b\sqrt{a^2 - p^2}}$, dabit $p = \frac{abx}{\sqrt{(a^2y^2 + b^2x^2)}}$. His ergo valoribus loco p et s in aequatione $x = \frac{ps}{b}$ substitutis prodibit $\sqrt{c(a^2y^2 + b^2x^2)} = ab \sqrt{c-z}$, seu $a^2cy^2 + b^2cx^2 = a^2b^2c - a^2b^2z$, vnde habebitur $z = \frac{(a^2b^2 - a^2y^2 - b^2x^2)}{a^2b^2} c$ quae est aequatio localis ad superficiem propositam: in qua cum variables duabus plures dimensiones non habeant, omnes sectiones vtcunque factae erunt sectiones conicae.

§. 43. Ex aequatione locali inuenta intelligitur omnes sectiones transuersales sectioni amplissimae parallelas quoque esse parabolas, itemque omnes sectiones plano diametrali parallelas. Quamobrem in hac figura non solum sectiones horizontales omnes sunt figurae inter se similes, sed etiam sectiones verticales, quae tam sectioni amplissimae quam plano diametrali sunt parallelae, inter se erunt

similes, ex quo ista figura non solum ad primam speciem, sed simul ad secundam et tertiam pertinet. Soliditas autem huius figurae facile inuenitur; cum enim sit $E = \pi ab$ et $\int s s dr = \frac{bb}{c} \int dr (c-r) = \frac{bb}{2c} (2cr - rr)$, ponatur $r = c$ fiet $\int s^2 dr = \frac{bbc}{2}$: ex quo huius carinae volumen, quod generaliter erat $= \frac{E}{bb} \int s^2 dr$ prodibit $= \frac{\pi abc}{2}$.

§. 44. Ad nauium speciem secundam referuntur eae figurae, in quibus omnes sectiones parallelae sectioni amplissimae eidem sunt similes. Huiusmodi igitur carinam repraesentet figura AEDFB, in qua sit AEBF sectio aquae, ADB planum diametrale, atque EDF sectionem transuersalem amplissimam, cui facta sit sectio quaecunque parallela RVS, quae ideo illi erit similis. Ex quo sequitur fore $CE : CD = XR : XV$, atque hunc ob analogiam planum diametrale ADB et semisectionem aquae AEBF totius figurae affines super eadem basi AB contineri. Si ergo alterutra harum duarum sectionum fuerit data, altera simul determinatur. Ad totius igitur figurae determinationem sufficit assumpsisse duas sectiones amplissimam scilicet EDF et sectionem aquae AEBF.

Tab. III.
fig. 1.

§. 45. Maneant vt ante $AC = a$, $CE = CF = b$ et $CD = c$; et pro sectione amplissima posita abscissa $CP = p$; $PM = q$, data erit aequatio inter p et q : in sectione aquae autem sumpta abscissa $CX = r$, sit applicata $XR = s$ data per r . Eidem autem abscissae $CX = r$, quatenus pertinet ad planum diametrale ACD respondebit applicata $XV = \frac{cs}{b}$ ex natura similitudinis. Capiatur iam in sectione transuersali RVS abscissa XY similis abscissae CP,

CP, feu XY = $\frac{ps}{b}$ erit applicata respondens YZ = $\frac{qs}{z}$. Ex hac itaque similitudinis conditione, si datae fuerint trium sectionum principalium duae, sectio aquae scilicet et sectio amplissima, omnes sectiones isti posteriori parallelae facile definiuntur, atque adeo tota carinae figura leui negotio describi poterit.

§. 46. Sequenti autem modo pro huius modi figuris ad secundam speciem pertinentibus aequatio localis inter tres variables reperietur. Cum Z sit punctum in superficie carinae, ponatur CX = x , XY = y et YZ = z , erit $x = r$, atque ob s datam per r , fiet s functio quaedam ipsius x , quae fit = X, ita vt fit $s = X$. Hanc ob rem erit XY = $y = \frac{pX}{b}$, et YZ = $z = \frac{qX}{b}$; ideoque $\frac{y}{z} = \frac{p}{q}$. Verum quia q per p datur, ex aequatione $\frac{y}{z} = \frac{p}{q}$, valor ipsius p ita definitur, vt fiat $p =$ functioni cuidam ipsarum y et z nullius dimensionis; qui valor in aequatione $y = \frac{pX}{b}$ substitutus dabit $X = \frac{by}{p}$ feu functio quaedam ipsius X aequabitur functioni cuidam ipsarum y et z vnus dimensionis.

§. 47. Ad soliditatem vero seu capacitatem istius modi carinae inueniendam ponatur area sectionis amplissimae EDF = E, eritque ex natura similitudinis area sectionis RVS = $\frac{Es^2}{bb}$; quae ducta in dr dabit elementum voluminis EDFSRV = $\frac{Essdr}{bb}$; ex quo ipsum hoc volumen erit = $\frac{E}{bb} \int s s dr$. Quare si post integrationem formulae $\int s s dr$ ita institutam, vt ea euanescat posito $r = 0$, fiat $r = CA = a$, prodibit volumen totius prorae Aefd. Simili vero calculo obtinebitur volumen partis posterioris BEFD feu puppis, quod ad prius volumen prorae additum dabit totius

totius carinae volumen : ex quo deinceps totius navis pondus innotescet.

§ 48. Soliditas igitur istiusmodi carinae partim per aream sectionis amplissimae $EDF = E$ partim per formulam integram $\int s s dr$, quae a natura sectionis aquae pendet, determinatur. Vt autem haec ad praxin accommodentur, notandum est $\int s s dr$ partim ex area sectionis aquae, partim ex situ centri grauitatis semissis istius sectionis aquae determinari. Posita enim area totius sectionis aquae $AEBE = F$, ac semissis AEB centro grauitatis in g ; si ex g ad AB ducatur normalis gG , erit haec ipsa $gG = \frac{\int s s dr}{\int s dr} = \frac{\int s s dr}{F}$, ex quo fit $\int s s dr = F \cdot Gg$. Hanc obrem positae carinae volumen seu soliditas erit $= \frac{E \cdot F \cdot Gg}{bb} = \frac{E \cdot F \cdot Gg}{CE^2}$. Quae expressio ab illa, qua soliditas figuram primae speciei continebatur, hoc tantum differt, quod hic distantia centri grauitatis semissis sectionis aquae AEB ab axe AB ingrediatur, ibi autem distantia centri grauitatis semissis sectionis amplissimae CDE ab axe CD .

§. 49. Ad hanc ergo secundam speciem innumerabiles pertinent figurae, inter quas figurae rotundae, quae inter curuilineas fere solae adhuc sunt considerari solitae, continentur: cuiusmodi sunt eae figurae, quae reuolutione figurae AEB circa axem AB generantur. Tum enim omnes sectiones ad axem AB normaliter factae sunt semicirculi, eoque ipso sectioni amplissimae parallelae ac similes. Pro huiusmodi igitur corporibus, si ratio diametri ad peripheriam ponatur $1 : \pi$ erit sectionis amplissimae EDF area, quae posita est $= E = \frac{\pi CE^2}{2}$; ex quo totius figurae volumen prodit $= \frac{\pi F \cdot Gg}{2}$. His igitur casibus volumen re-

perie-

perietur, si area sectionis aquae ducatur in distantiam centri grauitatis g , semiffis eiusdem sectionis aquae ab axe AB, ac productum multiplicetur per $\frac{\pi}{2}$.

§ 50. Tertia nauium species eas sub se complectitur figuras, in quibus omnes sectiones verticales plano diametrali parallelae eidem sunt similes. Huiusmodi nauem seu potius carinam repraesentet figura AEDFB, in qua fit ADB planum diametrale, ac RQS sectio verticalis eidem parallela, quae ideo ipsi plano diametrali erit similis; idque ex utraque sectionis ampliffimae EDF parte. Hanc ob rem erit $AC:CD=RQ:PQ$, atque $BC:CD=SP:PQ$, ex quibus analogiis patet in istis figuris sectionem aquae et sectionem ampliffimam a se inuicem ita pendere, vt areae ACE, DCE et BCE inter se sint affines communem basin CE habentes.

Tab. III.
fig. 2.

§. 51. In his itaque figuris sectio aquae ita determinatur, vt eius partes AEF et BEF proram et puppim spectantes debeant esse affines; seu PR ad PS eandem debeat tenere rationem quam AC ad BC. Hanc obrem ponamus praeter plani diametralis figuram ADB datam esse figuram sectionis ampliffimae CEDF: his enim duabus sectionibus datis totius carinae figura innotescet. Hunc in finem positis $AC=a$, $CD=b$ et $CD=c$, sint pro plano diametrali abscissa $CT=p$ et applicata $TV=q$: itemque pro sectione ampliffima fit abscissa $CP=r$ et applicata $PQ=s$: atque ob has figuras datas dabitur q per p , similiterque s per r . Propter similitudinem vero erit $CD(c):CA(a)=PQ(s):PR$ vnde fit $PR=\frac{as}{c}$, quae est applicata anterioris partis sectionis aquae respondens ab-

Part II.

D

scissae

sciffae $CP=r$. Pro parte autem posteriori erit $PS=\frac{\alpha s}{c}$ posito $CB=\alpha$.

§. 52. Sumatur nunc pro sectione RQS absciffa PY , quae fit ad CT , p vt RQs ad CD , c seu $PY=\frac{ps}{c}$ erit applicata respondens $YZ=\frac{qs}{c}$. Quamobrem cum punctum Z fit in superficie carinae, si tres variables, quibus locus puncti Z determinatur, ponantur $CX=x$, $XY=y$ et $YZ=z$, erit $CX=x=\frac{ps}{c}$, $XY=y=r$ et $YZ=z=\frac{qs}{c}$. Quoniam vero datur s per r , dabitur quoque s per y , ob $r=y$, fitque $s=Y$, existente Y functione ipsius y . Deinde aequatio $\frac{x}{z}=\frac{p}{q}$, quia q datur per p praebebit p functioni nullius dimensionis ipsarum x et z : ex quo fiet $s=Y=\frac{cx}{p}$ functioni vnus dimensionis ipsarum x et z . Haecque est proprietas essentialis figurarum ad tertiam speciem relatarum.

§. 53. Ad soliditatem huiusmodi figurarum inueniendam, ponatur area plani diametralis $ADB=E$, erit area $RQS=\frac{E s s}{c c}$; atque volumen spatii $ARQSB=\frac{E}{c c} \int s s dr$. Si ergo post integrationem ponatur $r=b$, prodibit volumen semiffis carinae $AEBD$, ex quo volumen totius carinae erit $=\frac{2E}{c c} \int s s dr$. Ponatur area sectionis amplissimae $EDF=F$, atque eius semiffis CDE , centrum grauitatis in g , ex quo ad EF ducatur verticalis gG . His factis erit $F=2 \int s s dr$. atque $Gg=\frac{\int s s dr}{\int s s dr}$, vnde habebitur $\int s s dr = F \cdot Gg$: si quidem integralia, vti decet fuerint accepta. Hinc itaque pro soliditate totius carinae emerget sequens expressio $\frac{2E \cdot F \cdot Gg}{c^2} = \frac{2E \cdot F \cdot Gg}{CD^2}$, cuius valor ex datis plano diametrali et sectione amplissima pro operatione practica non difficulter inuenitur.

§. 54. Tres istae priores species hoc inter se conueniunt atque a sequentibus tribus discrepant, quod habeant sectiones vni principalium parallelas inter se similes, cum in sequentibus tantum sint affines. Quoniam autem figurae similes in affinibus continentur, etiam hae tres species priores in sequentibus tribus comprehenduntur. Interim tamen idoneum visum est ex similitudine peculiare species constituere, cum calculus pro iis fiat admodum facilis; ac figurae nauium, quae ad has species pertinent, a reliquis distingui mereantur. Praeterea in his iam expositis tribus speciebus duae sectiones principales sufficiunt ad totam figuram determinandam, atque tertia ex iis sponte definitur: at in sequentibus speciebus omnes tres sectiones principales pro lubitu assumere licet, ex quo earum latissima extensio colligi potest.

§. 55. In sequentibus igitur speciebus omnes tres sectiones principales nobis erunt datae, ex iisque nauium figura triplici modo determinabitur: primo scilicet eas figuras considerabimus, in quibus omnes sectiones horizontales cum inter se tum sectioni aquae sint affines; secundo sectiones verticales sectioni amplissimae parallelae eidem affines ponentur: tertio denique affinitas statuetur inter sectiones verticales plano diametrali parallelas; haeque tres species constituent nobis species quartam, quintam et sextam. Qui autem haec attentius perpendet facile agnoscat vix dari aut excogitari posse carinae figuram, quae si non ad aliquam trium priorum specierum pertineat, ad quandam posteriorum referri nequeat. Atque hanc ob rem perfectissimam nauium figuram, quam quaerimus, in his sex speciebus contineri, sine vlla haesitatione tuto assumimus.

§. 56. Cum igitur in posterioribus his tribus speciebus tres sectiones principales a se inuicem non pendeant, singulaeque pro arbitrio accipi queant, dummodo in punctis E, D, et F conueniant, singulas peculiaribus aequationibus exprimemus inter binas coordinatas orthogonales, quarum alterius abscissae scilicet a puncto medio C computentur. Ita pro sectione aquae p denotabit abscissam in axe CA sumtam ac q applicatam respondentem. Porro r denotabit abscissam sectionis amplissimae in axe CE sumtam atque s applicatam respondentem. Denique pro plano diametrali t erit abscissa in axe CD sumta, et u eius applicata. Ob tres igitur sectiones principales vel datas vel tanquam datas considerandas, cognitae erunt aequationes cum inter p et q , tum inter r et s tum etiam inter t et u .

§. 57. Quod denique ad longitudinem, latitudinem et profunditatem cuiusque carinae in genere attinet, a nobis semper denotabit longitudinem prorae CA, puppis autem longitudo CB designabitur littera α . Maximae autem latitudinis EF semissis, hoc est vel CE vel CF erit nobis constanter $= b$. Profunditatem vero CD exprimat littera c . Deinde cum harum trium sectionum principallium areae in calculum sint ingressurae, ponemus aream sectionis aquae AEBF $= 2 D$, quia ex duabus portionibus similibus et aequalibus AEB, AFB quarum vtraque erit $= D$, constat. Semissis vero sectionis amplissimae fit $= E$ ita vt fit area EDF $= 2 E$. Area tandem plani diametralis ADB, quia non constat duabus portionibus aequalibus et similibus exponatur littera F.

§. 58.

§. 58. Examini ergo subiiciamus nauium speciem quartam, in qua omnes sectiones horizontales seu sectioni aquae parallelae eidem sint affines. Sit igitur AEDBF eius-^{Tab. II.} modi figura pro cuius sectione aquae ponatur abscissa CI ^{fig. 2.} $= p$; applicata IK $= q$: pro sectione vero amplissima fit abscissa CH $= r$, applicata HQ $= s$; ac pro plano diametrali fit abscissa CP $= t$, et applicata PS $= u$. Ex figura autem intelligitur esse CP $=$ HQ seu $s = t$; quare cum r per s et u per t detur, erunt r et u functiones vel ipsius t vel ipsius s . Concipiatur nunc per punctum P facta sectio horizontalis S Q T R, quae ita erit comparata, vt tam portio SQR affinis sit portioni sectionis aquae AEF, quam portio TQR portioni EBF.

§. 59. In hac igitur sectione si capiatur abscissa PO quae sit ad CI (p) vt PS (u) ad CS (a), seu PO $= \frac{pu}{a}$, erit ex natura figurarum affinium applicata OZ : IK (q) $=$ PQ (r) : CE (b) siue OZ $= \frac{qr}{b}$. Si nunc ex puncto Z, quod in superficie figurae est situm, ducatur ad sectionem aquae normalis ZY, et ex Y ad axem AC normalis YX, erunt CX $= x$; XY $= y$; et YZ $= z$ tres coordinatae, quibus natura huius superficie exprimitur. Erit autem $x = PO = \frac{pu}{a}$; $y = OZ = \frac{qr}{b}$, atque $z = CP = HQ = t = s$: hinc ergo z loco t et s substituendo fiet tam u quam r functiones ipsius z . Priores vero aequationes praebent $p = \frac{ax}{u}$ et $q = \frac{by}{r}$, vnde ex aequatione inter p et q data, elicietur aequatio inter x , y et z , qua natura superficie continebitur.

§. 60. Si aequationum $p = \frac{ax}{u}$ et $q = \frac{by}{r}$ altera per alteram diuidatur, habebitur $\frac{p}{q} = \frac{arx}{buy}$ vbi $\frac{ar}{bu}$ erit functio quae-

quaepiam ipsius z . Quoniam autem q per p datur, definiiri poterit valor ipsius p ex ista aequatione per x , y et z , qui valor ita erit comparatus, vt si solae quantitates x et y dimensiones constituere censeantur, fiat $p =$ functioni ipsarum x et y nullius dimensionis, in qua tamen z quoque insit. Quare cum sit $u = \frac{ax}{p}$ aequatio localis pro huius generis figuris hanc habebit proprietatem, vt functio quaedam ipsius z aequetur functioni ipsarum x , y et z , in qua variables x et y coniunctim vtique vnā dimensionem obtineant. Ex aequatione autem locali hoc modo inuenta omnes sectiones huiusmodi figurarum innotescant.

§. 61. Ad soliditatem vero huius figurae definiendam notare conuenit aream sectionis SQTR se habere ad aream sectionis aquae AEBF vt ru ad ab . Quare cum sectionis aquae area posita sit $= 2D$, erit area sectionis SQTR $= \frac{2Dr u}{ab}$; in qua expressione quantitates r et u dantur per $s = t = z$; ita vt posito CP $= z$ futurae sint ambae quantitates r et u functiones ipsius z . Ex his obtinebitur volumen totius carinae propositae $= \frac{2D}{ab} \int r u dz$, si quidem post integrationem ita institutam, vt integrale evanescat posito $z = 0$, ponatur $z = c$. Atque hoc pacto volumen figurae ex datis tribus sectionibus principalibus non difficulter definietur.

Tab. III §. 62. Sequitur nauium species quinta ad quam omnes
fig. 1. figuras retulimus, quae sectiones verticales amplissimae parallelas eidem affines habent. Eiusmodi ergo figura fit AEEFD, cuius sectio aquae AEBF data sit per aequationem inter abscissam CX $= p$ et applicatam XR $= q$:
pro

pro sectione autem amplissima CDF data sit aequatio inter abscissam $CP=r$ et applicatam $PM=s$. Denique plani diametralis natura expressa fit aequatione inter abscissam $CQ=t$ et applicatam $QV=u$. Quoniam autem haec figura ad propositum casum est accommodata, erit $CX=QV$ seu $p=u$; quare cum q per p et t per u dentur erunt q et t functiones eiusdem quantitatis siue p siue u .

§. 63. Per punctum axis X concipiatur facta sectio verticalis RVS sectioni amplissimae parallela quae cum eadem sit affinis, capiatur in ea abscissa XY eandem tenens rationem ad abscissam CP quam tenet XR ad CE, vnde erit $XY=\frac{qr}{b}$; applicata autem respondens YZ ita erit comparata, vt sit $YZ : PM (s) = XV (t) : CD (c)$, seu $YZ = \frac{st}{c}$. Ponatur iam $CX = x$; $XY = y$ et $YZ = z$, erit $x = p = u$; $y = \frac{qr}{b}$ et $z = \frac{st}{c}$: vnde q et t erunt functiones ipsius x : reliquae aequationes praebent $\frac{y}{z} = \frac{cqr}{bst}$, vnde ob s per r datum reperietur $r =$ functioni ipsarum x, y, z , in qua y et z vbique numerum dimensionum nullum constituent. Quamobrem ob $q = \frac{by}{r}$, functio quaequam ipsius x aequabitur functioni cuidam ipsarum x, y , et z . in qua variables y et z solae consideratae vnicam dimensionem constituent.

64. Quod ad volumen huius figurae attinet, id ex area sectionis RVS, quae cognitam tenet relationem ad aream sectionis amplissimae, definietur: cum enim sit area EDF = 2E, erit area RVS = $\frac{Eqt}{bc}$ atque quantitates q et t , erunt functiones eiusdem variabilis p vel u propter $p=u$. Quare si retineatur abscissae CX denominatio

x ,

x , erunt q et t functiones ipsius x , quae deriuabuntur ex aequationibus inter q et p atque inter t et u datis, scribendo x loco p et u . Hinc itaque $\frac{2E}{bc} \int q t dx$, integrali ita sumto vt euanescat posito $x=0$, dabit volumen portionis EDFSVR; ac factò post integrationem $x=a$ proueniet soliditas seu volumen prorae AEDF, si ergo simili modo quaeratur volumen puppis, horum voluminum aggregatum dabit totius figurae propositae volumen.

Tab. III.
fig. 2.

§. 65. Peruenimus denique ad nauium speciem sextam, in qua omnes sectiones verticales plano diametrali parallelae eidem sunt affines; huiusmodi figura fit AEDBF. Ponatur igitur pro sectione aquae abscissa $CK=p$, applicata $KR=q$. Pro sectione amplissima vero fit abscissa $CP=r$ applicata $PQ=s$: ac pro plano diametrali fit abscissa $CN=t$, applicata $NV=u$: eritque $q=r$; ita vt futurae sint p et s functiones eiusdem quantitatis variabilis q vel r . Hic quidem vt in praecedentibus speciebus notandum est non necessario esse $q=r$, sed potius q et r sunt quantitates a se inuicem non pendentes. Quoniam vero figura ad casum praesentem accommodari debet, is facillime euoluetur, si perpetuo r ipsi q aequale capiatur.

§. 66. Per punctum P fiat sectio RQS plano diametrali parallela, quae ob $CP=KR$ simul per punctum R transibit: erit ergo eius profunditas $PQ=s$, et longitudo versus proram $PR=CK=p$. Ducto nunc ex V in plano diametrali perpendicularo VT, erit $CT=u$, et $TV=t$; quo factò in sectione RQS capiatur $PY:PR=CT:CA$ seu $PY=\frac{pu}{a}$, erit ob affinitatem $YZ:PQ=TV:CD$ seu $YZ=\frac{st}{c}$. Iam per Y ducta applicata
MYX

MYX dicantur $CX = x$; $XY = y$, et $YZ = z$ eritque $y = r = q$; $x = \frac{pu}{a}$ et $z = \frac{st}{c}$; ex quibus tandem haec istiusmodi figurarum proprietas essentialis deducitur, vt functio quaequam ipsius y aequalis fit functioni ipsarum x , y et z in qua variables x et z solae consideratae vbique vnam dimensionem constituent.

§. 67. Volumen denique huius figurae pariter ac praecedentium ex natura figurarum affinium determinabitur. Cum enim plani diametralis ADB area posita sit $= F$, erit area sectionis RQS illi affinis $= \frac{Fps}{ac}$, atque ob p et s per q et r datas, et propter $y = r = q$, erunt p et s functiones eiusdem variabilis $y = CP$. Quamobrem $\frac{F}{ac} \int p s dy$ dabit soliditatem portionis ARQSB integrali ita accepto vt euanescat posito $y = 0$. Quare si post integrationem ponatur $y = b$, prodibit soliditas semiffis figurae propositae, ex quo totius figurae seu carinae propositae volumen erit $= \frac{2F}{ac} \int p s dy$, integratione debito modo peracta.

§. 68. Quoniam figurae similes in figuris affinibus continentur harumque quasi speciem constituunt, ita tres posteriores species in se priores comprehendunt; ex quo fit, vt quae figura ad speciem primam pertinet, eadem quoque sub specie quarta contineatur; similique modo secunda species sub quinta, et tertia sub sexta sit contenta. Hoc igitur modo tres adhuc simpliciores species constitui possunt, in quibus sectiones vni principalium parallelae eidem non solum similes sed etiam aequales sint, cuiusmodi figurae passim in minoribus nauigijs reperiuntur. Omnium autem simplicissima figura erit parallelepipedum,

Capitulum II.

E

in

in qua nullae sectiones curuilineae locum inueniunt ; talem autem figuram arca Noae habuisse fertur.

§. 69. Quod ergo ad figuram carinae externam attinet , eius commodissime decem species statuuntur ; quarum etiam in sequentibus rationem habebimus. Prima nimirum species constabit parallelepipedo ; secunda eiusmodi figuris , quae habent omnes sectiones horizontales inter se aequales et similes. In figuris tertiae speciei erunt omnes sectiones verticales sectioni amplissimae parallelae inter se similes et aequales. Figurae autem quartae speciei habebunt omnes sectiones verticales plano diametrali parallelas inter se similes et aequales. Has deinde species sequentur eae sex , quas ante iam sumus contemplati , quarum tres priores ex similitudine sectionum vni principalium parallelarum , posteriores vero ex affinitate sunt desumptae. Quatuor autem species nunc demum superadditae tractatu tam sunt faciles , vt hic non sit opus eas ad aequationes redigere earumque soliditatem determinare.

§. 70. Cum igitur in hoc libro nobis sit propositum imprimis in conuenientissimam carinae figuram inquirere , ad quamque circumstantiam , quae ad determinationem figurae nauium quicquam confert , singulas recensitas decem species euoluemus , ac quo pacto requisitis conditionibus maxime satisfiat , inuestigabimus. Quodsi ergo hac methodo progrediamur facile intelligetur , quantum quaeque species capax sit perfectionis , quibusque impedimentis sit obnoxia : ex quibus omnibus coniunctio haud difficulter colligetur , ex quam specie optima nauium figura sit desumenda. In hac autem disquisitione ad vsum , cui naues destinari solent , potissimum est respiciendum.

§. 71. Quoniam autem, si tres postremae species spectentur, tres figurae indeterminatae et arbitrariae scilicet tres sectiones principales in calculum ingrediuntur, ne tractatio nimis sit vaga, iuuabit has sectiones aequationibus, satis late patentibus, includi, quae ita sint comparatae, ut propemodum omnes figuras, quae in earum locum substitui possunt, sub se comprehendant. Hinc enim id consequemur commodi, ut pro his sectionibus definitas habeamus aequationes, quae non solum facilius tractari possunt, quam prorsus indefinitae, sed etiam ad determinationes recipiendas magis sunt accommodatae: conuenit enim statim omnes eas figuras excludi, quae ad structuram sunt inutiles, atque ad nauium formam formandam ineptae. Hoc vero subsidio tum solum utemur, quando circumstantiae non ita sunt comparatae, ut figuram alicuius sectionis omnimode determinent.

§. 72. Maneant igitur constanter a longitudo prorae α longitudo puppis, b semiffis amplitudinis maximae, et c maxima altitudo carinae, atque consideremus sectionem aquae seorsim, quae sit AEBF, eiusque diameter recta AB a prora A ad puppim B protensa. Huius figurae Tab. IV. sit EF maxima latitudo, diuidens sectionem aquae in duas fig. 1. partes, quarum altera versus proram altera versus puppim est sita. Quoniam autem ambae partes, ex vtraque diametri AB parte sitae, sunt inter se similes et aequales, sufficiet alteram medietatem determinasse. Hanc in finem posita abscissa $CP = p$ et applicata $PQ = q$, aequatio inter p et q ita debet esse comparata, ut generalibus quibusdam conditionibus, ad nauium constructionem et figuram determinandam necessariis, satisfaciat.

§. 73. Quoniam igitur est $CA = a$; $CB = \alpha$; $CE = CF = b$, aequatio inter p et q ante omnia ita debet esse comparata, vt posito $p = 0$, fiat $q = b$: quare si P talis fuerit functio ipsius p , quae abeat in B , posito $p = 0$, debebit esse $q = \frac{bP}{B}$. Deinde nisi figura sectionis aquae tum versus proram tum versus puppim sit aperta, id quod quibusdam casibus euenire potest, quos in hoc negotio non spectemus, aequatio inter p et q ita debet esse comparata, vt posito vel $p = a$ vel $p = -\alpha$, euanescat q . His ambabus conditionibus satisfiet si pro aequatione, naturam sectionis aquae exprimente, assumatur eiusmodi forma $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m \alpha^n}$

($1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + \text{etc.}$) denotantibus m et n numeros nihilo maiores. Si enim esset vel $m = 0$ vel $n = 0$, tum sectio aquae vel in prora vel in puppi non foret clausa, sed ad casus modo commemoratos pertineret, ad quos ergo haec aequatio etsi eos exclusimus, tamen est accommodata.

§. 74. Praeterea maxime requiritur vt curuae huius tangens in puncto E sit axi AB parallela, primo enim in praxi anguli ad latera nauis tolerari non solent; deinde vero hoc ipso, quod applicata CE omnium maxima esse debet, necesse est, vt tangens ad E sit axi AB parallela. Huic conditioni vt satisfiat, oportet vt q nullum incrementum decrementumue capiat, si loco $p = 0$ ponatur p infinite paruum. Impleta autem hac conditione reperietur esse debere $\sigma = \frac{m\alpha - na}{a\alpha}$, reliquae vero coefficientes adhuc manent indeterminatae, vnde amplissima habetur aequatio pro omnis generis sectionibus aquae ad praxin idoneis, quae erit haec $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m \alpha^n} (1 + \frac{(m\alpha - na)}{a\alpha} p + \eta p^2 + \theta p^3 + i p^4 + \text{etc.})$

§. 75.

§. 75. Quoniam porro naues per fatis notabile intervallum eandem fere latitudinem conferuare solent, curvatura in puncto E vehementer exigua esse debet, insuperque radium curuedinis in E versus axem AB directum, seu curuam in E concauam versus hanc regionem esse oportet. Fit autem posito p infinite paruo $q = b \left(1 - \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2 - 2a^2\alpha^2\eta}{2a^2\alpha^2} \right) p^2$ curua ergo in E concaua erit versus axem AB si fuerit $\eta < \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2}$. At si fuerit $\eta = \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2}$ tum curvatura in E penitus euanesct, atque curua hoc loco cum linea recta confundetur, quae conditio ad pletrasque naues perquam idonea videtur.

§. 76. Si ergo ponatur $\sigma = \frac{m\alpha - n\alpha}{a\alpha}$, atque $\eta = \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2} - \frac{\gamma}{a\alpha}$, denotante γ quantitatem affirmatiuam, aequatio $q = \frac{b(a-p)^m (\alpha+p)^n}{a^m \alpha^n} (1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + i p^4 + \text{etc.})$ praebit figuram conuenientem pro sectione aquae cuius curvatura in E eo erit minor, quo minor fuerit quantitas γ , atque si γ omnino euanesct, fiet radius curuedinis in E infinitus. Vt autem applicatae q crescentibus abscissis p continuo decrescant, oportet coefficientibus θ et i etc. idoneos tribui valores; nam σ et η hoc modo determinata iam praebent differentialia ipsius q negatiua. Hoc vero fatis tuto obtinebitur, si curua in punctis A et B in axem incidat.

§. 77. Si exponentes m et n fuerint nihilo maiores, tum curua in vtroque puncto A et B cum axe concurrat: at per exponentes m et n effici potest, vt concursus curvae cum axe in punctis A et B fiat datus. Scilicet si

$$E \ 3$$

$$m < 1$$

$m < 1$ tum angulus QAP erit rectus, tangens autem in A in ipsum axem incidet, si fuerit $m > 1$: at angulus QAP euadet acutus vel obtusus si $m = 1$. vt autem hic angulus fit acutus insuper oportet esse $1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + \text{etc.}$ > 0 posito $p = a$, quod quidem sponte patet, alias applicata q fieret alicubi negatiua. Simili modo posito $p = -a$ debet esse $1 - \zeta a + \eta a^2 - \theta a^3 + \text{etc.}$ > 0 . angulus vero ad B pendebit ab exponente n , qui si fuerit vnitatem maior, euanescent angulus EBC, rectus autem erit si $n < 1$, at acutus si $n = 1$.

§. 78. Neque vero absolute est necessarium, vt partes AE et BE vnam eandemque curuam continuam constituent, sed ad vsum practicum sufficit, si ambae hae partes in E ita conueniant, vt ibi communem habeant tangentem axi AB parallelam. Praestabit autem hoc modo sectionem aquae concipere, cum inuentio areae et centri grauitatis multo fiat facilius atque adeo algebraice expediri queat. Consideremus itaque primo portionem prorae ACE cuius abscissa CP posita $= p$ et applicata PQ $= q$, ista aequatio $q = \frac{b(\alpha-p)^m}{a^m} (1 + \frac{m p}{a} + \frac{(m(m+1)-\gamma)}{2a^2} p^2 + \frac{\sigma p^3}{a^3} + \frac{\eta p^4}{a^4} + \text{etc.})$ conditionibus supra allatis satisfacet, si quidem γ significet numerum affirmatiuum.

§. 79. Simili modo si pro parte posteriore BCE ponatur abscissa Cp $= p$ et applicata pq $= q$, sequens aequatio conditionibus memoratis maxime satisfacet $q = \frac{b(\alpha-p)^n}{a^n} (1 + \frac{n p}{a} + \frac{(n(n+1)-\delta)}{2a^2} p^2 + \frac{\theta p^3}{a^3} + \frac{i p^4}{a^4} + \text{etc.})$. Ambae enim istae curuae non solum conuenient in puncto E, sed etiam hoc loco tangentem habebunt communem axi AB parallelam. Praeterea vero hae curuae in A et B cum

cum axe conuenient, si quidem exponentes m et n fuerint nihilo maiores. Denique hae aequationes, etiamfi innumerabiles termini adiici possint, tamen satis late patere videntur, si tantum termini vsque ad potestatem tertiam retineantur, reliqui vero reiiciantur, cum coefficientes duo γ , et σ item δ et θ abunde sufficiant, ad omnis generis curuas comprehendendas.

§. 80. Vt autem integrationes, quae tam ad aream quam centrum grauitatis inueniendum institui debent, facilius absoluantur, ponamus istam aequationem latissime patentem $y = (a-x)^m \left(A + \frac{Bx}{a} + \frac{Cx^2}{a^2} + \frac{Dx^3}{a^3} + \frac{Ex^4}{a^4} + \text{etc.} \right)$, pro qua quaeratur valor ipsius $\int y dx$, si post integrationem ponatur $x = a$; reperietur autem calculo finito $\int y dx = a^{m+1} \left(\frac{A}{m+1} + \frac{{}^1B}{(m+1)(m+2)} + \frac{{}^1{}_2C}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \text{etc.} \right)$ vel generatim post integrationem posito $x = a$ erit $\int (a-x)^m dx \left(A + \frac{Bx}{a} + \frac{Cx^2}{a^2} + \frac{Dx^3}{a^3} + \text{etc.} \right) = \frac{a^{m+1}}{m+1} \left(A + \frac{{}^1B}{m+2} + \frac{{}^1{}_2C}{(m+2)(m+3)} + \frac{{}^1{}_2{}_3D}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \text{etc.} \right)$ quae integratio generalis in praesentibus integrationibus ingentem praestabit vtilitatem.

§. 81. Quodsi nunc hac regula vtamur ad aream sectionis aquae propositae AEB inueniendam, reperietur primo area ACE $= \frac{ab}{m+1} \left(1 + \frac{m}{m+2} + \frac{m(m+1)-\gamma}{(m+2)(m+3)} + \frac{{}^6\sigma}{(m+2)(m+3)(m+4)} \right)$, existente aequatione pro portione ACE, $q = \frac{b(a-p)^m}{a^m} \left(1 + \frac{mp}{a} + \frac{(m(m+1)-\gamma)p^2}{2a^2} + \frac{\sigma p^3}{a^3} \right)$. Pro parte autem posteriore BCE, si fuerit aequatio $q = \frac{b(a-p)^n}{a^n} \left(1 + \frac{np}{a} + \frac{(n(n+1)-\delta)p^2}{2a^2} + \frac{\theta p^3}{a^3} \right)$ erit area BCE $= \frac{ab}{n+1} \left(1 + \frac{n}{n+2} + \frac{n(n+1)-\delta}{(n+2)(n+3)} + \frac{{}^6\theta}{(n+2)(n+3)(n+4)} \right)$, quae

quae

rum expressionum summa bis sumpta dabit aream totius sectionis aquae AEBF.

Tab. IV.
fig. 2.

§. 82. Contemplemur nunc sectionem amplissimam EDF, cuius latitudo in superficie aquae est $EF = 2b$, et profunditas $CD = c$; constat autem haec sectio ex duabus partibus ECD et FCD inter se aequalibus et similibus; quare alteram medietatem determinasse sufficiet. Si ergo pro semisse ECD ponatur abscissa $CR = r$, et applicata $RS = s$, aequatio inter r et s ita debet esse comparata, vt posito $r = 0$, fiat $s = c$, atque vt quo maior capiatur abscissa r applicatae s continuo decrescant, donec tandem si fiat $r = CE = b$, applicata s euanescat, siquidem curuatura a D vsque ad E fuerit continua. Interim tamen aequatio generalis inter r et s ita concinnari potest, vt etiam pro iis casibus, quibus curua non est continua, valeat; quod euenit si spatium quodpiam linea recta claudatur.

§. 83. His duabus commemoratis conditionibus satis fiet, si pro curua ESD ista accipiatur aequatio $s = \frac{c(b-r)^\kappa}{b^\kappa} \left(1 + \frac{\beta r}{b} + \frac{\epsilon r^2}{b^2} + \frac{i r^3}{b^3} + \text{etc.} \right)$ cuius seriei sufficit quatuor priores terminos hic exhibitos assumere. Si enim fit exponens κ affirmatiuus, negatiuus enim nullo modo esse potest; posito $r = 0$ fit $s = c$, facto autem $r = b$, prodit $s = 0$. At si $\kappa = 0$ aequatio ad eos casus accommodata erit, quibus sectio haec ad E linea recta verticali terminatur, vti si haec sectio fuerit parallelogrammum rectangulum. Sin r capiatur infinite paruum, prodit $s = c \left(1 - \frac{(\kappa - \beta)r}{b} + \frac{(\kappa^2 - \kappa - \gamma \beta \kappa + 2\epsilon)r^2}{2c^2} \right)$ quae ergo expressio maior esse non debet quam c , quoniam CD est maxima applicata.

§. 84.

§. 84. Nisi ergo sit $\beta = \kappa$, quo casu tangens ad D fiet horizontalis, atque angulus CDE rectus, oportet esse $\beta < \kappa$; atque a defectu $\kappa - \beta$ pendebit quantitas anguli CDE, ita vt per coefficientem β angulus CDE ad arbitrium formari possit, erit enim anguli CDE tangens $= \frac{b}{(\kappa - \beta)c}$. At si angulus hic CDE capiatur rectus, quo casu erit $\beta = \kappa$, necesse est vt sit $\kappa(\kappa + 1) - 2\varepsilon > 0$, quo curuatura ad D fiat concaua versus superficiem aquae EF. Quod denique ad angulum, quem curua in E cum axe CE conficit, attinet, is erit rectus si fuerit $\kappa < 1$, nullus si $\kappa > 1$ at arbitrariam quantitatem habebit, si sumatur $\kappa = 1$. Ceterum area huius sectionis ampliffimae ex assumpta aequatione algebraice poterit definiri.

§. 85. Quae ante de figura sectionis aquae monuimus, Tab. IV.
fig. 3. eadem locum habent in plano diametrali ADB; haec enim figura ita quoque esse debet comparata, vt positis coordinatis $CV = u$ et $VT = t$, fiat $t = CD = c$ facto $u = 0$; atque vt curua in punctis A et B in axem AB incidat. Hanc ob rem vel vna curua continua pro sectione ADB poterit assumi, vel duae diuersae, quae in D concurrant, ibique tangentem habeant communem horizontalem. Quo circa pro portione CDA accipi poterit haec aequatio $t = \frac{c(a-u)^\mu}{a^\mu} \left(1 + \frac{\mu u}{a} + \frac{(\mu(\mu+1)-g)u^2}{2a^2} + \frac{fu^3}{a^3} \right)$ pro parte autem posteriore existente $Cv = u$ et $vt = t$, haec aequatio $t = \frac{c(v-u)^\nu}{a^\nu} \left(1 + \frac{\nu u}{a} + \frac{(\nu(\nu+1)-d)u^2}{2a^2} + \frac{bu^3}{a^3} \right)$, de quibus aequationibus eadem omnino sunt tenenda, quae supra de sectione aquae annotauimus.

§. 86. Cum in hoc capite constituiffem naues in genere contemplari, atque omnes varietates, quae quidem in nauibus locum habere possunt, perpendere, vt mox intelligatur, quibusnam rebus determinandis nauibus summa perfectio inducatur; conueniebat praecipuas nauium diuisiones commemorari. Primam itaque distinctionem desumptam ex quantitate vel pondere nauium, qua eae secundum onera, quibus gerendis pares sunt, distingui solent. Secunda diuisio petita est a figura partis aquae immerfae seu carinae, huiusque varietates, quamuis sint innumerabiles, ad decem species reuocari, in quibus omnes omnino nauium formae, quaecumque excogitari queunt, comprehendi posse videntur. Reliquum igitur est, vt ad ceteras varietates nauium attendamus, quae cum ex vsu tum ex modo eas mouendi originem trahunt.

§. 87. Quod quidem ad vsum, cui naues destinari solent, spectat, ingens deprehenditur discrimen; aliae enim naues ad onera vehenda, aliae ad homines sunt accommodatae, aliae autem ad bellum gerendum, quae bellicae vocantur, sunt instructae, cuius diuersitatis vtique in constructione nauium ratio haberi debet, vt aptae reddantur ad scopum intentum consequendum. Sed haec varietas ad nostrum institutum non admodum pertinet, cum hic non tam ad nauium structuram internam, quam externam respiciamus, a qua potissimum cursus et gubernatio pendet. Interim tamen hanc distinctionem notasse iuuat, cum a varietate operationis non solum locus centri grauitatis, sed etiam momenta nauium afficiantur, quarum rerum cognitio maxime est necessaria.

§. 88. Vltimam ac principalem fere nauium diuisionem suppeditat varietas virium, quibus naues in aqua propelli

PELLI solent. Cum enim naues non ideo fabricari soleant, vt in aqua quiescant, sed vt de loco in locum promouentur, viribus ad hoc est opus quibuscunque, quarum ingens datur multiplicitas. Aliae enim naues a cursu fluminis abripiuntur, aliae vel a hominibus vel pecudibus ad ripam protrahuntur, aliae remis propelli solent, aliae denique ope venti in vela irruentis promoentur. Ac praeter has vires complures aliae excogitari atque in vsum transferri possent. Praecipue autem a nobis notari merentur duo tantum virium genera cum a remis tum a vento petita, non solum quod haec maxime sunt in vfu, sed etiam quod nauium constructio ad ea potissimum sit accommodanda.

§. 89. Cum igitur, quae ad situm nauium aequilibrium atque ad firmitatem itemque ad resistentiam attinent, et quae praeterea res omnibus nauibus sunt communes exposuero, reliqua tractatio erit bipartita, quarum altera circa naues remis propulsas, altera autem circa eas, quae vento promoentur, erit occupata. Neque vero hinc reliquae vires, quae ad naues propellendas adhiberi possunt, prorsus excluduntur, sed quo quaeque vis cum altera harum duarum maiorem habeat affinitatem, ex iis, quae tradentur colligere licebit, quaenam structura, quaeque gubernandi ratio ad eiusmodi naues maxime sit idonea. Deinde quoque si naues coniunctim remis et vento promouentur, iudicare licebit, quomodo istius modi naues comparatas esse oporteat. Earum scilicet structura medium tenere debet, inter eam, quae remis conuenit, atque inter eam, quam vela requirunt: eoque magis ad alteram rationem accedere debet, quo magis altera vis alteri prae-

valebit ; qua de re iudicium ex vſu , cui nauis quaeque deſtinatur , erit petendum.

§. 90. Antequam autem , quae ſtructura nauibus remis propellendis conueniat , inueſtigari queat , effectus , qui ab actione remorum proficiſcitur , determinari debet : quae inqueſtitio , cum a nemine adhuc ſatis ſit euoluta , diligentius ex principiis motus erit pertractanda. Eo igitur loco non ſolum erit deſiniendum , quantum remi ad nauem propellendam efficiant , ſi data vi agitentur , ſed etiam , quod praecipuum eſt , forma remorum maxime idonea et virium remigum applicatio maxime lucroſa determinari debebit. Plurimum enim in hoc negotio intereſt , effectum per eadem vires maximum lucrari , ne remigum numerus praeter neceſſitatem nimium ſit multiplicandus quae cautio , ſi ventus adhibeatur , non tantopere eſt attendenda , cum vis a vento excipienda ſine ingentibus ſumtibus multiplicari queat , remigum numerus autem non item.

§. 91. Cum ergo in nauibus , quae remis ſunt inſtruendae , potiffimum requiratur , vt eiusdem vis ope maximus effectus obtineatur , ſtructura nauium in hunc finem aptiſſima deſiniri debet. Reſiſtentia igitur , quam naues in aqua progredientia patiuntur , quantum fieri poteſt , diminui debebit , cum reſiſtentia aquae ſolum ſit obſtaculum , quod viribus promouentibus eſt ſuperandum. Quo circa pro huius generis nauibus diligentiffime in eam nauium figuram erit inquirendum , quae in aqua promota minimam perpetiatur reſiſtentiam. Atque in hoc negotio ad ſolum curſum directum reſpici oportet , cum nulla ſit ratio , ob quam nauis vnquam ad curſum obliquum dirigatur : remorum enim ratio ad omnes plagas aequaliter eſt comparata.

§. 92.

§. 92. Longe aliter res se habet in nauibus, quae a vi venti ad motum cientur, quoniam enim mali et vela citra notabiles sumtus pro lubitu augeri possunt, non tantam curam ad vim diminuendam adhiberi conuenit. Quin potius in hoc est incumbendum, vt naues maximam vim sustinere queant: hunc enim naues plerumque habere solent defectum, vt vi, quae a vento excipitur, nimium acuta, situm erectum retinere nequeant, sed subuersioni sint obnoxiae. Quocirca non solum idonea velorum applicatio, sed etiam aptissima nauium forma erit investiganda, quae a venti vi quantumuis magna minimam inclinationem producat; hocque pacto plures nauium defectus maximi momenti tollentur.

§. 93. Priusquam autem hoc examen suscipiatur, vis venti generatim atque effectus quem in vela expansa utcumque impingens exerit, considerari debent; quo loco si vela non sint maxime extensa, curuatura, quam ventus velis inducit, erit determinanda, quoniam sine ea media directio vis venti in vela exerta cognosci nequit. Definita autem cum quantitate tum directione virium a vento exceptarum, inuestigari oportebit; non solum quantum motus progressiuus augeatur, sed etiam quanta nauis inclinatio inde oriatur. Hoc enim cognito dispicere licebit, quomodo inclinatio vel omnino impediatur, vel quantum fieri potest diminuatur; quo in negotio primo firmitas maxime erit spectanda, tum vero etiam resistentia, quippe quae ita potest esse comparata, vt nisi contrario vim subuersionem adeo minantem penitus destruere possit.

§. 94. Ex his iam satis liquet, in constructione nauium velis instruendarum non tam ad minimam resistentiam

tiam esse respiciendum quam ad firmitatem, qua omni inclinationi reluctatur. Parum enim lucri accederet, si quidem naus minimam pateretur resistantiam, simul vero esset tam debilis, ut vim venti sustinere non posset. Interim tamen dubium non est, quin, si simul et summa resistantiae diminutio, et maxima firmitas obtineri possent, id plurimam sit allaturum utilitatem, sed plerumque hae conditiones, ita solent esse comparatae, ut si vni satis fiat, alteri detrahatur: accedent autem praeter resistantiam et firmitatem plures aliae circumstantiae, quarum ratio quoque est habenda, unde adhuc maior collisio regularum nascitur: de quibus suo loco fusius explicabitur.

§. 95. In nauibus autem huius generis motus seu cursus obliquus maxime habet locum, qui instituitur, si directio venti nimis a cursu destinato discrepat, ut cursui directo nullus relinquatur locus. Hanc ob causam operam adhiberi oportet, ut quantum fieri potest, cursus contra directionem venti dirigi queat, quo in negotio praeter dispositionem velorum figura carinae plurimum valet. Atque ideo multo magis est efficiendum, ut naues ope cursus obliqui aduersus ventum moueri possint, quam ut resistantia in cursu directo diminuatur. Ex hisque abunde intelligitur, quantum ratione structurae tantum intersit inter naues, quae remis, easque, quae vento propelluntur, adeo ut haec distinctio maxime sit necessaria, ad hanc tractationem absoluendam.



Cap. II.

DE SITV AEQVILIBRII NAVIVM.

§. 96.

Quemadmodum omne corpus aqua specificè leuius, si aquae immittatur, pluribus sitibus aequilibrium tenere potest, vti in praecedenti libro fufius est expositum; ita etiam naus quaecunque, quamcunque habeat formam, dummodo leuior fit quam aequale volumen aquae, non solum vnus aequilibrii situs erit capax, sed etiam pluri-um. Neque vero ad institutum nostrum attinet omnes hos aequilibrii situs inuestigare, sed potius naues ita instrui oportet, vt datus et determinatus situs aequilibrii proprietatibus gaudeat. Omnis enim naus, cuiuscunque sit generis, ita esse debet comparata, vt aquae immissa praescriptum situm occupet, ac data eius portio aquae immergatur. Quare cum situs aequilibrii non inter res quaerendas, sed datas reperitur, naues ad eum induendum ante omnia accomodatas esse conuenit.

§. 97. Statim enim ac naus cuiusque constructio suscipitur, non solum quantitas voluminis immerfi, sed etiam ipsa naus portio aquam subeunda determinari solet. Hoc vero ipsa nauium ratio et vsus requirunt, quae aquae innatantes situm erectum tenere debent; qui situs per constructionem obtinetur, si eam ipsa naus portio in aqua versetur, quae ab initio in hunc finem est destinata. Cum igitur in capite praecedente partem submersam iam descripsimus, eamque a reliqua parte distinxerimus, constructionem atque onerationem nauium ita absolui oportet, vt ea ipsa
por-

portio determinata aquae immerſa nauem in aequilibrio conferuet , ideoque aequilibrii proprietatibus in libro ſuperiore deſcriptis fit praedita.

§. 98. Ponamus igitur nauem aquae ita immitti vt determinata illa pars ſub aqua fit ſubmerſa , atque inueſtigemus , quomodo nauem comparatam eſſe oporteat , vt in hoc ſitu quieſcere , atque aequilibrium conſeruare queat. Maniſteſtum autem eſt ex primis hydroſticae legibus , ad hoc duas requiri , quarum altera pondus totius nauis ſpectat , altera locum ipſius centri grauitatis. Primo enim totius nauis pondus tantum eſſe debet , vt aequale ſit ponderi maſſae aquae , cuius volumen aequale eſt volumini partis ſubmerſae. Deinde neceſſe eſt , vt centrum grauitatis totius nauis ac centrum grauitatis ſpatii , quod in aqua occupat , ſeu centrum magnitudinis partis ſubmerſae , in eadem recta verticali ſint ſita.

§. 99. Volumen igitur partis ſubmerſae , ſi in menſura cõgnita fuerit datum , praebabit leui calculo , grauitati aquae innixo pondus , quod toti naui eſt conferendum , vt neque maior nauis pars neque minor in aquam ingrediatur. Pondus autem cuiusuis nauis tanquam ex duabus partibus conflatum conſiderandum eſt ; ex pondere ſcilicet ipſius nauis et rerum ad ipſam pertinentium , cuiusmodi ſunt mali , remi , ancorae , aliaeque machinae ; atque inſuper ex pondere onerum impoſitorum. Cum igitur pondus ipſius nauis in ſe ſpectatae fuerit cognitum , ex quantitate partis ſubmergenda colligere licebit , quanta onerum copia addi debeat , vt nauis definitum obtineat pondus. Ex quo perſpicitur , vt nauis maximae onerum copiae capax reddatur , cum ipſum nauis corpus quantum fieri poteſt ,
le-

leuiffimum, tum partis fubmergendae volumen maximum eſſe oportere.

§. 100. Neque vero onerum quantitatem cuique nauī imponendorum tam diligenter definiri opus eſt, quoniam in ipſa oneratione manifeſtum fit, quando debita onerum copia eſt ingeſta. Cum enim a prima conſtructione portio nauis aquae immergenda definiatur tamdiu oneribus imponendis erit continuandum, quoad definita illa pars ſub aquam prematur. Quamobrem in ipſa conſtructione potius ad finem praepoſitum reſpici oportebit, nauemque ita accommodari, vt praecſcriptam onerum copiam capere queat. Ad quoduis enim partis aquae ſubmergendae volumen per uſum practicum determinabitur pondus totius nauis in ſe ſpectatae, quod a pondere aequalis voluminis aquae ablatum praebebit pondus onerum imponendorum, vnde viciffim ſi praecſcribatur onerum pondus, cum nauis magnitudo tum etiam carinae cognoſcentur.

§. 101. Quanquam autem omnis nauis ad determinatum pondus portandum deſtinari ſolet, tamen ita naues conſectas eſſe oportet, vt etiam, ſi minus habeat pondus, in aqua ſitum teneat erectum, qui pariter requiſitis praerogatiuis gaudeat. Primum enim cum nauis nuper conſtructa atque etiam nunc vacua aquae immittitur, non ſolum eiusmodi ſitum in aqua tenere debet, quo planum diametrale ſit verticale, ſed etiam prora et puppis ad ſenſum aequaliter immergi debebunt: quod idem tenendum eſt, ſi nauis quamcunque onerationem debita minorem acceperit. Pro huiusmodi igitur caſibus regula huc redit, vt pro quaque onerum impoſitorum copia ſectio aquae parallela fiat illi ſectioſi aquae, quam nauis, cum com-

pletam onerum copiam est confecta, tenere debet. Hac enim regula vtrumque obtinetur, cum vt planum diametrale fit verticale, tum vt prora et puppis aequaliter submergantur.

§. 102. Regula haec ad situm nauium vacuarum spectans maximi est momenti, ac si in constructione cuiuspiam nauis contra eam peccatur, id pro ingenti damno haberi solet. Duplici autem modo contra istam regulam impingitur; quorum alter in inaequalitate laterum nauis constat, indeque euenit, vt, cum nauis in aquam demittitur, planum diametrale non teneat situm verticalem, sed versus latus grauius inclinetur. Alterum vitium committitur, si vel prora vel puppis nimis fabricetur ponderosa, tum enim ea pars quae grauior est aquae profundius immergitur, leuior vero extra aquam magis eminebit quam decet. Haecque vitia eo plus incommodi afferunt, quo sunt maiora: atque si ambo coniunctim in eadem nauis deprehendantur, id merito maximo vitio verti solet.

§. 103. Quanquam vero his vitiis, si quaedam nauis iis laboret, per onerationem remedium afferri posse videtur, dum parti leuiori maior onerum quantitas imponitur; tamen ista medela cum aliis maioris momenti incommodis est coniuncta. Praeterquam enim quod eiusmodi nauis ante, quam haec vitia tolli queant, in eo maiore periculo versatur, quo ea sint maiora, atque adeo statim subuersione perire possit, ipsa quoque oneratio, per quam alias plura atque insignia emolumenta nauibus afferri possunt, nimis restringitur, ac si memorati defectus satis sint enormes, nihil omnino commodi ex oneratione consequi licet. Quin etiam scopus, cui nauis est destinata saepe nume-

ro obtineri non potest, eo quod in eam navis partem, quae per se iam est nimis ponderosa, onera omnino imponere non licet, quo fit ut non solum spatium ab oneribus vacuum sit relinquendum, quod alias maxime idoneum foret ad onera capienda, sed etiam eo ipso status aequilibrum infirmitati fiat obnoxius.

§. 104. Quando autem navis ab his vitiis fuerit immunis, atque aquae commissa etiam nunc vacua situm accipiat erectum, quo sectio aquae, illi quam habere debet, cum fuerit onerata, sit parallela, tum non solum navis ab incommodis memoratis erit libera, sed etiam ad onerationem debito modo perficiendam maxime erit accommodata. Hoc enim solo casu licebit onera imponenda aequaliter per totam navis cavitationem distribuere, ac regulas, quae infra circa onerationem praescribentur observare. Si enim hoc modo onera tam versus latera, quam versus proram et puppim aequaliter distribuantur, tum navis motu sibi parallelo continuo magis immergetur, donec debita pars sub aqua versetur. Omnes autem rationes quae infra circa onerationem afferentur, aequabilem distributionem requirunt.

§. 105. Quo magis igitur perfecta navium constructio requirit, ut navis adhuc vacua in aqua situm erectum obtineat, eo magis est cavendum, ne in constructione vitia committantur. Quod quidem ad situm verticalem plani diametralis attinet, is nisi ingens incuria adfit, facile obtinetur ambobus lateribus non solum ratione figurae sed etiam ratione ponderis partium, quibus latera constant, aequalibus construendis. Ratione prorae autem et puppis situs erectus difficilius producitur, nisi volumine fere sint inter se similes hae duae navium partes. At si altera pars

alteram mole multum excedat ; tum difficulter, euitatur quia pars maior magis immergatur quam minor. Quare, quo altera pars alteram mole magis superat, eo magis erit augendum minoris pondus, maioris autem partis pondus diminuendum : ad quod recte obseruandum, ad centrum grauitatis voluminis aquam subeundi maxime est respiciendum ; qua de re mox necessaria praecepta proferentur.

§. 106. Quantumuis autem magna cura ad incommoda haec effugienda adhibeatur, tamen saepenumero memorati defectus euitari non possunt. Neque vero ideo istiusmodi naues, nisi multum a scopo aberrant, tanquam ineptae sunt censendae et regiciendae, sed opera potius summa est adhibenda, vt talis defectus quam commodissime tollatur. Fiet hoc, dum illi nauis parti, quae extra aquam nimium eminet, seu quae illi quae nimium immergitur, est oposita, tanta onerum copia imponatur, donec obliquitas situs omnino sit sublata. Atque in hac correctione praestabit ponderibus maxime grauibus vti, quo iis spatium quam minimum occupetur, satisque spatii superfit, ad reliqua onera secundum praecepta imponenda. Interim tamen id est tenendum, quo longius haec pondera a communi centro grauitatis remoueantur, eo paucioribus ponderibus intentum aequilibrii situm obtineri.

§ 107. Expositis his, quae tum ad ipsius nauis pondus tum onerum imponendorum quantitatem spectant ; quibusque quantitas voluminis aquae immergendi determinatur, inquiramus in alteram huius capituli partem, qua effici debet, vt data portio aquam subeat, dataque supra aquam emineat, seu vt data nauis sectio fiat horizontalis, atque in aquae superficiem incidat. Quoniam autem haec

pro-

proprietas nauibus tam vacuis quam onustis communis esse debet, primo nauem vacuum ita esse oportet, comparatam, vt aquae immissa sese in situm erectum recipiat, deinde inuestigandum est, quomodo onera sint disponenda, vt iis impositis nauis denuo situm erectum accipiat. Cum igitur situs erectus sit is, quo sectiones, quae supra vocatae sunt horizontales actu secundum horizontem collocantur, utroque casu id tantum est praestandum, vt sectiones horizontales dictae situm horizonti parallelum consequantur.

§. 108. Cum autem tanta nauis portio infra aquae superficiem est depressa, vt aqua de loco suo depulsa pondere adaequet ipsam nauem, id ad aequilibrium nondum sufficit, sed insuper requiritur vt centrum grauitatis totius nauis in eandem rectam verticalem incidat, in qua centrum grauitatis spatii, quod nauis in aqua occupat, versatur; quod centrum in superiori libro breuitatis et distinctionis gratia centrum magnitudinis partis submersae appellare consueuimus. Hoc enim centrum minus congrue vocaretur simpliciter centrum grauitatis carinae, etsi carina nobis eam nauis partem denotat, quae aquae est immersa; sed addenda esset conditio, qua tota carina ex homogenea materia constare ponatur. Qua propter altera conditio ad aequilibrium producendum necessaria huc redit, vt centrum grauitatis totius nauis et centrum magnitudinis carinae in eandem rectam verticalem incidant.

§. 109. Contemplemur nunc nauem siue vacuum siue onustam, ac ponamus huic alteri conditioni iam esse satisfactum, ita vt aquae immersa situm teneat erectum. Quoniam igitur in hoc situ planum diametrale est verti-

cale, carina seu pars aquae immiffa conftabit ex duabus partibus ratione figuræ externae inter fe aequalibus et fimilibus: atque hanc ob rem eius centrum magnitudinis in ipfo plano diametrali erit fitum. Quia autem positio verticalis plani diametralis fola ad fitum erectum non fufficit, fed praeterea requiritur, vt eae fectiones ad planum diametrale normaliter factae, quas ante vocauimus horizontales, actu fecundum horizonterem fint difpofitae; ex figura carinae externa ipfe centri magnitudinis locus in plano diametrali per calculum definiri debebit, quo cognito rectae verticalis, in qua hoc centrum exiftit, positio innotefcet.

§. 110. Cum igitur fine calculo iam conftet centrum magnitudinis partis fubmerfae feu carinae in plano diametrali effe fitum, fi quidem naus fitum teneat erectum, duabus infuper determinationibus ad ipfum huius puncti fitum definiendum erit opus. Primum enim eius diftantia a prora vel a puppi determinari debet, feu quod eodem redit a fectione transuerfali ampliffima: nifi enim in ipfam hanc fectionem ampliffimam cadat, vel in proram vel in puppim incidet, atque vtroque cafu eius diftantia a fectione ampliffima ope calculi eft inueftiganda. Deinde fingulari calculo profunditatem iftius centri magnitudinis in veniri oportet, fiue diftantiam a fectione aquae. Si enim hae duae res fuerint exploratae, ipfum punctum in plano diametrali affignari poterit, in quod centrum magnitudinis carinae cadit.

§. 111. Quoniam autem ad institutum noftrum fufficit rectam verticalem, in qua centrum hoc magnitudinis eft fitum determinaffe; posteriore determinatione in
hoc

hoc capite superfedere poterimus. Cum enim per priorem determinationem cognita fuerit distantia centri istius a sectione amplissima vel versus proram vel versus puppim; simul positio rectae verticalis, in qua hoc centrum est situm, innotescet. Namque si in plano diametrali ad tantam distantiam a sectione amplissima vel versus proram vel puppim, quantum centrum magnitudinis ab eadem sectione distare inuentum est, ducatur recta verticalis, erit haec ipsa recta verticalis illa linea nobis cognitu necessaria, in qua simul centrum grauitatis totius nauis debet esse situm. Neque igitur in praesenti negotio opus est, vt ipsum huius rectae punctum, in quod centrum magnitudinis incidit, definiatur; cum sola rectae verticalis per id transeuntis positio ad situm aequilibrum sufficiat. At in sequentibus, cum de firmitate situs aequilibrum agatur, ista determinatio, quam hic tuto negligere possumus, maxime erit necessaria: contra vero altera negligetur.

§. 112. Consideremus primum eam tantum lineae verticalis per centrum magnitudinis partis submersae transeuntis affectionem, qua inuenimus eam in ipso plano diametrali esse situm. Cum igitur centrum grauitatis totius nauis in eandem rectam verticalem cadere debeat, id ante omnia in plano diametrali positum sit necesse est. Quoniam vero nauis adhuc vacua, si in aquam demittatur situm erectum tenere debet, etiam nauis vacuae centrum grauitatis in plano diametrali situm esse oportet. Huic vero conditioni facillime satis fit; cum enim nauis ex duabus portionibus ad vtramque plani diametralis partem sitis constet similibus et aequalibus, si constructio vtrinque
similis

similis adhibeatur, eò ipso centrum grauitatis in planum diametrale incidet.

§. 113. Quando nauis vacua ista proprietate iam gaudet, eiusque centrum grauitatis in planum diametrale incidit, tum oneratione eadem conditio non difficulter ad implebitur. Quantum enim onerum pondus in vnum nauis latus imponitur, tantumdem in alterum latus erit collocandum; vtrique in eadem a plano diametrali distantia. Hac namque regula obseruata onerum impositorum commune centrum grauitatis in planum diametrale cadet et proinde etiam centrum grauitatis nauis et onerum coniunctim. Hanc ob rem onera vehenda in duas partes aequales distribui conuenit, atque ambas semisses per ambo nauis latera aequaliter disponi. Neque vero aliae rationes huic onerandi modo aduersantur, quin potius omnes eundem requirunt. Atque hinc vitium merito censetur, si ob inaequalitatem ponderis laterum nauis amborum haec lex in oneratione obseruari non potest.

§. 114. Contemplemur nunc ipsam istius rectae verticalis, quae per centrum magnitudinis partis submersae est ducta, positionem; ac primo quidem ponamus proram puppi omnino similem esse et aequalem, ita vt etiam sectio amplissima nauem in duas partes similes et aequales diuidat. Manifestum igitur est rectam illam verticalem hoc casu per medium plani diametralis esse transituram, atque in interfectione huius plani cum sectione amplissima fore sitam. Hanc ob rem tam ipsius nauis vacuae quam onustae centrum grauitatis in eadem recta debet esse positum. Quod quidem ad centrum grauitatis ipsius nauis attinet, id sponte in hanc rectam cadet, si quidem porra
et

et puppis simili modo fuerint constructae, quae conditio ob harum partium similitudinem externam facile obtinetur.

§. 115. Cum igitur hoc casu naus ex quatuor partibus aequalibus et similibus constet, in quas cum a plano verticali diametrali tum a sectione amplissima dissecitur, onera quoque per has quatuor partes aequaliter distribui oportebit. Interim tamen, si quae rationes postulent, vt in puppim maior minorue onerum copia collocetur, quam in proram; etiam huic conditioni facillime satis fieri potest. Quo enim plura pauciorae onera puppi debent imponi quam prorae, eo vel propius vel longius a sectione amplissima debent collocari; vt, etiamsi onerum copia proram et puppim occupantium sit inaequalis, tamen eorum centrum grauitatis in rectam verticalem per medium naus transeuntem cadat. Huicque conditioni, innumerabilibus modis satis fieri potest, ita vt insuper plures aliae conditiones, quas firmitas aliaeque circumstantiae requirerent, per onerationem, hac conditione non laesa seruari queant.

§. 116. Hypothesis haec, qua proram et puppim inter se aequales et similes posuimus, latissime patet, ac non solum ad omnes decem nauium species in superiore capite recensitas extenditur, sed etiam eiusmodi figuras, quae ad illas species reuocari nequeunt, sub se complectitur. Quaecunque enim figura prorae detur, si eadem ipsa figura etiam puppi tribuatur, oriatur figura naus sub ista hypothesis comprehensa; in qua centrum magnitudinis partis submersae in recta verticali per medium naus ducta situm erit. Quamobrem modus, quem tum in constru-

ctione tum in oneratione istiusmodi nauium tenere oportet, diligenter est notandus, quo, quantum ab eo recedi debeat, si nauis figura fuerit diuersa, facilius intelligi queat. Manifestum enim est, quo magis figura nauis ab ista hypotheli discrepet, eo magis ab exposita cum constructionis tum onerationis ratione esse discedendum.

§. 117. In quacunque autem recta verticali centrum magnitudinis partis submersae situm esse reperiatur non solum oneratio sed etiam constructio nauium maxime manet indeterminata. Cum enim, quantum quidem ad praesens institutum attinet, id tantum efficiendum fit, vt centrum grauitatis totius nauis et onerum in eandem rectam verticalem cadat; momenta ponderum omnium respectu huius rectae quaquaerius aequalia esse debent. Neque vero hac aequalitate quicquam aliud determinatur, praeter aequalitatem productorum ex singulis ponderibus in distantias a duabus rectis horizontalibus per rectam illam verticalem ductis; prouti ex statica satis constat: cui quidem requisito innumerabilibus modis satisfieri potest. Haec vero ideo monenda sunt, ne regulae, quae infra circa onerationem occurrent, superfluae videantur, sed iam ante intelligatur per onerationem pluribus conditionibus satisfieri posse.

§. 118. Infinita multiplicitas onerandi modorum, quibus idem scopus, incidentia scilicet centri grauitatis in datam lineam verticalem, obtinetur, adhuc clarius percipietur, si consideremus duo tantum pondera infinitis modis ita disponi posse, vt eorum centrum grauitatis locum non mutet: ac si tria fuerint pondera, numerus modorum ea collocandi fit denuo infinities maior, hocque pacto multipli-

plicitas creſcit , quo numerus ponderum fit maior. Cum igitur haec ſtupenda varietas ex dato centro grauitatis fit orta , perſpicuum eſt eam denuo in infinitum augeri ſi ponderum imponendorum non ipſum centrum grauitatis , ſed tantum linea recta , in quam id cadere debet , praefcribatur. Hicque caſus ad noſtrum praefens inſtitutum eſt accommodatus , quo ad ſitum aequilibrii producendum ſufficit , ſi centrum grauitatis totius nauis onuſtae in datam rectam verticalem incidat.

§. 119. Ob hanc incomprehenſibilem multipliciſſimam operationis facillime ſitus aequilibrii erectus obtineri poterit. Non enim ad operationem perficiendam tam ad poſitionem rectae illius verticalis quam ad ipſum ſitum erectum erit reſpiciendum. Quamuis enim incognita ſit rectae illius poſitio , tamen onera ita poterunt diſponi , vt nauis ſitum erectum accipiat. Ac ſi eueniat , vt poſt operationem quaeſiam nauis pars nimis immergatur , medela in promptu erit , vel oneribus illi parti impoſitis diminuen- dis , vel propius verſus medium nauis admouendis , quorum vtroque modo eorum momentum diminuitur. Neque vero in hoc negotio ad minutias erit reſpiciendum , cum nauis in ſitu aequilibrii firmitatem habere debeat , qua fit , vt , etiam ſi centrum grauitatis omnium onerum parumper immutetur , tamen inde minima inclinatio a ſitu erecto oriri debeat.

§. 120. Quoniam autem hoc non obſtante accuratam cognitionem poſitionis rectae illius verticalis , in qua centrum magnitudinis partis ſubmerſae eſt ſitum , habere conuenit , cum ea non ſolum ad conſtructionem nauiam ſed etiam ad diiudicationem ſit neceſſaria , conſideremus

Tab. V.
fig. 1.

nauem, in qua prora quantumvis dissimilis sit puppi: casus enim, quo hae ambae partes inter se sunt similes et aequales, nihil habet difficultatis, et iam est satis euolutus. Repraesentet igitur figura α $AHE\beta$ planum diametrale eiu modi nauis, quod cum situs adest erectus, non solum verticale esse debet, sed etiam necesse est, ut lineae AB , ab quae sectiones horizontales dictas repraesentant, secundam horizontem sint dispositae. Sitque ab sectio aquae, ad quam recipiendam nauis etiam nunc vacua debet esse accommodata; atque AB sectio aquae nauis onustae respondens.

§. 121. Consideremus primo nauem vacuum, ac cum ea aquae immissa sectio aquae debeat esse ab , erit $aHEb$ pars aquae immerfa cuius volumen proportionale erit ponderi nauis: seu posito hoc volumine $= V$, pondus nauis aequale erit ponderi molis aquae volumen V habentis. Sit porro fb recta verticalis, in qua centrum grauitatis istius voluminis V est situm; in eandem ergo rectam verticalem centrum grauitatis nauis vacuae incidere debet. Ponamus autem nauem iam vtrinque aequaliter esse fabricatam, ita ut eius centrum grauitatis in ipsa plano diametrali sit positum, atque in id tantum inquiramus, per quod centrum grauitatis in ipsam erectam fb constituatur. Ponamus igitur pondus partis nauis, quae ante rectam fb ad proram vsque extenditur, esse $= M$, reliquae vere portionis post rectam fb ad puppim vsque extantis pondus esse $= N$; ita ut $M + N$ praebeat pondus totius nauis volumini partis submersae V proportionale.

§. 122. Diuisio nauis in duas has partes aptissime fieri concipitur per sectionem transuersalem ad rectam ab
in

in puncto γ normalem, quae partem anteriorem a posteriore discernet. Sit nunc partis anterioris α $A b f$ centrum grauitatis in recta verticali $R M r$; partis autem posterioris β $E b f$ centrum grauitatis in recta verticali $S N s$ positum. Cum igitur commune centrum grauitatis ambarum partium in rectam $f b$ cadere debeat, oportebit e \ddot{e} $M. Mg = N.Ng$. Si ergo hae duae partes pondere fuerint aequales, necesse est vt etiam interualla Mg et Ng sint aequalia. At si pondera M et N fuerint inaequalia, tum interualla Mg et Ng eorum rationem inuersam tenere debebunt. Ex quibus perspicitur ad constructionem nauium positionem rectae $f b$ omnino debere esse cognitam, ad eamque constructionem dirigi oportere.

§. 123. Non exiguum ad hoc negotium afferetur ad iumentum, si nauis per sectionem aquae ab fitui erecto nauis vacuae competentem in partem superiorem extra aquam eminentem, et partem inferiorem sub aqua versantem diuisa concipiatur: si enim pars inferior ex vniformi materia constaret, tum eius centrum grauitatis sponte in rectam $f b$ caderet. Tametsi autem ista pars caua esse soleat, tamen non difficulter aberratio eius centri grauitatis ab hac recta $f b$ aestimabitur: sufficit enim in hoc negotio ad veritatem proxime aestimando accedere, neque opus est geometrico rigore; cum per firmitatem nauis inducendam omnibus huiusmodi erroribus occurrere debeat. Cum autem partis inferioris centrum grauitatis fuerit definitum, facile regulae pro construenda superiori parte formabuntur, vt commune grauitatis centrum in praescriptam rectam $f b$ incidat.

§. 124. Cum igitur naus vel iam ita erit constructa, vt vacua situm erectum in aqua obtineat, vel error non nimis magnus, qui forte fit commissus, oneribus quibusdam rite collocatis, erit sublatus, efficiendum insuper erit, vt naus onusta situm teneat erectum: ad quod obtinendum cum formae naus tum etiam onerationis rationem haberi oportet. Practice quidem naus ad istum situm erectum non difficulter instruetur: si enim recta AB repraesentet sectionem aquae situi erecto naus onustae convenientem; primo tanta onerum copia imponenda erit, vt volumen $AHEB$ in aquam imprimatur; deinde onera ita disponi oportet, vt haec ipsa assignata pars in aquam ingrediatur. Hocque negotium eo promptius perficietur si impositio onerum ita dirigatur, vt perpetuo sectio aquae parallela maneat sectioni ab , hocque modo pergatur donec AB superficiem aquae contingat.

§. 125. Vt autem inuestigemus, quo pacto tum constructio tum oneratio comparata esse debeat, ad istum scopum attingendum; ponamus superficiem sectionis aquae ab esse $= E$; ac cum sectio aquae AB pro naue onusta illi debeat esse parallela, sit distantia harum sectionum $Cc = b$. erit volumen denouo per onera submergendum proxime $= Eb$; si quidem amplitudo naus per spatium Cc fuerit fere eadem. At si superficies sectionis AB multum differat a sectione $ab = E$, ponatur sectio $AB = F$; ac volumen inter has sectiones contentum propius erit $= \frac{Cc(E + \sqrt{EF} + F)}{3}$; considerata hac portione, vti sine notabili errore fieri potest, instar coni truncati. Ex hoc itaque volumine cognoscetur quantitas onerum imponendorum;

dorum; ex qua iusta naus oneratio oritur, simulque pondus naus onustae innotescit.

§. 126. Ponatur volumen huius portionis naus inter sectiones horizontales AB et *ab* contentae = U; atque cum pondus naus nondum onustae effet = M + N, volumenque partis submersae naui vacuae respondentis = V; prodibit quantitas iustae onerum imponendorum copiae = ponderi $\frac{U(M+N)}{V}$. Quoniam autem ante omnia requiritur, vt naus onustae centrum grauitatis in ipsum planum diametrale incidat, ista onerum copia per cauitatem naus ita disponi debet, vt eorum commune grauitatis centrum in hoc planum cadat. Huic quidem requisito facile satisfit, disponenda vtraque onerum medietate per ambo latera naus aequaliter. Quo facto simul vtriusque onerum portionis cum parti anteriori $\alpha A bf$ tum posteriori $\beta E bf$ impositae centrum grauitatis in planum diametrale collocabitur.

§. 127. Quia vero in oneratione ad centrum magnitudinis totius partis submersae AHEB est respiciendum, portionis autem $\alpha H E b$ centrum magnitudinis in rectam verticalem *bf* cadit, verticalem illam definiri oportet, in qua centrum magnitudinis partis submersae AHEB erit positum. Hanc in finem ponamus portionis $A ab B$ centrum magnitudinis versari in recta verticali *Cc*, quae versus proram distita sit a recta *fb* interuallo $Cg = c\gamma$. Hoc posito centrum magnitudinis partis submersae AHB, quae naui onustae competit, in rectam quandam FH mediam inter *Cc* et *fb* cadet. Atque ex natura centri grauitatis erit $V. Gg = U. GC.$ seu $V. Cg - V. CG = U. GC,$ ex quo fit $CG = \frac{V.Cg}{V+U}$ atque $Gg = \frac{U.Cg}{V+U}$. Hinc itaque practi-

practice satis commode positio rectae FH determinabitur, cuius cognitio ad vniuersam nauium doctrinam summe est necessaria.

§. 128. Retineamus nauis diuisionem ante factam in partem anteriorem $\alpha A bf$ et posteriorem $\beta E bf$, discrimine posito in sectione transuersali per verticalem fb facta: sitque onerum parti anteriori impositorum pondus $= P$, eorumque centrum grauitatis commune in recta verticali IPt . Simili modo sit pondus onerum parti posteriori imponendorum $= Q$, quorum commune centrum grauitatis existat in recta verticali VQv . Cum autem omnium onerum pondus aequale esse debeat ponderi $\frac{U(M+N)}{v}$, habebitur haec aequatio $P + Q = \frac{U(M+N)}{v}$: ex qua summa onerum $P + Q$ determinatur, distributio autem in partes P et Q etiamnum arbitrio relinquitur. Quia ergo totius nauis pondus erit $= M + N + P + Q$, fiet id $= \frac{(v+U)(M+N)}{v}$.

§. 129. Cum igitur ad aequilibrium huius situs erecti requiratur, vt totius nauis centrum grauitatis in rectam FH incidat, momenta respectu huius rectae cum ipsius nauis tum onerum sequentem suppeditant aequationem $M. MG + P. PG = N. NG + Q. QG$. At supra ob situm erectum nauis vacuae esse debebat $M. Mg = N. Ng$. seu $M. MG + M. Gg = N. NG - N. Gg$. Cum igitur sit $Gg = \frac{U.Cg}{v+U}$ erit $N. NG = M. MG + \frac{U(M+N).Cg}{v+U}$: quae aequatio in superiorem introducta dabit $P. PG = Q. QG + \frac{U(M+N).Cg}{v+U}$ siue $P. PG - Q. QG = \frac{v(P+Q).Cg}{v+U}$. vnde oritur $P = \frac{U(M+N).QG}{v.PQ} + \frac{U(M+N).Cg}{(v+U)PQ}$ atque $Q = \frac{U(M+N).PG}{v.PQ} - \frac{U(M+N).Cg}{(v+U)PQ}$.

§. 130.

§. 130. Formulae istae atque hinc totius onerationis idea multo fiunt simpliciores, si recta verticalis Cc in ipsam fb incidat. Tum enim ob $Cg = 0$, tota onerationis ratio reducetur ad has duas aequationes $P = \frac{U(M+N)QG}{V.PQ}$ et $Q = \frac{U(M+N)PG}{V.PQ}$. Casus hic quidem in infinitis nauium figuris locum inuenit; at si idem in omnes sectiones aquae medias inter AB et ab aequae competat, tum id aliter euenire nequit, nisi vnus cuiusque sectionis horizontalis intra sectiones AB et ab contentae centrum grauitatis in rectam verticalem fb incidat. Quodsi autem omnes omnino sectiones horizontales ita formentur, vt singulae habeant suum centrum grauitatis in eadem recta verticali situm, tum simul in quocunq; situ erecto centrum magnitudinis partis submersae in eandem rectam cadet.

§. 131. Praeterquam autem quod eiusmodi nauis figura iudicium facilius reddat; aliae proprietates, quibus quamque nauem praeditam esse oportet, eandem conditionem requirunt. Ex superiori enim libro intelligitur, atque in sequentibus fusius exponetur, motum reciprocum nauium esse maxime tranquillum, ac succussionibus minime obnoxium, si centrum grauitatis sectionis aquae in eandem rectam verticalem cadat, in qua cum centrum grauitatis totius nauis tum centrum magnitudinis partis submersae sunt sita. Quare cum quaelibet sectio horizontalis diuersis onerationibus vicem sectionis aquae sustinere queat, necesse est vt omnes sectiones horizontales sua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant disposita.

§. 132. Quanquam autem ista ratio ad eas tantum sectiones horizontales, quae intra sectiones AB et ab continentur, proprie pertinet, quippe quae solae vicem sectionis

nis aquae sustinere solent, tamen commode eadem proprietas omnibus prorsus sectionibus horizontalibus tribuitur. Si enim diuersae sectiones horizontales sua centra grauitatis in diuersis rectis verticalibus haberent disposita, ita vt modo propius ad proram modo propius ad puppim caderent, figura nauis prodiret perquam irregularis; eo quod aliae sectiones horizontales ampliores forent in parte anteriore aliae in posteriore, id quod naues vehementer deformaret. Ad hoc accedit, quod, cum haec proprietas per spatium *Cc* adesse debent, eadem sine laesione continuitatis reliquis sectionibus horizontalibus denegari nequeat.

§. 133. Has igitur ob causas tanquam vnam ex principalibus regulis figuram nauium spectantibus stabilimus, per quam omnes naues ita conformatas esse oportet; vt singulae sectiones horizontales suum grauitatis centrum in eadem recta verticali habeant positum. Quae conditio tam etsi figuram nauium non determinat, tamen iam innumerales figuras excludit et tanquam ineptas reiicit, ex quo determinatio figurae perfectissimae eo facilius redditur, quo magis numerus figurarum, ex quibus electio est facienda, restringitur. Ad hanc itaque normam conueniet decem supra constitutas nauium species examinari, ac singulas species ita instrui, vt ista proprietas in eas cadat. Quod cum euoluemus, commode euenire deprehendemus, istam proprietatem aliquibus speciebus iam esse propriam, reliquas autem noua determinatione indigere. Quamobrem institutum hoc sequentes singulas memoratas decem species percurreremus, iisque insignem hanc proprietatem inducemus.

§. 134. Quoniam prima nauium species alias figuras sub se non complectitur, nisi quarum carinae sunt parallelepipedae

pipeda rectangula , omnes sectiones horizontales erunt parallelogramma rectangula inter se aequalia ; earumque adeo centra grauitatis in eandem rectam verticalem incident. Quare si per centrum grauitatis sectionis aquae ducta concipiatur recta verticalis , ea simul per vnus cuiusque sectionis parallelae centrum grauitatis transibit. Omnes igitur nauium figurae ad primam istam speciem pertinentes ista proprietate , qua singulae sectiones horizontales sua grauitatis centra in eadem recta verticali posita habere debent , iam sponte sunt praeditae , neque ad hunc finem vlla noua determinatione aut restrictione habent opus : vnde perspicuum est Arcam Noae ad tranquillam innatationem apprise fuisse accommodatam.

§. 135. Simili praerogatiua gaudent omnes figurae ad speciem secundam relatae , in quibus pariter omnes sectiones horizontales non solum similes sed etiam aequales constituuntur. Sit enim huiusmodi figurae sectio aquae **AEBF** , diametro **ACB** praedita ; atque ipsa carina formabitur , dum ista sectio aquae motu sibi parallelo secundum directionem verticalium **Aa Bb** promoueri concipitur. Ex qua formatione manifestum est , si sectionis aquae centrum grauitatis sit in **G** , vnus cuiusque sectionis ipsi parallelae centrum grauitatis verticaliter sub puncto **G** fore positum ; ideoque omnium sectionum horizontalium centra grauitatis in recta verticali **Gg** fore posita. In eadem ergo recta **Gg** situm erit centrum magnitudinis carinae totius , idque in eius puncto medio **O** , atque in eandem incidere oportet centrum grauitatis totius nauis. Nullam igitur nouam restrictionem hoc requisitum figuris

Tab. V.
fig. 2.

secundae speciei infert, sed omnes eadem proprietate iam sponte sunt praeditae.

§. 136. Quia in praecedente capite hanc speciem leviter tantum attigimus, eo quod eius proprietates facillime percipiuntur, hic in transitu eius praecipuas proprietates notasse conveniet. Ac primo quidem manifestum est sectionem amplissimam EF esse parallelogrammum rectangulum altitudinem habens CD altitudini carinae aequalem, latitudinem vero EF aequari maximae latitudini sectionis aquae. Porro omnes sectiones verticales huic sectioni amplissimae erunt pariter parallelogramma eiusdem altitudinis $Pp = CD$; sed earum latitudines QQ respondent latitudinibus sectionis aquae. Deinde tam planum diametrale AB quam sectiones ipsi parallelae omnes erunt pariter parallelogramma, quorum omnium eadem communis est altitudo CD : latitudines vero ex data sectionis aquae figura determinantur.

§. 137. Inquiramus nunc in locum centri grauitatis G sectionis aquae $AEBF$, vt positio rectae verticalis Gg innotescat. Sumta itaque in axe CA abscissa $CP = p$, sit applicata $PQ = q$. Capiatur versus puppim aequalis applicata $RS = q$; sitque $CP = p = P + \sqrt{Q}$, existentibus P et Q functionibus quibuscunque ipsius q , quarum altera Q non sit quadratum; erit $CR = \sqrt{Q} - P$, atque $PR = QS = 2\sqrt{Q}$; rectae igitur QS centrum grauitatis cadet in V existente $QV = SV = \sqrt{Q}$, vnde erit $TV = P$. Multiplicetur per dq , atque inuenietur $CG = \frac{p dq \sqrt{Q}}{d \sqrt{Q}}$: sumtis integralibus vt a valore $q = 0$ vsque ad valorem $q = CE = b$ pateant. Ex quo manifestum est, si sit $R = 0$ seu $TQ = TS$ tum centrum grauitatis G in ipsum punctum

punctum C incidere, ac tum rectam verticalem Gg in ipsa sectione amplissima fore positam. Contingit ergo hoc quando prora et puppis eandem habent figuram.

§. 138. Pergamus ad figuras tertiae speciei, cuiusmodi ^{Tab. VI.} figura citata repraesentat, in qua omnes sectiones trans- ^{fig. 1.}versales EDF eique parallelae sunt inter se aequales et similes. In his igitur figuris non datur sectio amplissima transuersalis, quoniam omnes sunt aequae; atque prora ac puppis terminantur figuris planis H α H et I β I sectioni cuique mediae EDF aequalibus. Cum itaque in huius speciei figuris sectio aquae sit parallelogrammum rectangulum HHII, eius centrum grauitatis situm erit in puncto medio C axis AB existente AC=BC. Quoniam porro omnes sectiones horizontales reliquae MM NN sunt pariter parallelogramma rectangula longitudinis $mn = AB$, earum omnium centra grauitatis verticaliter sub C erunt sita in punctis G; vnde vnus cuiusque sectionis horizontalis centrum grauitatis in eandem rectam verticalem CD cadet.

§. 139. Quod igitur ad hoc requisitum attinet, vi cuius omnium sectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta verticali posita esse oportet; eo tres species priores haecenus consideratae iam sua sponte sunt praeditae, neque vlla noua determinatione ad huic conditioni satisfaciendum est opus. Singulae ergo hae species sua natura aquae maxime quiete infidebunt, neque succussionibus erunt obnoxiae, sicut eiusmodi naues, in quibus centrum magnitudinis carinae extra rectam verticalem per centrum grauitatis sectionis aquae ductam cadit. Maxime autem diuersae indolis deprehendentur istae species, si cum ad fir-

mitatem, tum vero potissimum ad resistantiam atque ad propulsiōem respiciemus; vbi tam insignia incommoda se prodent, vt nulla harum specierum apta reperiatur tum ad resistantiam facillime superandam, quam ad potentias sollicitantes sustinendas.

Tab. VI. §. 140. Species quarta eiusmodi sub se comprehendit
fig. 2. figuras, in quibus omnes sectiones verticales plano diametrali ADB parallelae eidem sint similes et aequales. Huius igitur carinae latera vtrunque terminabuntur figuris planis HeI et HfI aequalibus et similibus sectioni diametrali ADB . In huiusmodi ergo figuris sectio aquae erit parallelogrammum rectangulum $HHII$, cuius adeo centrum grauitatis cadet in rectae AB punctum medium C . Concipiatur nunc sectio quaecunque horizontalis $MMNN$, quae pariter erit parallelogrammum rectangulum, cuius centrum grauitatis vt cadat in punctum G rectae verticalis CD , necesse est vt fit $Gm = Gn$: quod cum vbique esse debeat, requiritur vt recta CD sit diameter plani diagonalis ADB . Ex quo sequitur figuras quartae speciei ad hunc scopum non esse accommodatas, nisi puppis et prora figuram habeant similem atque aequalem.

§. 141. Secus itaque res se habet in hac specie quarta ac in praecedentibus, cum praecedentes sua sponte gaudeant ea proprietate, vt omnium sectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta verticali sint posita; haec vero species limitatione indigeat. Scilicet vt figurae quartae speciei ad hoc requisitum accommodentur, oportet sectionem transuersalem amplissimam $EefF$ simul carinam in duas partes similes et aequales dispescere. Ex quarta igitur specie iam omnes excluduntur figurae, in quibus
puppis

puppis et prora inter se sunt diffimiles, tanquam penitus ineptae ad naues formandas. Quo circa ex hac specie eae solae figurae nobis ad vltiorem inuestigationem supererunt, in quibus planum diametrale diametrum habet verticalem in sectione amplissima sitam.

§. 142. Ne autem in simili examine sequentium specierum tam a multiplicatione figurarum, quam earundem perplexitate impediamur, visum est relictis figuris stereometricis figuras tantum planas, eas carinae sectiones repraesentantes, adhibere, quibus ad explicationem opus habebimus. Seorsim itaque conspectui exponimus cum tres sectiones principales cuiusque carinae, tum etiam totidem sectiones illis respectiue parallelas; vnde sex exoriuntur figurae simplices, quas ad speciem quamcunque accommodare licebit. Atque hoc pacto non solum distinctius omnes partes, quas considerari oportet, oculis offeruntur sed etiam linearum sectionumque perturbatae declinationes evitantur, quibus figurae stereometricae solent esse obnoxiae.

§. 143. Cuiuscunque igitur speciei carina nobis sit ^{Tab. VII.} proposita, figura prima nobis designabit sectionem aquae, ^{fig. 1. 2. 3.} cuius diameter AB, maximaque latitudo EF: ac prora ^{4. 5. 6.} versus A puppis vero ad B sita ponitur. Figura secunda repraesentat sectionem amplissimam, ortam sectione verticali per rectam EF in sectione aquae facta. Tertia autem figura significat planum diametrale, seu sectionem verticalem per diametrum AB sectionis aquae factam. Tres hae figurae sectiones principales exhibentes ita sunt litteris notatae, vt iisdem lineis punctisque eadem litterae respondeant: ita figurae prima et secunda communem habent lineam ECF; prima vero et tertia communem habent lineam

lineam AB; ac secunda et tertia profunditatem CD habent communem.

§. 144. Vt etiam vbique easdem denominationes retineamus, maneant, vt haecenus posuimus $AC = a$; $BC = \alpha$; $EC = FC = b$, et $CD = c$. Deinde sectionis aquae natura exprimatür aequatione inter coordinatas CP et PQ, fitque constanter $CP = p$ et $PQ = q$; vnde aequationem inter p et q ita comparatam esse oportet, vt posito $p = 0$ fiat $q = b$, positoque vel $p = a$ vel $p = -\alpha$ euanescat q , si quidem sectio aquae curua continua cingatur. Pro sectione amplissima sint coordinatae $CR = r$ et $RS = s$, eademque aequatio pro vtraque semisse CDE, CDF valebit. Naturam denique plani diametralis contineat aequatio inter coordinatas $CT = t$ et $TV = u$: ac vel eadem aequatione comprehendantur ambae partes ACD, BCD vel diuersis, prouti hae partes vel continuam curuam constituent vel secus.

§. 145. Tribus hisce sectionibus principalibus consideratis, quae ad omnes species pertineant, contemblemur totidem sectiones istis parallelas; ac primo quidem figura quarta exhibeat sectionem horizontalem quamcunque, seu sectioni aquae parallelam; quae sectio secet sectionem amplissimam per rectam MTM, planum diametrale vero per rectam VTU, vti conuenientia litterarum indicat. Simili modo figura quinta repraesentet sectionem verticalem sectioni amplissimae parallelam, sectionem aquae secantem in QPQ, planum diametrale vero in PN. Denique sexta figura offert sectionem verticalem plano diametrali parallelam, quae facta est per rectam IRK in
sectio-

sectione aquae sumitam, ac per rectam RS in sectione amplissima constitutam.

§. 146. Cum igitur intelligatur, quemadmodum singulae istae figurae ad quamque carinam oblatam sint referendae, ex iisque ipsa carinae figura determinetur, ad sequentes species examinandas progrediamur. Primum autem se offert species quinta, in qua omnes sectiones horizontales cum inter se tum sectioni aquae sunt similes. Hanc obrem erit $AC : CE = TV : TM$ atque $BC : CE = UT : TM$: ex quo sequitur sectionem amplissimam in figura secunda expressam, ac planum diametrale in fig. 3. ita a se inuicem pendere, vt altera figura ex altera determinetur. Sumtis enim in CD aequalibus portionibus CT, erit $TV : AC = TM : CE$ atque etiam ex altera parte $TU : BC = TM : CF$: vnde istae figurae inter se erunt affines; dataque earum altera vna cum sectione aquae, totius carinae figura determinatur.

§. 147. Cum autem requiratur, vt omnes sectiones horizontales habeant sua grauitatis centra in eadem recta verticali posita; si sectionis aquae centrum grauitatis situm fit in G, sectionis vero ei parallalae seu figurae 4. in g, oportet vt sit $CG = Tg$, eo quod punctam C et T in eadem recta verticali sint posita. At ob similitudinem figurarum est $CG : Tg = CA : TV$: vnde duplici modo requisita proprietas obtinebitur; primo nempe, si $CA = TV$, hocque euenit, si omnes sectiones horizontales non solum inter se fuerint similes, sed etiam aequales; qui casus ad speciem secundam recidit. Altero autem modo, qui proprie ad hanc speciem spectat requisita proprietas obtinetur, si fuerit $CG = 0$. Quocirca figurae huius

Pars II.

K

quia.

quintae speciei ad scopum non erunt idoneae, nisi sectionis aquae centrum grauitatis G in ipsum punctum C , in quo sectio amplissima diametrum secat, incidat.

§. 148. Vt igitur carina ad hanc quintam speciem pertinens praedita sit requisita proprietate, eius sectionem aquae ita comparatam esse oportet, vt sit $CG = 0$, seu vt eius centrum grauitatis G in ipsum punctum C cadat; atque omnes figurae, quae hac proprietate carent, tanquam ineptae sunt reiiciendae idque eo magis, quo magis centrum grauitatis sectionis aquae G a puncto C recedit. Sed vt CG euanescat, oportet aggregatum omnium RI^2 in porra aequale esse aggregato omnium RK^2 in puppi: id quod ob tangentes in E et F ipsi AC parallelas vsu venire non potest, nisi partes EAF et EBF inter se similes sint et aequales; saltem proxime. Si enim alicubi esset $RI^2 > RK^2$, alio loco deberet esse $RI^2 < RK^2$, quae compensatio locum habere commode nequit; nisi vbique inaequalitas sit fere insensibilis.

§. 149. Si igitur ad hanc speciem instituto accommodatam efficiendam requiratur aequalitas inter sectionis aquae partes EAF et EBF , haec ipsa aequalitas post se trahet aequalitatem inter partes plani diamatralis ACD et BCD . Primo enim erit $BC = AC$; ac deinde quia portio BCD affinis est semissi sectionis amplissimae FCD , cui etiam affinis esse debet portio ACD , erit vbique $TV = TU$ ob $CE : TM = CA : TV$ et $CF : TM = BC : TU$. Hinc autem porro sequitur aequalitas inter partem carinae anteriorem et posteriorem, seu proram et puppim. Quoties vero ista aequalitas adest inter proram et puppim, tunc nauis ista proprietate perpetuo gaudet, ad quamcunque ea etiam speciem referatur; prouti supra iam notauimus.

§. 150. Quoniam autem tamen aliqua inaequalitas inter partes sectionis aquae EAF et EBF intercedere potest, dummodo hae partes ita sint comparatae, vt earum commune centrum grauitatis in punctum C cadat, videamus quanta dissimilitudo admitti possit. Ponamus igitur primum partem alteram ACEI esse parallelogrammum rectangulum, alteram vero partem CE*b* esse triangulum, ita vt AIE*b* semissem sectionis aquae repraesentet. Haec igitur figura maximam habebit dissimilitudinem partium AIEC et EC*b*, cum in nauibus neque pars AME ad rectangulum excrefcere, neque altera pars ENB vsque ad triangulum extenuari possit. Ex quo inaequalitas harum partium AICE et CE*b* terminum constituet, quem nequidem in constructione nauium attingere licebit.

Tab. VIII.
fig. 1.

§. 151. Inquiramus igitur in rationem inter longitudes AC et C*b*, quae centrum grauitatis totius figurae in punctum C inferat. Sit igitur $AC = a$; $Cb = \alpha$; et $CE = b$; ducaturque recta *mPn* parallela axi *Ab*, positoque $EP = x$ erit $Pm = a$, et $Pn = \frac{\alpha x}{b}$. Vt autem huius figurae centrum grauitatis in rectam CE incidat, oportet esse summam omnium Pn^2 aequalem summae omnium Pm^2 , seu $\int \frac{\alpha^2 x^2 dx}{b^2} = \int a^2 dx$. Hinc itaque oritur $\frac{\alpha^2 x^3}{3b^2} = a^2 x$ et facto $x = CE = b$, prodit $\alpha^2 = 3a^2$ seu $bC = AC \sqrt{3}$. Maxima ergo inaequalitas, quae inter partes axis AC et C*b* intercedere potest, minor esse semper debet, quam ratio $\sqrt{3} : 1$: tantaque inaequalitas nunquam locum habere potest.

§. 152. Quando igitur, id quod semper ob alias causas euenire debet, portio sectionis aquae altera AME in-

tra rectangulum continetur, tum altera portio, siquidem maneat triangulum, breuior erit efficienda, fietque ex hoc capite iam $Cb < AC \sqrt{3}$. Deinde cum figura altera ECB pariter esse debeat concaua versus CB, eo magis eius longitudo Cb contrahetur, ratioque inter AC et CB eo propius ad rationem aequalitatis reducetur. Atque ista inaequalitas insuper diminuetur, si curuae ENB tangens in E debet esse axi AB parallela: quae conditio in nauium constructione praecipue requiri solet.

§. 153. Examinemus ergo aliquos casus latius patentes, quibus figurae ex inaequalibus partibus constantes ad vicem sectionis aquae sustinendam aptae redduntur. Manentibus igitur vt ante $EC = b$; $CA = a$; $CB = \alpha$ sit $EP = x$; $PM = y$ et $PN = z$; ac ponamus $yy = mbx + nxx + \frac{kx^3}{b}$; et $zz = \mu bx + \nu xx + \frac{\kappa x^3}{b}$; quarum aequatio vtraque tangentem in E praebet axi AB parallelam curuamque realem, dummodo m et μ sint numeri affirmatiui. Cum autem posito $x = b$ fiat $y = a$ et $z = \alpha$, erit $a^2 = b^2 (m + n + k)$ et $\alpha^2 = b^2 (\mu + \nu + \kappa)$. Praeterea autem ob locum centri grauitatis in C praescriptum debet esse $\int yy dx = \int zz dx$ posito $x = b$, vnde consequitur ista aequatio $\frac{m}{2} + \frac{n}{3} + \frac{k}{4} = \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{3} + \frac{\kappa}{4}$.

§. 154. Deinde autem natura rei postulat, vt applicatae PM et PN, accedente P ad C continuo crescant; quamobrem differentialia dy et dz , quamdiu x intra limites 0 et b versatur affirmatiuum valorem habere debebunt. Vnde oportebit esse $mb + 2nx + \frac{3kxx}{b} > 0$ itemque $\mu b + 2\nu x + \frac{3\kappa xx}{b} > 0$. Casu ergo quo $x = b$, fiet $m + 2n + 3k > 0$ et $\mu + 2\nu + 3\kappa > 0$ nisi curua in A et B axi AB normaliter occurrat, quo casu

casu isti valores fierent $= 0$, ex quo id saltem requiritur, vt nec $m + 2n + 3k$ nec $\mu + 2\nu + 3\kappa$ fiant numeri negatiui. At sumto $x < b$, omnino habere debent quantitates illae valores affirmatiuos, vnde posito $x = \frac{1}{2}b$, vti- que debet esse $m + n + \frac{3k}{4} > 0$ et $\mu + \nu + \frac{3\kappa}{4} > 0$.

§. 155. Quia porro necesse est, vt ambae curuae AME et ENB vbique sint concauae versus axem AB, oportet tam ddy quam ddz negatiuos tenere valores, quamdiu saltem $x < b$: cui conditioni satisfit si fuerit $m^2 > \frac{6mkx^2}{b^2} + \frac{4nkx^3}{b^3} + \frac{3k^2x^4}{b^4}$ et $\mu^2 > \frac{6\mu\kappa x^2}{b^2} + \frac{4\nu\kappa x^3}{b^3} + \frac{3\kappa^2 x^4}{b^4}$. Ergo si $x = b$, debet esse $m^2 > 6mk + 4nk + 3kk$, et $\mu^2 > 6\mu\kappa + 4\nu\kappa + 3\kappa\kappa$. Atque posito $x = \frac{1}{2}b$, multo magis esse oportebit $m^2 > \frac{3mk}{2} + \frac{n\kappa}{2} + \frac{3k^2}{16}$ atque $\mu^2 > \frac{3\mu\kappa}{2} + \frac{\nu\kappa}{2} + \frac{3\kappa^2}{16}$.

§. 156. Vt his conditionibus satisfiat ponamus p, r, ϱ denotare numeros affirmatiuos; p quidem satis ingentem, at r et ϱ eiusmodi, vt etiam euanescere possint. Sitque $\frac{m}{2} + \frac{n}{3} + \frac{k}{4} = \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{3} + \frac{\kappa}{4} = p$; reperieturque $n = \frac{12p - 5m - r}{3}$; $\nu = \frac{12p - 5\mu - \rho}{3}$; $k = \frac{2r - 12p + 4m}{3}$ et $\kappa = \frac{2\rho - 12p + 4\mu}{3}$. Reliquae vero conditiones implebuntur, sumendo $m < 8p - 4\sqrt{pp + \frac{1}{2}pr}$ et $\mu < 8p - 4\sqrt{p^2 + \frac{1}{2}p\varrho}$ ad quod vterius opus est, vt fit $r < 6p$ et $\varrho < 6p$. Sit $r = 6p - 2s$; $\varrho = 6p - 2\sigma$; debet esse $m < 8p - 4\sqrt{pp - ps}$ et $\mu < 8p - 4\sqrt{p^2 - p\sigma}$ $n = 3p + s - \frac{5m}{2}$; $\nu = 3p + \sigma - \frac{5\mu}{2}$; $k = \frac{4m - 4s}{3}$; $\kappa = \frac{4\mu - 4\sigma}{3}$.

§. 157. His valoribus introductis reperietur $a^2 = b^2 (3p - \frac{m}{6} - \frac{s}{3})$ et $\alpha^2 = b^2 (3p - \frac{\mu}{6} - \frac{\sigma}{3})$ vnde se habebit $a^2 : \alpha^2 = 18p - m - 2s : 18p - \mu - 2\sigma$. Vt nunc maxima prodeat inaequalitas tribuatur ipsi s maximus, ipsi σ

autem minimus valor, faciendo $s = 3p$ et $\sigma = 0$; erit $m < 4p$ et $\mu < 0$. Fiat $m = 4p$ et $\mu = 0$, qui sunt extremi limites maximamque inaequalitatem inter a et α producent. Prohibet autem $a^2 : \alpha^2 = 8 : 18 = 4 : 9$; vnde maxima inaequalitas inter a et α erit, si $a : \alpha = 2 : 3$, neque maior imo nequidem tanta inaequalitas locum habere potest, nisi figurae omnino ineptae admittantur.

§. 158. Ponamus ad casus reales eruendos $s = 3p - \eta p$ et $\sigma = \theta p$, denotantibus η et θ numeros affirmatiuos quidem sed valde paruos: cum sit $m < 8p - 4p\sqrt{1 + \eta}$ seu $m < 4p - 2\eta p + \frac{\eta^2 p}{2}$ ponatur propterea $m = 4p - 2\eta p$: quia deinde est $\mu < 8p - 4p\sqrt{4 - \theta}$ seu $\mu < \theta p + \frac{\theta^2 p}{16}$, ponatur ergo $\mu = \theta p$. Hinc erit $n = -4(1 - \eta)p$; $v = 3p - \frac{3\theta p}{2}$; $k = \frac{4p(1 - \eta)}{3}$, $\kappa = 0$. ex quibus valoribus nascuntur hae aequationes $yy = 2p(2 - \eta)bx - 4(1 - \eta)pxx + \frac{4p(1 - \eta)}{3b}x^3$; et $zz = \theta p bx + \frac{3p(2 - \theta)}{2}xx$ atque $a^2 = \frac{2pb^2}{3}(2 + \eta)$ et $\alpha^2 = \frac{pb^2(6 - \theta)}{2}$ vnde $a^2 : \alpha^2 = 8 + 4\eta : 18 - 3\theta$.

§. 159. Quando igitur aliae circumstantiae sectionem aquae postulabunt, quae ex duabus partibus disparibus EAF et EBF constet, nisi disparitas sit nimis magna, haec species quinta figuras idoneas suppeditare poterit. Inuenta autem figura idonea, quae centrum grauitatis situm habeat in C tota carinae figura non difficulter describetur. Sumta enim pro lubitu sectione amplissima EDF; planum diametrale ADB ita erit formandum, vt partes ACD et BCD sint figurae affines tum inter se, tum semissi sectionis aquae CDE, ad eandem altitudinem CD relatae: quo facto superest, vt omnes sectiones horizontales inter se similes conficiantur.

§. 160.

§. 160, Contemplemur nunc speciem sextam in qua omnes sectiones verticales sectioni ampliffimae parallelae eidem sint similes. Sit igitur sectio quaecunque transuersalis QNQ per ordinatam QQ sectionis aquae facta, quae cum sit similis sectioni ampliffimae EDF, erit $CE : CD = PQ : PN$; ex qua analogia perspicuum est figuram plani diametralis (vid. fig. 3) affinem esse semissi sectionis aquae AEB. Ita si fuerit in vtraque figura $CP = p$, et $PQ = q$, erit $PN = \frac{cq}{b}$. Data ergo sectione aquae vna cum carinae profunditate $CD = c$, simul determinabitur figura plani diametralis, ac si praeterea detur figura sectionis ampliffimae EDF totius carinae figura definita erit, eo quod omnes sectiones transuersales sectioni ampliffimae parallelae eidem sint similes.

Tab. VII.
fig. 1. 2. 3.
4. 5. 6.

§. 161. ponatur in sectione ampliffima abscissa CR $= r$ et applicata RS $= s$, dataque erit aequatio inter r et s , ex qua vel s per r vel r per s definiri poterit. Quare si in sectione transuersali QNQ capiatur $Pr = \frac{qr}{b}$, erit $rs = \frac{qs}{b}$. Concipiatur nunc per punctum s facta sectio horizontalis VMU, in qua punctum q congruat cum puncto s erit $pq = Pr = \frac{qr}{b}$; $Tp = CP = p$; et $TC = rs = \frac{qs}{b}$; quae recta CT denotabit profunditatem huius sectionis horizontalis sub sectione aquae. Cum igitur per totam hanc sectionem horizontalem CT eandem seruet quantitatem, ponatur $CT = \frac{qs}{b} = b$ abscissa $Tp = x$, applicata $pq = y$; erit $x = p$, $y = \frac{qr}{b}$, atque $\frac{qs}{b} = b$. Quare cum detur q per $p = x$ erit q functio ipsius x , vnde oritur $r = \frac{by}{q}$, et quia s datur per r habebitur s per x et y , ex quo aequatio $\frac{qs}{b} = b$ exprimet naturam sectionis horizontalis in fig. 4.

§. 162.

§. 162. Cum igitur ex datis aequationibus pro sectione aquae et sectione amplissima detur aequatio inter x et y , qua natura sectionis horizontalis cuiusque exprimitur; hanc aequationem ita comparatam esse oportet, vt praebeat huius sectionis centrum grauitatis in puncto g . quod tantum distet a puncto medio T , quantum est interuallum CG , centri grauitatis sectionis aquae G a puncto C . Quoniam autem natura huius sectionis horizontalis non a sola sectione aquae pendet, sed insuper a sectione amplissima, difficillimum est calculum ita instituere, vt isti requisito satisfiat: curuae enim istae sectionum horizontalium admodum inter se fiunt dissimiles, ex quo vnus cuiusque centrum grauitatis non sine summa molestia definiiri potest. Quodsi autem pro sectione amplissima curua definita accipiatur, tum duae tantum supererunt variables, quibus calculus facilius absolui poterit.

§. 163. Sin autem id tantum requiratur, vnde praefens regula nata est, scilicet vt centrum grauitatis sectionis aquae G perpendiculariter immineat centro magnitudinis carinae, huic conditioni per solam aquae sectionem satisfieri poterit, neque figura sectionis amplissimae in considerationem venit. Cum enim sectio QNQ similis sit sectioni amplissimae EDF areae tenebunt rationem duplicatam laterum homologorum PQ . Quare si G fuerit centrum grauitatis sectionis aquae, summa momentorum omnium PQ^2 respectu G versus partem anteriorem aequalis esse debet summae similium momentorum in parte posteriore inter G et C sumtorum, ex qua conditione, figurae idoneae pro sectione aquae determinari debent.

§. 164.

§. 164. Haec ergo conditio, qua centrum grauitatis sectionis aquae et centrum magnitudinis partis submerfae in eandem rectam verticalem incidere debent, huc recidit, vt cum ipsa sectio aquae tum solidum rotundum genitum rotatione sectionis aquae circa axem AB commune habeant centrum grauitatis. Atque ex hac proprietate figurae idoneae ab ineptis, quae vicem sectionis aquae sustinere quaeant, discernuntur; ac quomodo figurae ad sextam speciem pertinentes ad vsum sint accomodandae intelligitur. Primo quidem aequalitas partium EAF et EBF sponte se offert, quae autem non solum huius speciei, sed omnium figuras isti requisito aptas reddit; quare quanta inaequalitas istarum partium pro hac specie admitti queat, videamus.

§. 165. Ponamus iterum, vt quasi vltimum inaequalitatis terminum definiamus, sectionis aquae alteram partem esse parallelogrammum rectangulum CAIE, alteram vero triangulum ECb; quaeramusque rationem inter $AC = a$ et $bC = \alpha$, vt tam figurae planae AIEb, si eadem simul ad alteram partem axis Ab constituta concipiatur, quam solidi conuersione huius figurae circa axem Ab geniti centrum grauitatis in idem punctum G incidat. Sit $AI = CE = b$, erit area rectanguli $CI = ab$, trianguli $CEb = \frac{\alpha b}{2}$; vnde ex natura centri grauitatis habebitur $AG \cdot b \left(a + \frac{\alpha}{2}\right) = ab \cdot \frac{a}{2} + \frac{\alpha b}{2} \left(a + \frac{\alpha}{2}\right)$, siue

$$AG = \frac{\frac{aa}{2} + \frac{a\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}}{a + \frac{\alpha}{2}} = \frac{3a^2 + a\alpha + \alpha^2}{6a + 3\alpha} = \frac{a}{2} + \frac{\alpha}{4} +$$

Tab. VII
fig. 1.

$\frac{\alpha^2}{12 + \alpha}$. quae aequatio locum centri grauitatis ipsius sectionis aquae indicat.

§. 166. Solidum autem rotundum, quod generatur conuerfione figurae AIE*b* circa axem *Ab* conftabit ex cylindro, cuius volumen erit = ab^2 neglecto coefficiente a quadratura circuli pendente: atque ex cono cuius foliditas est = $\frac{ob^2}{3}$. Huius igitur corporis compositi centrum grauitatis cadet in punctum G, ita collocatum vt fit AG. $b^2(a + \frac{\alpha}{3}) = ab^2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{ab^2}{3}(a + \frac{\alpha}{3})$ vnde fit AG = $\frac{\frac{\alpha^2}{2} + \frac{a\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{12}}{a + \frac{\alpha}{3}} = \frac{a}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{12(3a + \alpha)}$. Quodfi igitur iste

valor ipfius AG praecedenti aequalis ponatur, prodibit ifta aequatio: $\frac{a}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{12(2a + \alpha)} = \frac{a}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{12(3a + \alpha)}$ quae reducta dat vel $\alpha = 0$, vel $\alpha^2 + 6a\alpha + 6a^2 = 0$. quarum neutra figuram realem exhibet.

§. 167. Cum igitur nulla detur figura ex parallelogrammo rectangulo et triangulo composita, quae pro fpecie fexta vicem gerere queat fectionis aquae; intelligitur fumme difficile esse eiusmodi definire figuras, quae memorata proprietate gaudeant, quaeque fimul ex duabus partibus diffimilibus fint compositae. Quare cum ifti conditioni, qua tantum centrum magnitudinis partis fubmerfae ac centrum grauitatis fectionis aquae in eadem recta verticali pofita esse debent, tam difficulter fatisfiat, nifi puppis fimilis fit prorae, multo difficiliter erit eiusmodi assignare figuras, quarum omnes fectiones horizontales fua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant pofita, quae conditio non minus est neceffaria quam altera cum non femper eadem fectio horizontalis in fuperficie aquae verfetur.

Tab. VII.
fig. 1. 2. 3.
4. 5. 6.

§. 168. Specie fexta examinata inueftigemus quomodo fpeciei feptimae figuras comparatas esse oporteat, vt
prae-

praefcripta proprietate gaudeant. Retulimus autem ad speciem septimam eiusmodi carinas, in quibus sectiones verticales plano diametrali parallelae eidem sunt similes. Quare cum fig. 3. ipsum planum diametrale, fig. 6. vero sectionem quamcunque ipsi parallelam repraesentet, erit ob similitudinem primo $CA:CB=RI:RK$, quae analogia ad figuram primam translata indicat ambas sectionis aquae portiones EAF et EBF inter se esse affines super communi basi EF constitutas; ita ut sit $RI:RK=AC:BC=a:a$, ideoque in ratione constante. Hinc si data fuerit partis anterioris EAF centrum grauitatis in O , cadet totius sectionis aquae centrum grauitatis in punctum G , ita ut sit $CG=\frac{(a-a)}{a}CO$. quam expressionem computus centri grauitatis ad casum propositum accommodatus sponte suppeditat.

§. 169. Deinde eadem similitudo sectionum verticalium plano diametrali parallelarum praebet $CA:CD=RI:RS$, quae eadem lineae cum in figuris 1. et 2. occurrant, intelligitur sectionem amplissimam EDF pariter affinem esse alteri sectionis aquae portioni EAF vel EBF : cum enim vtrisque Basis CE sit eadem, si in ea vtrisque capiatur eadem portio CR , tenebunt applicatae RI et RS vbique eandem rationem, eam scilicet quam habet $CA=a$ ad $CD=c$. Quare si sola profunditas carinae CD fuerit data, simul tota sectio amplissima ex sectione aquae determinatur; his autem duabus sectionibus principalibus datis, si detur praeterea figura plani diametralis ADB , omnes sectiones verticales ipsi parallelae simul similes erunt conficiendae, ex quo totius carinae figura erit determinata; ac vel omnes sectiones transuersales vel horizontales definiri poterunt, ad quas constructio nauium commodissime dirigetur.

§. 170. Cum igitur ex sectione aquae et profunditate carinae detur sectio amplissima EDF, in qua erit $CE = CF = b$, $CD = c$, sumatur ea pro fundamento, quia vicissim ex ea sectio aquae definitur. Ponatur itaque abscissa $CR = r$, applicata $RS = s$, erit in ipsa sectione aquae pariter $CR = r$, at $RI = \frac{as}{c}$ et $RK = \frac{as}{c}$ ob $AC = a$ et $BC = \alpha$. Quare cum O denotet centrum gravitatis partis anterioris sectionis aquae EAF, fiet ex calculo centri gravitatis $CO = \frac{afssdr}{2cfsdr}$ integralibus ita sumtis, ut a valore $r = 0$ vsque ad $r = b$ pateant. Hinc itaque totius sectionis aquae centrum gravitatis incidet in punctum G ut fit $CG = \frac{(a-\alpha)fssdr}{2cfsdr}$ in qua expressione $\frac{fssdr}{2cfsdr}$ denotat distantiam centri gravitatis sectionis amplissimae EDF a superficie aquae EF.

§. 171. Cum igitur ante omnia requiratur ut centrum gravitatis sectionis aquae G in ipsa recta verticali per centrum gravitatis totius carinae ducta sit situm; huius rectae verticalis positionem calculo definiamus: transibit autem per rectam AB. Ad hoc fit area plani diametralis $ADB = F$, cuius, quia data ponitur, centrum gravitatis situm fit in recta verticali per punctum H transeunte: ponatur ergo $CH = f$. Quoniam vero huic figurae similis est sectio ISK erit eius area $= \frac{s^2R}{c^2}$, eiusque centrum gravitatis sub b cadet existente $Rb = \frac{s}{c}f$. Hinc summa omnium momentorum respectu EF ex sectionibus verticalibus plano diametrali parallelis ortorum erit $= \frac{Ffs^3dr}{c^3}$, volumenque totius carinae $= \frac{F}{c^2}fs^2dr$: ex quibus oritur $CG = \frac{fjs^3dr}{cjsdr}$, quoniam recta verticalis per centrum gravitatis carinae ducta rectam AB in ipso puncto G secare ponitur.

§. 172.

§. 172. Quodsi nunc has binas interualli CG expressiones inter se aequales ponamus, prodibit $\frac{(a-\alpha)jssdr}{j s dr} = \frac{fjs^3dr}{jssdr}$ seu $(a-\alpha)(fssdr)^2 = 2jfsdrj s^3dr$. Assumamus itaque pro sectione amplissima hanc aequationem generalem $r = b - \frac{ms^2}{c^2} - \frac{ns^3}{c^3} + \frac{(m+n-b)s^4}{c^4}$, quae ita est comparata vt posito $s=c$ fiat $r=0$, et $s=0$, fiat $r=b$. Praeterea, quia in sectione aquae tangens in E parallela esse debet axi AB, in sectione amplissima tangens E normalis esse debebit ad CE, cui conditioni aequatio assumpta pariter satisfacit. Erit itaque $dr = -\frac{2msds}{c^2} - \frac{3ns^2ds}{c^3} + \frac{4(m+n-b)s^3}{c^4}$, vnde integralia $fsdr$, fs^2dr et fs^3dr debito modo assumpta ita se habebunt $fsdr = c(\frac{2}{3}m + \frac{3}{4}n - \frac{4}{5}(m+n-b))$, $fs^2dr = c^2(\frac{2}{4}m + \frac{3}{5}n - \frac{4}{6}(m+n-b))$ et $fs^3dr = c^3(\frac{2}{5}m + \frac{3}{6}n - \frac{4}{7}(m+n-b))$.

§. 173. His valoribus in aequatione superiore substitutis obtinebitur $(a-\alpha)(\frac{2}{3}b - \frac{1}{6}m - \frac{1}{10}n)^2 = 2f(\frac{4}{5}b - \frac{2}{15}m - \frac{1}{10}n)(\frac{4}{7}b - \frac{6}{35}m - \frac{1}{14}n)$ ex qua aequatione cum dentur quantitates a , α et b ex sectione aquae, itemque f ex figura plani diametralis, definiri poterit alterutra quantitatum m vel n ; quo facto ob alteram etiam nunc indeterminatam innumerabiles nascentur formae sectioni amplissimae inducendae, vt proposito requisito satisfiat. Neque igitur hinc aequalitas inter a et α infertur, sed hae longitudines quantumuis inaequales assumi poterunt; quam latitudinem praecedentes carinae species non admittebant. Interim si huic conditioni est satisfactum, vt recta verticalis per centrum grauitatis carinae ducta per centrum grauitatis sectionis aquae transeat, de altera conditione, qua etiam omnium sectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta sita esse

esse debeant, non admodum erimus solliciti: cum haec proprietates in sectiones horizontales non nimis remotas proxime cadat.

§. 174. Potest etiam sectio amplissima EDF pro lubitu assumi, ex qua simul, si litteris a et α definiti valores tribuantur, sectio aquae determinabitur. Dati igitur erunt valores formularum integralium $\int s dr$, $\int s^2 dr$ et $\int s^3 dr$, ex quibus definitur $f = \frac{(a-\alpha)(\int s s dr)}{2\int s dr \cdot \int s^3 dr}$. Hinc ergo eiusmodi figura idonea pro plano diametrali ADB exquiri debebit, cuius centrum grauitatis interuallo f a recta CD versus anteriora distet, cui quidem conditioni infinitis modis satisfieri poterit. Interim tamen id est ante omnia efficiendum vt sit $CA = a$ et $CB = \alpha$; itemque applicata CD $= c$ omnium fiat maxima. Haec itaque species maxime est foecunda ad figuras carinarum, quae ex partibus dissimilibus consistunt, suppeditandas: qua fertilitate praecedentes species non gaudent. Neque etiam receptae nauium formae ab hac specie multum dissentire videntur.

§. 175. Pergamus nunc ad reliquas tres species, quae latissime patent, ac iam tractatas sub se complectuntur. Primo enim in his reliquis speciebus sectiones, quae vni principalium parallelae sunt factae, inter se non similes sed tantum affines ponuntur. Deinde ex vna sectione principali pro lubitu assumpta neutra reliquarum determinatur, sed omnes tres sectiones pro lubitu accipere licet, dummodo ista conditio obseruetur, vt lineae AC, BC sectioni aquae ac plano diametrali, lineae EF sectioni aquae et sectioni amplissimae, atque profunditates EF sectioni amplissimae et plano diametrali sint communes. Deinde etiam necesse est, vt in sectione aquae tangentes ad E et F sint

F sint axi AB, in plano diametrali vero tangens ad O pariter eidem axi AB sint parallelae. Alias conditiones ipsa praxis constructionis nauium et vsus suppeditant, quarum rerum supra iam mentio est facta.

§. 176. Consideranda itaque venit species decima, in qua omnes sectiones horizontales sectioni amplissimae sunt affines. Manentibus igitur vt haecenus $AC = a$; $BC = a$; $CE = CF = b$ et $CD = c$, datae sint pro arbitrio omnes tres sectiones principales; ac primo quidem pro sectione aquae sit abscissa $CP = p$, applicata $PQ = q$; pro sectione vero amplissima $CR = r$, $RS = s$; atque pro plano diametrali $CI = t$ et $TV = u$. Concipiatur nunc facta sectio horizontalis VMU per punctum T, quod sectioni amplissimae et plano diametrali est commune; erit igitur cum longitudo VU tum latitudo MM ex datis sectionibus principalibus definita. Fiat igitur in sectione amplissima $s = t$, exprimet r similitudinem TM sectionis horizontalis. Hanc obrem habebitur $TV = u$, et $TM = r$, atque ob $s = t$, tam u quam r per t erunt determinata.

§. 177. Ponatur nunc in hac sectione horizontali abscissa $Tp = x$, applicata $pq = y$, fiatque, vt affinitatis ratio habeatur $AC (a) : CP (p) = TV (u) : Tp (x)$ seu sumatur $x = \frac{pu}{a}$; atque erit $CE (b) : PQ (q) = TM (r) : pq (y)$ siue $y = \frac{qr}{b}$. Quoniam vero pro ista sectione horizontali VMU quantitas t manet perpetuo eadem seu constans, quantitates quoque ab ea pendentes r et u erunt constantes; quare cum q detur per p , hinc obtinebitur relatio inter x et y , qua natura huius sectionis horizontalis definietur. Sit huius sectionis horizontalis centrum

trum grauitatis in g situm, erit $Tg = \frac{fyxdx}{fydx} = \frac{ufpqdp}{ajqdp}$.
 At si ipsius sectionis aquae centrum grauitatis statuatur in G , erit $CG = \frac{fpqdp}{jqdp}$, quamobrem habebitur $CG : Tg = a : u = AC : TV$ seu $Tg = \frac{u \cdot CG}{a}$. Vt igitur vbique sit $Tg = CG$, oportet esse vel $CG = 0$, vel $u = a$ vbique, qui posterior casus huc non pertinet.

§. 178. Haec ita se habent si et altera portio MU M eandem teneat affinitatis legem respectu alterius portionis EBF sectionis aquae, quam priores portiones proram respicientes tenent, hoc est si fuerit $CA : TV = CB : TU$, qui casus obtinet, quando in plano diametrali ADB portiones ACD et BCD fuerint inter se affines. Vt igitur hoc casu singularum sectionum horizontalium centra grauitatis in eandem rectam verticalem cadant, oportet vt sectionis aquae centrum grauitatis situm sit in ipso puncto C . Quodsi autem portio CDB non debeat esse affinis portioni ACD , tum vbicumque sectionis aquae centrum grauitatis fuerit situm, ex natura centri grauitatis semper ad datum ipsius TV valorem definiiri potest quantitas TU , quo huius sectionis horizontalis centrum grauitatis perpendiculariter sub G cadat.

§. 179. Quod vt clarius perspiciatur, sit sectio aquae proposita quaecunque, quae in binas partes anteriorem EAF et posteriorem EBF sit diuisa. Sit porro partis anterioris centrum grauitatis in a posterioris in b , erit totius sectionis aquae centrum grauitatis situm in G , ita, vt sit $CG = \frac{Ca \cdot EAF - Cb \cdot EBF}{EAF + EBF}$. Simili modo si sectionis horizontalis VMU partis anterioris centrum grauitatis statuatur in v , posterioris in u , fiet $Tg = \frac{Tv \cdot MVM - Tu \cdot MUM}{MVM + MUM}$.

At

At vero est $MVM = \frac{TM \cdot TV}{CE \cdot AC} \cdot EAF$; $MUM = \frac{TM \cdot TU}{CE \cdot BC} \cdot EBF$, atque $Tv = \frac{TV}{AC} \cdot Ca$ et $Tu = \frac{TU}{BC} \cdot Cb$. Quocirca ut sit $Tg = CG$, esse debet $\frac{Ca \cdot EAF - Cb \cdot EBF}{EAF + EBF} = CG$
 $= \frac{BC^2 \cdot TV^2 \cdot Ca \cdot EAF - AC^2 \cdot TU^2 \cdot Cb \cdot EBF}{AC \cdot BC^2 \cdot TV \cdot EAF + BC \cdot AC^2 \cdot TU \cdot EBF}$, quae aequatio relationem praebet inter TV et TU, instituto idoneam.

§. 180. Sumi igitur potest curua quaecunque pro sectione aquae AEBF hacque assumta datae erunt quantitates EAF, EBF seu areae partium eius tam anterioris quam posterioris, itemque distantiae Ca et Cb, quibus determinatis habebitur aequatio inter TV et TU. Quodsi ergo pars plani diametralis altera vel anterior ACD vel posterior BCD pro lubitu formetur, exinae altera pars determinabitur, quoniam autem euenire potest ut assumpto valore TV altera linea TU fiat vel imaginaria vel negatiua vel saltem incogruae quantitatis, praestabit neutram partem plani diametralis prorsus ad arbitrium sumere, sed ope aequationis inuentae vtramque ita accommodare, ut aliis scopis maxime satisfiat. Sectio autem amplissima omnino manet indeterminata, atque hanc ob rem haec species octaua maxime apta est ad carinas nauium idoneas suppeditandas.

§. 181. Pergamus ad speciem nonam inuestigandam, in qua singulae sectiones verticales sectioni amplissimae parallelae eidem sint affines. Maneant igitur omnes tres sectiones principales datae, eademque denominationes, quas in praecedente specie adhibuimus atque concipiatur facta sectio verticalis per ordinatam QQ sectionis aquae, quae sit QNQ. In hac capiatur abscissa Pr = y, applicata rs = z; eritque ex sectionibus principalibus PQ = q, PN = t. Dabitur autem ex natura sectionis aquae q

Pars II.

M

per

per p , atque ex natura plani diametralis t per u : fumi autem debet $u = p$, et quia punctum P pro ista sectione Q N Q manet invariata, erit $CP = p = u$ quantitas constans, indeque etiam q et t . Quamobrem si fiat CD (b): CR (r) = PQ (q): Pr (y) seu $y = \frac{qr}{b}$ erit CD (c): RS (s) = PN (t): rs (z) = $\frac{ts}{c}$, unde ex aequatione inter r et s data, dabitur aequatio inter y et z , quae naturam huius sectionis exprimet.

§. 182. Quoniam ex his, nisi ad casus particulares descendere velimus, aequationes pro sectionibus horizontalibus difficulter eruuntur, multo erit difficilius rem ita expedire, vt omnes sectiones horizontales sua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant posita. Quamobrem contenti erimus figuram carinae ita adornare, vt totius centrum grauitatis perpendiculariter sub centrum grauitatis sectionis aquae G cadat. Ad hoc nosse oportet aream sectionis Q N Q, quae si area sectionis amplissimae EDF ponatur = 2 E, erit = $\frac{2qt}{bc}$ E. Nunc quia tam q quam t sunt functiones ipsius p erit $\frac{\int 2qt dp}{bc}$ E soliditas totius carinae, integrali per totam amplitudinem extenso; distantia vero centri grauitatis carinae ab axe verticali CD versus proram erit = $\frac{\int qt p dp}{\int qt dp}$, vbi integrale $\int qt p dp$ quod ex parte EBF oritur subtrahi debet, ab altero ex parte anteriori orto.

§. 183. Cum igitur ambo integralia $\int qt dp$ et $\int qt p dp$ debito modo fuerint accepta, efficiendum est, vt fiat C G = $\frac{\int qt p dp}{\int qt dp}$, ex qua aequatione functio idonea pro t substituenda debet definiri, quo facto planum diametrale quodammodo determinatur. Expediet autem pro t vel potius pro qt expressiones latius patentes assumere, vt supra fecimus

imus

mus, quae tamen figuram idoneam plano diametrali inducant, atque coefficientes ita definire vt aequationi datae fatisfiat. In integrationibus vero formularum $\int qtpdp$ et $\int qtdp$ id probe est tenendum, vt in priore valor quem puppis supeditat ab eo, qui ex prora oritur subtrahatur, in posteriore vero integratione ambo valores addantur, id quod ad calculum centri grauitatis respicienti palam est.

§. 184. Restat tandem species decima, quae vltima nobis est, in qua singulae sectiones verticales plano diametrali parallelae eidem sunt affines. Quodsi ergo in distantia $CR=r$ ab axe AB fiat huiusmodi sectio verticalis ISK . Quoniam nunc natura sectionis aquae exprimitur aequatione inter $CP=p$ et $PQ=q$, si fiat $q=r$, abibit p in RI , similique modo ex parte posteriori prodibit RK . Deinde ex sectione amplissima obtinebitur $RS=s$ per r . At in sectione, quam nunc contemplamur ISK erit $RS=s$, et $RI=p$, quae quantitates ambae dantur vel in q vel in r , ac quamdiu ista sectio ISK consideratur, manent constantes. Ponatur nunc in hac sectione $Rt=z$ et $tv=x$, quae ob affinitatem cum figura ADB ita definientur vt sit $z=\frac{ts}{c}$ et $x=\frac{up}{a}$, hincque propter datam aequationem inter t et u elicitur aequatio inter z et x , qua tum singulae sectiones plano diametrali parallelae, tum ipsa figura carinae determinabitur.

§. 185. In hac specie non solum difficile est aequationem pro quaque sectione horizontali eruere, eiusque centrum grauitatis determinare, sed etiam non tam commode totius carinae centrum grauitatis definiri potest quam in reliquis speciebus. Etiam si enim detur plani diametralis centrum grauitatis, tamen ex eo sectionum ipsi

parallelarum centrum grauitatis non innotescit. Quanquam enim alias affinitas figurarum determinationem centri grauitatis facilem reddit, tamen hic portiones proram ac puppim spectantes seorsim sunt affines, neque hic valet haec ratio $AB : VU = IK : vu$, etiamsi seorsim sit $AC : VT = IR : vt$ et $BC : UT = KR : ut$. Hanc ob rem cum calculo in hac specie nil possit commode expediri, eam tanquam minus idoneam ad praesens institutum reiciemus.

§. 186. His igitur decem euolutis carinarum speciebus, quae tam late patent, vt vix figura excogitari queat, quae non in aliqua earum comprehendatur, manifestum est, quaenam species magis sint accommodatae ad naues formandas, et quaenam minus. Hic autem potissimum respiciendum est ad eas figuras, quae inaequalitatem inter proram ac puppim admittunt; quodsi enim prora aequalis similisque fuerit puppi, tum, ad quamcunque etiam speciem figura pertineant, non solum illi satisfit requisito, quo centrum grauitatis sectionis aquae et centrum magnitudinis partis submerſae in eandem rectam verticalem cadunt, sed etiam alteri, quo postulatur, vt omnium omnino sectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta verticali sint posita. Quocirca si quae species alias figuras idoneas non suppeditet, nisi in quibus puppis pro-
rae sit similis, ea species tanquam inutilis est reicienda.

§. 187. Quoniam igitur duo stabiliuimus requisita, quorum priore tantum requiritur, vt centrum grauitatis sectionis aquae et centrum magnitudinis carinae in eadem recta verticali sit positum, posteriore vero, vt omnes sectiones horizontales sua centra grauitatis in eadem recta

ver-

verticali habeant sita : hocque posterius requisitum in se prius iam complectitur ; manifestum est eas species , quae ad posterius requisitum sunt accomodatae , iis , quae priori tantum satisficiunt , longe esse anteferendas. In quibus autem speciebus hoc nequidem obtineri potest , ut centrum grauitatis sectionis aquae in eandem rectam verticalem cadat , in quo collocatur centrum magnitudinis partis submersae , nisi prora puppi similis fiat , eae species omnino sunt reiiciendae. Tales sunt species quarta , quae absolute adhiberi nequit , nisi prora similis puppi conficiatur , ac sexta nona et decima , quae vix ad institutum accommodari possunt.

§. 188. Si requisito priore contenti esse velimus , species septima innumerabiles suppeditat figuras idoneas , uti ostendimus in eius pertractatione ; ac fortasse etiam species decima , quippe quae septimam in se complectitur , plures suppeditaret , nisi difficultas calculi obstaret. Sed quoniam posterius requisitum , quo singulae sectiones horizontales sua grauitatis centra in eadem recta verticali sita habere debent , maximis coniunctum est emolumentis in navigatione , id minime negligi potest , et hanc ob rem etiam hae species prae reliquis , quae simul hac praerogatiua gaudent , in considerationem venire non merentur. Ex quo ad naues perfecte construendas nobis tantum relinquuntur species prima , secunda , tertia , quinta et octaua , quarum postrema praecedentes in se omnes complectitur ; in omnibus enim sectiones horizontales inter se sunt vel aequales vel similes vel saltem affines.

§. 189. Cum igitur sub affinitate tam aequalitas quam similitudo contineatur , omnes naues ita comparatas esse

oportebit , vt sectiones horizontales omnes carinae saltem, partem enim navis supra aquam eminentem non consideramus , sint inter se affines. Atque si navis hac fuerit praedita , proprietatem eandem conseruabit , quaecunque sectio horizontalis vicem sectionis aquae subeat. Quae proprietas locum non habet , si sectiones verticales vel sectioni amplissimae vel plano diametrali parallelae inter se sint affines ; quodsi enim sectio aquae mutetur , ac navis vel magis vel minus immergatur , quam posuimus , tum simul affinitas harum sectionum cessabit. Quare cum eae figurae , quae omnes sectiones horizontales inter se affines habent , hanc ipsam proprietatem conseruent , quaecunque sectio horizontalis superficiem aquae occupet , istae figurae reliquis omnibus merito praeferuntur.

§. 190. Vt igitur navis iis requisitis , quae quidem hoc caput suggestit , satisfaciat , duplici modo obtineri potest : quorum primus in hoc consistit , vt carinae pars anterior parti posteriori similis sit et aequalis. Quaecunque enim prorae detur figura , siue in aliqua recensitarum decem specierum contenta siue minus , si eadem puppi tribuatur , carina ad institutum praefens erit accommodata. Namque omnes sectiones horizontales sua centra grauitatis habebunt sita in eadem recta verticali , quae cum proram a puppi tum ambo navis latera a se inuicem dispescit. Atque ad hanc nauium formam recidit tota species prima atque tertia , quippe in quibus prora et puppis sunt figurae inter se similes et aequales. Ex quo hae species non tam ideo aptae sunt censendae , quod habeant sectiones omnes horizontales inter se affines , quam quod puppim similem et aequalem prorae praebeant.

§. 191.

§. 191. Cum autem plures circumstantiae, quae infra occurrent, prohibeant, quo minus puppis prorae similis conficiatur, figurae conuenientes ex speciebus secunda, quinta et octaua sunt petendae. Species quidem secunda nulla indiget restrictione, sed omnes figurae ad eam pertinentes per se ita sunt comparatae, vt eadem recta verticalis per singularum sectionum horizontalum centra grauitatis transeat. Species autem quinta vehementer restringi debet, vt hanc proprietatem assequatur, neque enim nimium dissimiles figuras pro prora ac puppi admittit. Species vero octaua minori opera ad hoc institutum accommodari potest, quoniam tam sectionem aquae quam sectionem amplissimam pro lubitu assumere licet. Ita igitur in inuestigandis figuris idoneis nauium sumus versati, vt sufficiens rerum adhuc indeterminatarum copia supersit, quibus determinandis pluribus aliis requisitis, quae aliae considerationes suggerent, satisfieri queat.

Cap. III.

DE STABILITATE SITVS
AEQVILIBRII.

§. 192.

Quando navis ita iam fuerit constituta, vt aquae in situ erecto immiffa aequilibrium teneat, quod euenit, si centrum grauitatis totius navis et centrum magnitudinis partis submersae in eandem rectam verticalem cadant, tum insuper efficiendum est, vt iste aequilibrui situs sit stabilis, ac viribus inclinantibus resistat. Quodsi enim navis, cum parumper ex situ hoc aequilibrui declinetur, sese vel non restituat vel adeo subuertatur, ea nullo modo mari committi poterit, vbi continuo praesto sunt, vires vel venti vel ipsius maris, quae nauem de situ suo erecto declinant. Quamobrem circa constructionem nauium hoc maxime requiritur, vt situs aequilibrui, ad quem navis est apta reddita, satis ingenti praeditus sit stabilitate, cuius ope navis sine subuersionis periculo omnibus maris ac tempestatis iniuriis exponi possit. Quo enim stabilitas est maior eo minus navis a viribus vrgentibus inclinabitur, eoque minus subuersioni erit obnoxia.

§. 193 Stabilitas autem haec, qua corpus aquae in-natans in situ aequilibrui perseuerat, ortum suum trahit a viribus aquae, quibus externa carinae superficies premitur; quae vires, siquidem aequilibrium affuerit, sese destruunt, nullumque effectum ad statum mutandum exercent. At si navis ex situ aequilibrui fuerit depulsa, tum istae aquae vi-
res

res nauem extra situm aequilibrîi persistere non patientur, sed eam vel in pristinum aequilibrîi situm cogent, vel in alium. Quodsi igitur nauis ex situ aequilibrîi depulsa ab aquae viribus in eundem aequilibrîi situm restitatur, tum iste situs stabilitatem habere censetur: e contrario autem, si nauis in pristinum aequilibrîi situm non restitatur, sed in alium aequilibrîi situm compellatur, tunc ille aequilibrîi situs non stabilis seu labilis vocatur, in quo nauis, nisi summa adsit quies, permanere non potest. Datur etiam tertius casus, quo nauis ex situ aequilibrîi depulsa in eodem statu perseverat, neque restituitur neque subuertitur, cuiusmodi aequilibrîi situm indifferentem appellari conuenit.

§. 194. Ad stabilitatis quantitatem aestimandam in superiori libro nauem ex situ aequilibrîi, cuius stabilitas quaeritur, aliquantillum seu angulo infinite paruo inclinari posuimus, ac momentum virium definiuimus, quae ad restituendam nauem tendunt. Prodiit autem eiusmodi expressio, quae per angulum illum infinite paruum, quo nauem ex situ aequilibrîi inclinatam fuisse assumimus, erat multiplicata; atque hanc ob rem illam expressionem per hunc angulum diuisam elegimus ad stabilitatis quantitatem exprimendam. Quando itaque stabilitas cuiuspiam aequilibrîi situs tali expressione definitur, constabit quantum virium inclinantium momentum requiratur, ad nauem ex situ aequilibrîi ad datum angulum inclinandam. Expressio enim stabilitatis, si multiplicetur per angulum illum, ad quem inclinatio fieri debet, dabit virium momentum, quibus ista inclinatio produci potest. Quoniam autem angulum hunc infinite paruum posuimus, manifestum est angulos tantum valde exiguos assumi debere.

§. 195. Quicquid autem fit, quoniam hic non de actuali inclinatione quaestio instituitur, sed de potestate, qua navis in situ aequilibrum constituta inclinationi reluctatur; expressio descripta congrue ad stabilitatem metiendam adhibetur. Perspicuum enim est quo maior fit ista expressio, eo quoque fore maiorem stabilitatem, et quidem in eadem ratione; namque duorum aequilibrum statuum stabilitates proportionales statui convenit viribus seu potius momentis virium, quibus aequalis inclinatio produci potest. Quodsi ergo expressio stabilitatis evanescat, id indicio erit, situm aequilibrum esse indifferentem, seu ita comparatum, ut facta minima inclinatione neque restitutio neque subversio consequatur. Sin autem expressio stabilitatis fiat negativa, tum situs aequilibrum adeo erit instabilis seu labilis, atque vel minima facta inclinatione non solum non restituetur sed etiam convertetur, donec navis in alium aequilibrum situm qui stabilitate praeditus sit, fuerit reducta.

§. 196. Quoniam igitur stabilitas declarat, quantum datus aequilibrum status inclinationi resistat, inclinatio autem infinitis modis fieri potest, palam est, stabilitatem absolute definiri non posse, sed directionem secundum quam inclinatio fieri concipitur, simul in computum duci debere. Pro singulis igitur plagis, in quas inclinatio ex situ aequilibrum fieri potest, stabilitatem seorsim determinari oportet; atque ex stabilitate respectu datae plagae cognita innotescet quantum navis inclinationi secundum eam plagam resistat. Fieri enim omnino potest, ut corpus aquae innatans inclinationi versus unam plagam magis resistat, quam versus alias, atque adeo ut datus aequilibrum situs in alias plagas sit stabilis, qui respectu aliarum plagarum est instabili-

stabilis ac labilis. Sic facile perspicitur naues inclinationi versus proram seu puppim magis resistere, quam inclinationi versus latera; ex quo cuiusque nauis stabilitas respectu prorae et puppis maior erit quam stabilitas respectu laterum. Quoties igitur quaestio de stabilitate cuiuspiam aequilibrui situs inuestiganda instituitur simul plagam indicari oportet, respectu cuius stabilitas requiritur.

§. 197. Corpus autem aquae innatans de situ aequilibrui non declinatur, nisi quatenus circa axem horizontalem conuertitur. Quodsi enim corpus eiusmodi circa axem verticalem quemcunque conuertatur, neque portio aquae immersa neque situs relatiuus centrorum grauitatis ac magnitudinis immutatur; vnde tali conuersione status aequilibrui non turbatur. Contra vero corpus aquae insidens circa axem horizontalem conuerti seu inclinari nequit, quin simul status aequilibrui perturbetur. Quam ob rem idea stabilitatis penitus figetur, si simul axis ille horizontalis indicetur, circa quem inclinationes fieri concipiuntur, quibus stabilitas resistit. Vt ergo stabilitas dati aequilibrui status perfecte cognoscatur, omnes axes horizontales contemplari, et quanta sit stabilitas respectu singulorum horum axium assignari oportebit: hoc enim pacto constabit, quantum nauis cuiuscunque inclinationi circa axem horizontalem aliquem oriundae resistat.

§. 198. Si nunc hanc de stabilitate quaestionem ad naues accommodemus, inter infinitos axes horizontales, circa quos inclinatio nauis ex situ aequilibrui fieri potest, duos habebimus principales, quorum alter a puppi ad proram porrigitur, alter ad hunc est normalis. Priorem illum axem, qui a puppi ad proram ducitur, vocemus

longitudinalem, posteriorem latitudinalem; ex quo pro-
 quaque naui circa stabilitatem duae nascuntur quaestiones
 principales, quarum altera quaeritur, quanta sit stabilitas
 respectu axis longitudinalis, altera vero quanta sit stabilitas
 respectu axis latitudinalis. Priore scilicet quaestione defini-
 ri oportet, quantum naus inclinationi circa axem longi-
 tudinalem, seu quae fit ad latera naus, resistat, posteriori
 vero, quantum naus inclinationi circa axem latitudinalem,
 seu quae versus proram puppimue fiat, reluctetur.

§. 199. Facile autem intelligitur, si cognita fuerit
 stabilitas naus respectu vtriusque axis longitudinalis scilicet.
 ac latitudinalis, tum ex eo satis prope colligi posse stabi-
 litatem respectu alius cuiusvis axis horizontalis. Quodsi
 enim constiterit quanta vi naus cum inclinationibus versus
 proram ac puppim, tum etiam versus latera resistat, non
 difficulter aestimabitur vis, qua inclinationi in quancun-
 que aliam plagam resistat. Interim tamen hic facilem tra-
 demus viam, cuius ope, si cognita fuerit stabilitas respectu
 duorum axium horizontalium inter se normalium, stabili-
 tas respectu cuiusvis alius axis horizontalis determinari queat.
 Hancobrem praecipuum negotium nostrum in hoc versabi-
 tur, vt, quaque naui proposita, eius stabilitatem respectu
 binorum illorum axium principalium longitudinalis ac la-
 titudinalis definiamus, quippe quae cognitio ad stabilitatem
 respectu omnium omnino axium horizontalium diiudican-
 dam sufficit. Atque hoc pacto quaestio de stabilitate, quae
 initio ob axes infinitos visa est infinita, nunc ad quaestio-
 nem bipartitam est reducta.

§ 200. In superiori autem libro ostensum est, dati
 aequilibrii status stabilitatem respectu cuiusvis axis horizon-
 talis.

alis determinari ex fequentibus quatuor rebus. Primo fcilicet in expreffionem ftabilitatis ingreditur pondus totius nauis, deinde diftantia inter centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis partis fubmerfae, tertio volumen partis fubmerfae, et quarto denique fectione aquae. Harum quatuor rerum tres priores aequaliter ingrediuntur, quicumque axis, cuius refpectu ftabilitas defideratur, confidetur; atque huius axis ratio in fola fectione aquae habetur. Per centrum fcilicet grauitatis fectionis aquae duci debet recta illi axi horizontali, cuius refpectu quaeritur ftabilitas, parallela, atque vtrinque ad hunc axem applicatas orthogonales duci oportet, quarum omnium cuborum fuma dabit illam quantitatem, quae in expreffionem ftabilitatis ingreditur.

§. 201. Ponamus igitur AEBF effe fectionem aquae Tab. VIII. per eiusque centrum grauitatis C ductam effe rectam AB fig. 2. parallelam illi axi cuius refpectu ftabilitas quaeritur; ad hanc itaque rectam tanquam axem ducantur vtrinque applicatae normales PM, pm, PN, pn, quo facto quaeri debet per integrationem valor huius expreffionis $\int (PM^3 + PN^3) Pp$, quo cognito ftabilitas refpectu axis AB facile determinabitur. Scilicet fi ponatur pondus nauis = M, volumen partis fubmerfae = V atque interuallum inter centrum grauitatis et centrum magnitudinis = b, erit ftabilitas refpectu axis AB = $M \left(\frac{\int (PM^3 + PN^3) Pp}{3V} \pm b \right)$, vbi fignum + fumi debet fi centrum grauitatis infra centrum magnitudinis cadat, contra vero fignum -. Simili modo ftabilitas refpectu axis EF erit = $M \left(\frac{\int (Qm^3 + Ql^3) Qq}{3V} \pm b \right)$, prouti fuperiori libro luculenter eft oftentum.

§. 202. Quodfi iam in naturam harum formularum integralium diligentius inquiramus, deprehendemus formu-

lam $\int \frac{(PM^2 + PN^2) Pp}{3}$ omnino congruere cum ea, quae prodit, si singulae sectionis aquae particulae multiplicentur per quadrata distantiarum ab axe AB, haecque producta in vnam summam colligantur. Namque consideretur particula quaecunque Ww , quae posita $PW = w$ erit $= Pp$. dw , multiplicetur haec per quadratum distantiae suae PW ab axe AB hoc est per w^2 , prodibit $Pp \cdot w^2 dw$, cuius integrale vsque in M sumtum est $\frac{PM^2 \cdot Pp}{3}$: ex quo manifestum est $\int \frac{(PM^2 + PN^2) Pp}{3}$ denotari aggregatum omnium productorum, quae oriuntur, si singulae sectionis aquae particulae multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe AB.

§. 203. Eiusmodi autem aggregata productorum, quae oriuntur, si figurae cuiusuis singulae particulae multiplicentur per quadrata distantiarum suarum a recta quadam linea fixa, in praecedente libro appellare consueuimus momenta earum figurarum respectu lineae illius rectae fixae. Quodsi igitur sectionis aquae AEBF momentum respectu axis longitudinalis AB per centrum grauitatis C sectionis aquae ducti ponatur $= I$, atque eiusdem figurae momentum respectu axis latitudinalis EF $= K$, erit stabilitas navis respectu axis longitudinalis $= M \left(\frac{I}{v} + b \right)$, ac stabilitas eiusdem navis respectu axis latitudinalis EF $= M \left(\frac{K}{v} + b \right)$. Vnde ope illius calculi, quo momenta quarumcunque figurarum definire supra docuimus, facile erit stabilitatem cuiusque navis propositae tam pro axe longitudinali quam latitudinali determinare.

§. 204. Perspicuum igitur est, si sectionis aquae non solum denter momenta respectu axium binorum longitudinalis

dinalis AB et latitudinalis EF, sed etiam respectu cuiuscunque alius axis per centrum grauitatis C sectionis aquae ducti, tum pari modo stabilitatem nauis respectu eiusdem axis assignari posse. Quoniam vero inuentio momenti respectu istiusmodi axium obliquorum plerumque fit vehementer molesta, methodum hic indicabimus, cuius ope ex datis momentis I et K respectu axium longitudinalis AB et latitudinalis EF, momentum respectu cuiuscunque alius axis PQ per centrum grauitatis C sectionis aquae citra calculum definiri queat: ita ut huius compendii beneficio sufficiat tantum bina momenta sectionis aquae respectu axium AB et EF determinasse, ad nauis stabilitatem respectu axis cuiuscunque definiendam.

§. 205. Ponatur anguli ACP, quem axis propositus PQ cum axe longitudinali AB constituit, sinus = m , cosinus = n existente sinu toto = 1, ita ut sit $m^2 + n^2 = 1$. Iam consideretur sectionis aquae particula quae-
cunque w , ex qua cum ad axem AB tum ad PQ per-
pendiculares ducantur wp et wq , dicaturque $Cp = x$;
 $pw = y$; $Cq = t$; et $wq = u$, erit $tt + uu = xx +$
 yy ; $\frac{xu + yt}{xx + yy} = m$; et $\frac{xt - yu}{xx + yy} = n$. Ex his reperitur
 $u = mx - ny$ et $t = nx + my$. Momentum igitur se-
ctionis aquae respectu axis PQ erit = $\int w.u^2 = \int w(mx -$
 $ny)^2 = m^2 \int x^2.w + n^2 \int y^2.w - 2mn \int xy.w$. Simul vero
etiam obtinebitur eiusdem sectionis aquae momentum re-
spectu axis RS, normalis ad PQ quippe quod est = $\int w.$
 $t^2 = n^2 \int x^2.w + m^2 \int y^2.w + 2mn \int xy.w$.

§. 206. Quoniam vero momenta sectionis aquae re-
spectu axium longitudinalis ac latitudinalis dantur, erit $\int y^2.$
 $w = I$ et $\int x^2.w = K$. Vnde eiusdem sectionis aquae
mo-

Tab. VIII.
fig. 3.

momentum respectu axis PQ erit $= n^2.I + m^2.K - 2mn\int xy.w$, momentum vero respectu axis ad hunc normalis RS erit $= m^2.I + n^2.K + 2mn\int yx.w$. Summa igitur binorum momentorum respectu duorum axium inter se normalium erit $= I^2 + K$ ob $m^2 + n^2 = 1$. Quare pro eadem sectione aquae summa duorum momentorum respectu axium inter se normalium semper est constans, atque ea summa perpetuo aequalis aggregato omnium productorum, quae oriuntur si singulae superficiei particulae w . multiplicentur per quadrata distantiarum suarum wC a centro grauitatis C , per quod bini illi axes transeunt. Quodsi itaque habeatur istud aggregatum ac praeterea momentum respectu cuiusuis axis, statim inde innotescet momentum respectu axis ad illum normalis.

§. 207. Cum igitur momentum respectu axis PQ fit $= n^2.I + m^2.K - 2mn\int yx.w$, id ex datis momentis I et K assignari poterit, dummodo constaret valor formulae $\int yx.w$. At quoniam omnis sectio aquae ita est comparata, vt axi longitudinali AB in duas portiones similes et aequales diuidatur, quatuor portionum ACE , ACF BCE et BCF , in quas sectio aquae binis axibus principalibus AB et EF diuiditur, tam binae priores ACE et ACF quam posteriores BCE et BCF inter se erunt similes et aequales. Hinc igitur valor ipsius $\int yx.w$, qui ex portione ACF oritur aequalis erit et negatiuus illius valoris, quem portio ACE praebet; ex quo $\int yx.w$ pro parte EAF euanescent; similique modo valor ipsius $\int yx.w$, qui respondet parti posteriori EBF erit $= 0$. Cum ergo totalis valor formulae $\int yx.w$ euanescat, erit momentum sectionis aquae respectu axis PQ $= n^2.I + m^2.K$,

$m^2.K$, ac momentum respectu axis $RS = m^2.I + n^2.K$; ex quo datis momentis respectu axium principalium AB et EF , facili negotio sine calculo momentum respectu cuiuscunque axis, per centrum grauitatis C transeuntis, determinari poterit.

§. 208. Quia est $nn = 1 - mm$, erit momentum sectionis aquae respectu axis $PQ = I - m^2(I - K)$, ubi m denotat sinum anguli ACP , quem axis PQ cum axe longitudinali AB constituit. Quod si ergo angulus ACP euanescat, seu axis PQ in AB incidat, prodibit momentum respectu eius $= I$ ob $m = 0$, id quod est momentum respectu axis AB ; at si axis PQ incidat in longitudinalem EF , ob $m = 1$, fiet momentum eius respectu $= K$. Ponamus autem angulum ACP esse semirectum, seu axem PQ medium interiacere inter axes principales AB et EF , erit $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ atque momentum erit $= \frac{I+K}{2}$: quod ergo est medium arithmeticum inter momenta respectu axium principalium, ac propterea aequale momento respectu axis RS normalis ad axem PQ , id quod ipsa rei natura indicat, cum axis RS hoc casu similiter sit positus respectu axium principalium, ac axis PQ .

§. 209. Quoniam in omnibus sectionibus aquae, quae occurrere solent momentum respectu axis latitudinalis EF maius est, momento respectu axis longitudinalis AB seu $K > I$, erit momentum respectu axis obliqui $PQ = I + m^2(K - I)$. Quare momentum respectu axis obliqui PQ maius est, quam momentum respectu axis longitudinalis AB ; atque hoc momentum continuo crescet, quoad axis PQ in longitudinalem EF incidat. In omni igitur nauis momentum sectionis aquae respectu axis longitudinalis

omnium est minimum, momentum vero respectu axis latitudinalis omnium maximum. Quodsi ergo naus habeat stabilitatem respectu axium binorum principalium, ea respectu omnium omnino axium firmiter in situ aequilibrum persistet, ex quo sufficit ad stabilitatem nauibus conciliandam ad binos tantum axes principales attendere, eorumque respectu stabilitatem satis magnam efficere, quippe quo reliquis axibus omnibus simul erit consultum.

§. 210. Si igitur momentum sectionis aquae respectu axis latitudinalis aequale fuerit momento respectu axis longitudinalis, tum eidem momento aequalia erunt momenta respectu omnium axium obliquorum. Quare si naus eius modi habeat figuram, ut respectu binorum axium principalium aequale sit stabile, tum eandem stabilitatem habebit

Tab. VIII.
fig. 4.

respectu alius cuiusvis axis horizontalis. Si ergo sectio aquae fuerit quadratum $AEBF$, quia momenta eius respectu axium AB et EF inter se sunt aequalia, momenta quoque respectu omnium omnino axium per C transeuntium erunt aequalia, hincque corpus aquae innatans, cuius sectio aquae est quadratum, secundum omnes plagas aequale erit stabile, atque aequali vi inclinationibus resistet. Eadem vero proprietas locum habebit si sectio aquae fuerit quaecunque alia figura, dummodo ea ita sit comparata, ut eius momenta respectu binorum axium principalium sint inter se aequalia.

§. 211. Cum igitur ad iudicium de stabilitate cuiusque naus respectu cuiuscunque axis horizontalis ferendum sufficiat sectionis aquae momenta cum respectu axis longitudinalis tum latitudinalis determinasse, ante omnia necesse erit figuras aliquot instar sectionis aquae considerare,

pro

pro iisque momenta respectu axium principalium analytice definire. Quodsi enim plurium figurarum momenta fuerint cognita, ex iis aliarum quarumcunque figurarum, quae alias difficulter ad calculum reuocentur, momenta fatis prope, id quod ad vsum practicum sufficit, colligi poterunt. Calculo quidem hic utemur eodem, quo in ^{Tab. VIII.} superiori libro sumus vsi; scilicet sectionem aquae in qua ^{fig. 2.} quatuor portiones ACE, ACF, BCE, et BCF diuisam contemplantur per axes principales AB et EF; calculumque pro singulis portionibus seorsim instituemus. Sic si pro quadrante ACE vocetur CP = x, PM = y, dabit $\frac{1}{3} \int y^3 dx$ momentum huius quadrantis respectu axis AB, ac $\int y x^2 dx$ momentum respectu axis EF. Tantum igitur opus est, vt hae expressiones pro singulis quadrantibus quaerantur atque in vnam summam colligantur; vbi quidem hoc compendium affert, quod momenta cum quadrantum ACE et ACF, tum quadrantum BCE et BCF sint aequalia, ex quo calculus duplo fit curtior.

§. 212. Sit igitur primum sectio aquae quadratum AEBF, per cuius centrum grauitatis C ducti sint axes ^{Tab. VIII.} principales longitudinalis AB et latitudinalis EF. ponatur ^{fig. 4.} que AC = a, erit positus Cp = x, pm = y, y = a vnde $\int y^3 dx = a^4$ et $\frac{1}{3} \int y^3 dx = \frac{a^4}{3}$; atque $\int y x^2 dx = \frac{ax^3}{3} = \frac{a^4}{3}$. Quam ob rem momentum respectu axis AB erit = $\frac{4a^4}{3} = \frac{AB^4}{12}$, cui aequale est momentum respectu axis latitudinalis EF, et respectu cuiuscunque alius axis PQ per centrum grauitatis C ducti. Quodsi ergo aream huius sectionis aquae ponamus = 2 D, quam designationem semper ad aream cuiusuis sectionis aquae designandam adhibebimus,

erit $AB^2 = 2D$; hincque stabilitas respectu cuiusvis axis per C transeuntis erit $= \frac{AB^2 \cdot D}{6}$. Commodum autem erit in sequentibus considerationem areae sectionis aquae in expressionem momenti inducere, quo ea facilius per volumen partis submersae, quod pariter per aream sectionis aquae in rectam quandam ductae exprimere conuenit, diuidi queat.

Tab. VIII.
fig. 5.

§. 213. Sit nunc sectio aquae parallelogrammum rectangulum AEBF, cuius axis longitudinalis sit AB, latitudinalis EF. Ponatur AC = a, CE = b, erit AB = 2a, EF = 2b et area sectionis aquae 2D = 4ab. Posito ergo CP = x erit PM = y = b, atque $\int y^3 dx = b^3 x$; unde momentum respectu axis longitudinalis AB erit $= \frac{4ab^3}{3} = \frac{2D \cdot bb}{3} = \frac{EF^2 \cdot D}{6}$. Pari vero ratione prodibit momentum respectu axis latitudinalis $= \frac{AB^2 \cdot D}{6}$; ex quo momentum huius sectionis aquae respectu axis longitudinalis AB se habebit ad momentum axis latitudinalis EF inuersè vt quadratum axis longitudinalis AB ad quadratum axis latitudinalis EF.

Tab. IX.
fig. 1.

§. 214. Sit porro sectio aquae rhombus AEBF cuius diagonales AB et EF repraesentent axes principales, illa AB scilicet longitudinalem haec EF latitudinalem. Ponatur AC = a, CE = b, erit AB = 2a, EF = 2b et area 2D = 2ab. Quodsi ergo ponatur AP = x et PM = y erit $y = \frac{bx}{a}$ et $\int y^3 dx = \frac{b^3}{a^3} \int x^3 dx = \frac{b^3 x^4}{4a^3}$. Posito itaque x = a prodibit momentum respectu axis longitudinalis AB $= \frac{ab^3}{3} = \frac{D \cdot bb}{3} = \frac{EF^2 \cdot D}{12}$; ex quo momentum respectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{AB^2 \cdot D}{12}$; quae expressiones a praecedentibus, quae pro parallelogrammo

grammo rectangulo prodierunt, hoc tantum differunt, quod ibi diuisum erat per 6, hic vero per 12. Manentibus igitur eadem longitudine ac latitudine, momenta parallelogrammi rectanguli duplo sunt maiora quam rhombi.

§. 215. Accipiat pro sectione aquae trapezium Ae Tab. IX. fig. 2. Bf constans ex duabus triangulis aequicruris eAf et eBf , quae figura hoc discrepat a rhombo, quod hic triangula eAf et eBf , sint inaequalia. Manebit igitur quidem AB axis longitudinalis, at ef , quia per centrum grauitatis figurae non transit, non erit axis latitudinalis. Ad veram igitur positionem axis latitudinalis EF inueniendam, determinari oportet centrum grauitatis figurae C ; id quod ita reperietur. Natura centri grauitatis hanc praebet aequationem $AB \cdot ce \cdot Cb = Bc \cdot ce \cdot \frac{1}{3} Bc - Ac \cdot ce \cdot \frac{1}{3} Ac$, ex qua oritur $Cc = \frac{ce(Bc^2 - Ac^2)}{3AB \cdot ce} = \frac{Bc - Ac}{3}$. Ducta itaque per punctum C recta EF parallela ipsi ef , erit verus axis latitudinalis cuius respectu momentum huius figurae definiiri oportet.

§. 216. Quaeramus primum momentum huius trapezii respectu axis longitudinalis AB , ponaturque $Ac = a$; $ce = b$; et $Bc = c$. Dicta itaque $AP = x$ erit $PM = \frac{bx}{a} = y$, et $\int y^2 dx = \frac{ab^3}{4}$. Trianguli igitur Ace momentum respectu axis AB erit $= \frac{ab^3}{12}$, trianguli vero $Bce = \frac{cb^3}{12}$, vnde totius figurae momentum respectu axis AB erit $= \frac{ab^3 + cb^3}{6} = \frac{Dbb}{3} = \frac{ef^2 \cdot D}{12}$. Quod si vero momentum figurae respectu axis ef quaeratur, quia huius respectu momentum trianguli Ace est $= \frac{a^3 b}{12}$, et trianguli $Bce = \frac{c^3 b}{12}$, prodiret id $= \frac{a^3 b + c^3 b}{6} = \frac{D(aa - ac + cc)}{3}$, posito $2D$ pro area totius sectionis aquae.

Tab. IX. §. 217. Ex hac ipsa autem expressione momenti si
 fig. 3. gurae respectu axis ef definiri poterit sine peculiari cal-
 culo momentum respectu axis latitudinalis veri EF. Nam-
 que si figurae cuiuscunque AEBF detur momentum re-
 spectu axis ef per eius centrum grauitatis non transeuntis,
 quod sit $= L$, ex eo definiri poterit momentum respectu
 axis EF illi axi ef paralleli ac per centrum grauitatis C
 transeuntis. Consideretur enim figurae particula quaecun-
 que w , erit momentum figurae respectu axis ef quod da-
 tum ponitur scilicet $L = \int w \cdot wn^2$; at momentum respe-
 ctu axis EF quod quaeritur $= \int w \cdot wN^2$. Est vero $\int w \cdot$
 $wn^2 = \int w \cdot wN^2 - 2Nn \int w \cdot wN + Nn^2 \int w$. Quoniam
 autem axis EF per centrum grauitatis figurae C transire
 ponitur, valor huius expressionis $\int w \cdot wN$ vtrinque sese de-
 struit fitque $= 0$, atque $\int w$ abit in aream figurae $= 2D$.
 Quocirca momentum figurae respectu axis EF erit $= L$
 $- 2D \cdot Nn^2 = L - 2D \cdot Cc^2$.

Tab. IX. §. 218. Cum igitur momentum sectionis aquae Ae
 fig. 2. Bf respectu axis ef inuentum sit $= \frac{D(a^2-ac+cc)}{3}$, verus
 autem axis latitudinalis EF distet ab axe ef intervallo
 $Cb = \frac{c-a}{3}$; obtinebitur per regulam modo inuentam
 momentum figurae respectu axis EF $= \frac{D(aa-ac+cc)}{3} -$
 $\frac{2D(c-a)^2}{9} = \frac{D(aa+ac+cc)}{9} = \frac{D(a+c)^2}{12} + \frac{D(c-a)^2}{36} = \frac{D \cdot AB^2}{12} + \frac{D \cdot Cc^2}{4}$.
 Maius igitur est momentum huius figurae respectu axis
 latitudinalis EF, quam si esset $Ac = Bc$. In huiusmodi
 ergo figuris quadrilateris, quae eandem habent longitudi-
 nem AB eandemque latitudinem ef , momentum respectu
 axis latitudinalis eo erit maius, quo magis fuerint partes
 Ac et Bc inter se inaequales.

§. 219. Sit nunc sectio aquae ellipsis AEBF, cuius axis maior AB axem longitudinalem, minor vero EF latitudinalem exhibeat. Sit AC = BC = a, CE = CF = b, CP = x et PM = y, erit $y = b \sqrt{1 - \frac{xx}{aa}}$. Hinc itaque momentum quadrantis ACE respectu axis latitudinalis CE erit = $\int bxx dx \sqrt{1 - \frac{xx}{aa}} = \frac{a^2b}{4} \int dx \sqrt{1 - \frac{xx}{aa}}$. At $\int b dx \sqrt{1 - \frac{xx}{aa}}$ exprimit aream quadrantis elliptici ACE = $\frac{D}{2}$, ex quo momentum quadrantis respectu axis EF erit = $\frac{a^2D}{8}$, totiusque ellipsis = $\frac{AB^2 \cdot D}{8}$. Hinc sine ulteriori calculo constat ellipsis momentum respectu axis longitudinalis AB fore = $\frac{EF^2 \cdot D}{8}$; quae formulae iterum similes sunt iis, quae pro parallelogrammo rectangulo ac rhombo prodierunt, excepto solo denominatore, qui pro parallelogrammo rectangulo erat 6, pro rhombo 12, nunc vero pro ellipsi, 8.

§. 220. Quoniam supra circa figuras quadrilateras vidimus, eas quae partibus dissimilibus circa axem longitudinalem sint praeditae, maiora habere momenta, quam eas, quae consistunt partibus similibus, seu rhombos ceteris paribus; operae pretium erit hic inuestigare vtrum idem in figuris curvilineis eueniat. Sit igitur proposita pro sectione aquae figura AEBF, quae cum praecedente ellipsi communem habeat axem longitudinalem AB, et maximam latitudinem ef, itemque totam aream, sed in qua maxima latitudo ef axem AB non secet bifariam sed inaequaliter in c, existente O puncto axis longitudinalis medio. Huius ergo figurae centrum grauitatis cadet in punctum C, eritque EF axis latitudinalis cuius respectu momentum figurae determinari oportet. Ponatur ergo AO = BO = a; ce = cf = b, atque Oc = c. §. 221.

Tab. IX.
fig. 3.

Tab. IX.
fig. 4.

112 DE STABILITATE SITVS AEQVILIBRII.

§. 221. Huiusmodi autem curvae, quae aequalera habeant aream ellipfi, cuius axes sunt AB et ef innumerabiles exhiberi possunt; posito enim $AP = x$, $PM = y$, haec aequatio $x = a + Y \pm a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$, vbi Y denotat functionem eiusmodi ipsius y , quae euanescat posito $y = 0$, infinitas curvas istius proprietatis praebit. Posito namque $y = 0$, fit x vel $= 0$ vel $= 2a$, ex quo axis transuersus huius curuae erit $AB = 2a$. Deinde maxima huius curuae latitudo est $= b$, respondetque abscissae $x = a + Y$, posito in Y loco y valore b , ex quo maxima applicata ce non in punctum axis medium O cadet. Denique vero vt curua haec ad vtramque partem axis AB duas habeat partes AEB et AFB similes et aequales, necesse est vt Y sit functio par ipsius y . Hanc obrem ponamus $Y = \frac{cy}{bb}$, quo fiat interuallum $Oc = c$ vti assumimus.

§. 222. Primum autem dico, quamcunque Y significet functionem ipsius y , dummodo non ambiguam cuiusmodi sunt eae quae signum radicale $\sqrt{\quad}$ inuoluunt, aream huius curuae $AEBF$ aequalera esse areae ellipfis, cuius axes sint $2a$ et $2b$. Cum enim sit $x = a + Y \pm a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$, valor $x = a + Y - a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$ valebit pro portione Ace , alter autem valor $x = a + Y + a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$ pro portione Bce . Erit itaque portio Ace area $= \int y dx = \int y dY + \frac{a}{b} \int \frac{yy dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$, si post integrale ita acceptum, vt euanescat posito $y = 0$, ponatur $y = b$. Contra vero portio Bce area erit $= \int y dY - \frac{a}{b} \int \frac{yy dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$ si post integrale ita acceptum vt euanescat posito $y = b$ ponatur $y = 0$. Quamobrem area AEB erit $= \frac{2a}{b} \int \frac{yy dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$ $= D$, quippe quae expressio dat aream semiellipicos.

§. 223.

§. 223. Deinde dico huius figurae momentum respectu axis longitudinalis AB idem prodire, quicquid sit functio Y, seu aequale esse momento ellipsis respectu axis AB, posito enim $Y = 0$ curua nostra abit in ellipfin. Est enim momentum portionis Ace respectu axis AB $= \frac{1}{3} \int y^3 dx = \frac{1}{3} \int y^3 dY + \frac{a}{3b} \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, si post integrale ita sumtum vt euanescat posito $y = 0$, fiat $y = b$. Portionis vero Bce respectu eiusdem axis momentum est $= \frac{1}{3} \int y^3 dY - \frac{a}{3b} \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, si post integrationem institutam, vt fiat integrale $= 0$ posito $y = b$, ponatur $y = 0$. Areae igitur AEB momentum respectu axis AB erit $= \frac{2a}{3b} \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, in quo quantitas Y non ineft. Erit igitur totius figurae plane vt ellipsis momentum respectu axis longitudinalis $= \frac{Dbb}{2} = \frac{ef^2 D}{8}$.

§. 224. Vt nunc etiam momentum huius figurae respectu axis latitudinalis EF definiamus, determinemus id prius respectu axis cuiusdam illi paralleli, puta respectu rectae aa in A ad AB normalis: cognito enim hoc momento facile erit momentum respectu axis EF assignare, dummodo distantia AC fuerit definita. Portionis quidem Ace momentum respectu axis Aa est $= \int y (d.Y + \frac{ay dy}{b\sqrt{(bb-yy)}}) (a+Y)^2 - \frac{2a(a+Y)}{b} \sqrt{(bb-yy)} + aa - \frac{aayy}{bb} = \int y (a+Y)^2 dY - \frac{2a}{b} \int y dY (a+Y) \sqrt{(bb-yy)} + \frac{aa}{bb} \int y dY (bb-yy) + \frac{a}{b} \int \frac{yy dy (a+Y)^2}{\sqrt{(bb-yy)}} - \frac{2aa}{bb} \int yy dy (a+Y) + \frac{a^3}{b^3} \int yy dy \sqrt{(bb-yy)}$, integralibus ita sumtis vt euanescant posito $y = 0$ tumque posito $y = b$. Portionis vero Bce momentum respectu axis Aa est $= \int y (a+Y)^2 dY + \frac{2a}{b} \int y dY (a+Y) \sqrt{(bb-yy)} + \frac{aa}{bb} \int y dY (bb-yy) - \frac{a}{b} \int \frac{yy dy (a+Y)^2}{\sqrt{(bb-yy)}} - \frac{2aa}{bb} \int yy dy (a+Y) - \frac{a^3}{b^3} \int yy dy \sqrt{(bb-yy)}$ integralibus contrario modo acceptis.

Pars II.

P

§. 225.

214 DE STABILITATE SITVS AEQVILIBRII.

§. 225. Ex his igitur oriatur areae AEB momentum respectu axis $aAa = -\frac{a^2}{b} \int y dY (a+Y) \sqrt{bb-yy} + \frac{2a}{b} \int \frac{yy dy (a+Y)^2}{\sqrt{bb-yy}} + \frac{2a^3}{b^3} \int yy dy \sqrt{bb-yy} = \frac{2a^3}{b^3} \int yy dy \sqrt{bb-yy} - \frac{2a}{b} \int y d.(a+Y)^2 \sqrt{bb-yy} = \frac{2a^3}{b^3} \int yy dy \sqrt{bb-yy} + \frac{2a}{b} \int (a+Y)^2 dy \sqrt{bb-yy}$; propterea quod $y(a+Y)^2 \sqrt{bb-yy}$ fit $=0$, tam si $y=0$, quam si $y=b$. Est vero posito $y=b$ post integrationem $\int yy dy \sqrt{bb-yy} = \frac{bb}{4} \int \frac{yy dy}{\sqrt{bb-yy}} = \frac{b^3 D}{8a}$. (§. 222.) Ex quo momentum areae AEB respectu axis aAa est $= \frac{aaD}{4} + \frac{2a}{b} \int (a+Y)^2 dy \sqrt{bb-yy}$; atque respectu eiusdem axis momentum totius figurae $= \frac{aaD}{2} + \frac{4a}{b} \int (a+Y)^2 dy \sqrt{bb-yy}$, sumpta parte AFB simili et aequali parti AEB.

§. 226. Ponamus nunc centrum grauitatis totius figurae cadere in C erit $DAc = \int yx dx$ integrali per totam aream AEB extenso. Quodsi ergo ista formula pro vtraque portione Ace et Bce seorsim exprimat, prodibit $D.AC = \frac{2a}{b} \int \frac{y^2 dy (a+Y)}{\sqrt{bb-yy}} - \frac{2a}{b} \int y dY \sqrt{bb-yy} = -\frac{2a}{b} \int y d.(a+Y) \sqrt{bb-yy} = \frac{2a}{b} \int (a+Y) dy \sqrt{bb-yy}$, vnde obtinebitur $AC = \frac{2a}{bD} \int (a+Y) dy \sqrt{bb-yy}$. Consequenter, si per centrum grauitatis C axis latitudinalis EF ducatur, erit momentum totius figurae eius respectu $= \frac{aaD}{2} + \frac{4a}{b} \int (a+Y)^2 dy \sqrt{bb-yy} - \frac{8aa}{bD} (\int (a+Y) dy \sqrt{bb-yy})^2$. Quoties nunc est Y functio par ipsius y, formulae hae integrales reduci poterunt ad hanc $\int \frac{yy dy}{\sqrt{bb-yy}} = \frac{bD}{2a}$ seu hanc $\int yy dy \sqrt{bb-yy} = \frac{b^3 D}{4a}$, siue etiam ad hanc $\int dy \sqrt{bb-yy} = \frac{bD}{2a}$.

§. 227. Ponamus esse $Y = \frac{-cyy}{bb}$, seu $x = a - \frac{cyy}{bb} + \frac{a}{b} \sqrt{bb-yy}$, ex qua fit $Oc = c$ vti assumimus, erit $\int (a$

$\int (a + Y)^2 dy \sqrt{bb - yy} = a^2 \int dy \sqrt{bb - yy} - \frac{2ac}{bb} \int yy dy \sqrt{bb - yy} + \frac{cc}{b^2} \int y^2 dy \sqrt{bb - yy}$. Verum est $\int dy \sqrt{bb - yy} = \frac{bD}{2}$; $\int yy dy \sqrt{bb - yy} = \frac{b^3 D}{8a}$; et $\int y^2 dy \sqrt{bb - yy} = \frac{b^5 D}{16a}$; ideoque $\int (a + Y)^2 dy \sqrt{bb - yy} = \frac{abD}{2} - \frac{bcD}{4} + \frac{bccD}{16a} = \frac{bD}{16a} (8aa - 4ac + cc)$. Simili modo erit $\int (a + Y) dy \sqrt{bb - yy} = \frac{bD}{c} - \frac{bcD}{8a} = \frac{bD}{8a} (4a - c)$, et $AC = a - \frac{c}{4}$; hincque tandem momentum totius figurae AEBF respectu axis EF $= \frac{aaD}{2} + \frac{ccD}{8} = \frac{AB^2 D}{8} + \frac{cO^2 D}{8}$.

§. 228. Confirmatur igitur in his figuris, quod supra in trapeziis obseruauimus, scilicet momentum sectionis aquae respectu axis latitudinalis EF maius fieri, quo magis latitudo maxima *ef* a puncto axis AB medio C distet, ceteris paribus. Aequatio autem assumpta $x = a - \frac{cyy}{bb} \pm \frac{a}{b} \sqrt{bb - yy}$ non permittit, vt capiatur $c > \frac{1}{2}a$, alias enim curua ultra rectam *aa* excurreret, id quod non conuenit figuris, quae sectionis aquae vicem tenere debent. Quodsi autem ponatur $c = \frac{1}{2}a$ seu $Oc = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AB$, prodibit momentum sectionis aquae respectu axis latitudinalis $= \frac{AB^2 D}{8} + \frac{AB^2 D}{128}$. Tanta ergo maximae latitudinis *ef* remotione a medio puncto longitudinis O, momentum respectu axis latitudinalis sui parte decima sexta augetur.

§ 229. Consideremus nunc alias curuas latius patentes, in quibus praecedentes contineantur, sitque sectio aquae AEBF composita ex duabus partibus AEB et AFB similibus et aequalibus, siue eae curuam continuam constituent siue secus; deinde quaelibet semissis constet ex duabus portionibus applicata *ef* a se inuicem disiunctis, quae pariter, vtrum sint continuae an non, nihil interest. Mantentibus scilicet $AO = Bo = a$, $ce = cf = b$, $AP = x$,

116 DE STABILITATE SITVS AEQVILIBRII

PM = y , exprimat portionis Ace naturam haec aequatio
 $x = a + Y - a \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = AP$, naturam vero portionis Bce haec
 aequatio $x = a + Y + a \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = Ap$, erit ergo Mm =
 $2a \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x$, vnde area AEB prodibit = $2afdy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = D$
 integrali ita assumpto vt euanescat posito $y = 0$, tumque facto
 $y = b$. Area itaque manebit eadem, quaecunque functio pro Y
 substituatur.

§. 230. Momentum huius figurae respectu axis lon-
 gitudinalis AB facile determinabitur, cum enim sit Mm =
 $2a \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x$, erit momentum respectu axis AB = $2afydy$
 $\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x$, quod pariter a valore functionis Y non pendet.

Ad momentum autem huius figurae respectu axis latitu-
 dinalis EF, qui per centrum grauitatis figurae C est du-
 ctus determinandum, quaeratur primum momentum respectu
 axis normalis ad AB et per eius punctum medium O
 ducti. Quia nunc est PO = $-Y + a \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x$ et pO =
 $Y + a \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x$, erit momentum respectu huius axis =
 $\frac{2nx a^3}{b^n} \int y^n dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3x-1} + 2afY^2 dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x$, ex quo to-
 tius figurae momentum respectu axis ipsi EF paralleli et
 per O ducti erit = $\frac{4nx a^3}{b^n} \int y^n dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3x-1} + 4afY^2 dy$
 $\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x$.

§. 231.

§. 231. Oportebit iam locum centri grauitatis huius figurae C definire, pro quo natura centri grauitatis praebebit hanc aequationem $D \cdot CO = 2 a f y dY \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x - \frac{2 n \kappa a}{b^n} \int y^n Y dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\kappa-1} = - 2 a f Y dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x$ ex qua

fit $CO = \frac{- 2 a f Y dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x}{D}$. Quocirca momentum to-

tius figurae respectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{4 n \kappa a^3}{b^n} \int y^n dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\kappa-1} + 4 a f Y^2 dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x - 8 a a \left(\int Y dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x\right)^2$.

Quod si nunc pro Y accipiatur eiusmodi functio ipsius y, vt sit $Y = \alpha y^n + \beta y^{2n} + \gamma y^{3n} + \text{etc.}$ et κ denotet vel numerum integrum vel fractum, cuius denominator sit 2, integratio singularum harum formularum reduci poterit ad eam qua area exprimitur, scilicet $\int dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = \frac{D}{2a}$.

§. 232. Sit primum antequam pro κ valores definitos accipiamus, $Y = \frac{-c y^n}{b^n}$, vt fiat $Ac = a - c$ et $Oc = c$,

erit $\int Y dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = - \frac{c}{b^n} \int y^n dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = \frac{-c}{n(\kappa+1)+1} \int dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = \frac{-cD}{2a(n(\kappa+1)+1)}$, atque

$\int Y^2 dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = \frac{cc}{b^{2n}} \int y^{2n} dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = \frac{(n+1)cc}{(n(\kappa+1)+1)(n(\kappa+2)+1)} \int dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^x = \frac{(n+1)ccD}{2a(n(\kappa+1)+1)(n(\kappa+2)+1)}$. Quo-

circa momentum figurae propositae respectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{4 n \kappa a^3}{b^n} \int y^n dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\kappa-1} +$

118 DE STABILITATE SITVS AEQVILIBRIÏ

$$\frac{2(n+1)ccD}{(n(\kappa+1)+1)(n(\kappa+2)+1)} - \frac{2ccD}{(n(\kappa+1)+1)^2} = \frac{4n\kappa a^2}{b^n}$$

$$\int y^n dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3\kappa-1} + \frac{2nn(\kappa+1)ccD}{(n(\kappa+1)+1)^2(n(\kappa+2)+1)} \therefore \text{vnde}$$

iterum intelligitur hoc momentum maius esse, quo maius fuerit interuallum c inter punctum axis longitudinalis medium O et latitudinem maximam ef .

§. 233. Quoniam vero est $\frac{\int y^n dy}{b^n} \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3\kappa-1} = \frac{1}{1+3n\kappa}$

$\int dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3\kappa-1}$, ponatur $\int dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3\kappa-1} = N \int dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\kappa$

$= \frac{ND}{2a}$ erit momentum respectu axis $EF = \frac{2n\kappa a^2 ND}{1+3n\kappa}$

+ $\frac{2nn(\kappa+1)ccD}{(n(\kappa+1)+1)^2(n(\kappa+2)+1)}$ Valores autem ipsius N

pro variis ipsius κ valoribus ita se habent

$\kappa = \frac{1}{2}$	$N = 1$	$\kappa = \frac{5}{2}$	$N = \frac{7n \cdot 6n \cdot 11n \cdot 13n}{(2+7n)(2+9n)(2+11n)(2+13n)}$
$\kappa = 1$	$N = \frac{4n}{2+4n}$	$\kappa = 3$	$N = \frac{8n \cdot 10n \cdot 12n \cdot 14n \cdot 16n}{(2+8n)(2+10n)(2+12n)(2+14n)(2+16n)}$
$\kappa = \frac{3}{2}$	$N = \frac{5n \cdot 7n}{(2+5n)(2+7n)}$	etc.	
$\kappa = 2$	$N = \frac{6n \cdot 8n \cdot 10n}{(2+6n)(2+8n)(2+10n)}$		

§. 234. Ponamus esse $c=0$, quia si hoc casu momentum respectu axis EF fuerit cognitum, ex eo idem momentum pro valore quocunque ipsius c inueniri potest. Erit autem momentum hoc pro variis ipsius κ valoribus ita comparatum vt tabula apposita indicat.

si

$\kappa = \frac{1}{2}$	Momentum respectu axis EF
$\kappa = 1$	$2a^2 D \cdot \frac{n}{2+3n}$
$\kappa = \frac{3}{2}$	$2a^2 D \cdot \frac{2n \cdot 4n}{(2+4n)(2+6n)}$
$\kappa = 2$	$2a^2 D \cdot \frac{3n \cdot 5n \cdot 7n}{(2+5n)(2+7n)(2+9n)}$
$\kappa = \frac{5}{2}$	$2a^2 D \cdot \frac{4n \cdot 6n \cdot 8n \cdot 10n}{(2+6n)(2+8n)(2+10n)(2+12n)}$
$\kappa = 3$	$2a^2 D \cdot \frac{5n \cdot 7n \cdot 9n \cdot 11n \cdot 13n}{(2+7n)(2+9n)(2+11n)(2+13n)(2+15n)}$
$\kappa = \frac{7}{2}$	$2a^2 D \cdot \frac{6n \cdot 8n \cdot 10n \cdot 12n \cdot 14n \cdot 16n}{(2+8n)(2+10n)(2+12n)(2+14n)(2+16n)(2+18n)}$

§. 235.

§. 235. Si pro his curuis ponatur $n = 1$, tum anguli, quos curua in A et B cum axe AB constituit erunt obliqui, sin autem $n < 1$ tum hi anguli euanescent, hisque igitur casibus curua puncta habebit flexus contrarii, ideoque ad sectionem aquae repraesentandam non erit idonea. Minimus igitur valor, qui litterae n tribui poterit erit vnitas, hocque casu capacitas ceteris paribus erit minima: crescente autem littera n , crescet capacitas figurae, donec, si fiat n infinitum, figura abeat in parallelogrammum rectangulum, cuius momentum respectu axis longitudinalis erit $= \frac{2a^2D}{3} = \frac{AB^2D}{6}$, id quod accidit, quicumque numerus loco κ substituatur, dummodo sit affirmatiuus; negatiuos enim valores substituere non licet, eo quod curvae tum non claudantur, sed in infinitum extendantur.

§. 236. Deinde etiam ad praesens institutum κ vnitate maius accipi non potest; posito enim $\kappa > 1$ tum curua in e et f habebit cuspides ac tangentes ad AB normales, cuiusmodi figurae nauibus non conueniunt. Quodsi autem sit $\kappa = 1$ anguli ad e et f erunt acuti, hocque casu continetur figura rectilinea quadrilatera quam §. 215. considerauimus. At si ponatur $\kappa < 1$ tum curuae in e et f habebunt tangentes axi AB parallelas, cuiusmodi figurae sectioni aquae optime conueniunt. Ponamus igitur $\kappa = 1$, et $n = 1$ prodibit momentum respectu axis EF $= \frac{2a^2D}{6} = \frac{AB^2D}{12}$, qui est casus rhombi: sin $n = 2$ fit hoc momentum $= \frac{16a^2D}{35} = \frac{4AB^2D}{35}$, id quod iam multo maius est quam illud. Positis vero $\kappa = \frac{1}{2}$ et $n = 1$ fit hoc momentum $= \frac{2a^2D}{5} = \frac{AB^2D}{10}$, at si $n = 2$ fit id $= \frac{a^2D}{2} = \frac{AB^2D}{8}$, qui est casus pro ellipsi.

§. 237. Exempla haec fufficere poffunt ad momenta cuiusvis fectionis aquae propofitae proxime aestimanda. Si enim vt haectenus AB defignet axem longitudinalem EF latitudinalem, et D femiffem areae fectionis aquae, erit momentum refpectu axis longitudinalis $AB = \frac{EF^2 \cdot D}{\mu}$, ac momentum refpectu axis latitudinalis $EF = \frac{AB^2 \cdot D}{\mu}$, vbi μ est numerus inter limites 6 et 12 contentus. Valorem autem ipfum numeri μ ex hoc aestimari licebit, quod, fi fectio aquae fit reetangulum, fiat $\mu = 6$, fin rhombus, $\mu = 12$; qui funt cafus extremi: deinde etiam conftat fi fectio aquae fuerit ellipfis fore $\mu = 8$; et, fi ea fuerit parabola axem in axe latitudinali pofitum habens, erit pro momento refpectu axis longitudinalis $\mu = \frac{35}{4}$ at refpectu axis latitudinalis erit $\mu = 10$. Provt igitur figura propofita ad aliquem horum quatuor cafuum proxime accedit, ita valorem litterae μ vero proxime definire licebit. Denique fi fectionis aquae femiffes proram puppimque fpectantes inter fe fuerint inaequales, hac ipfa inaequalitate momentum refpectu axis latitudinalis augebitur.

§. 238. Expoftis igitur his, quae ad fectionem aquae eiusque momenta refpectu quorumque axium horizontalium per eius centrum grauitatis ductorum fpectant, reuertamur ad ftabilitatem, qua naues in fitu aequilibrii perftant, diligentius inueftigandam. Repraefentet ergo figura

Tab IX. *AabB* carinam nauis feu partem aquae immerfam, cuius fuprema fuperficies feu fectio aquae fit *AEBF*, atque *A* proa, *B* vero puppis. Sit pondus totius nauis $= M$, volumen partis fubmerfae $= V$, quod ita pendet ab *M*, vt pondus maffae aquae cuius volumen est $= V$ aequale fit

fig. 5.

fit ponderi nauis $= M$, fit porro centrum grauitatis totius nauis fitum in G , centrum magnitudinis partis submerfae vero in O , ita vt O infra G cadat, vt fere in omnibus nauibus fieri solet. Denique fit area sectionis aquae $= 2 D$, eiusque momentum respectu axis longitudinalis $AB = I = \frac{EF^2 \cdot D}{\mu}$, at respectu axis latitudinalis $= K = \frac{AB^2 \cdot D}{\nu}$, vbi μ et ν numeros designant medios inter 6 et 12 diuersas autem litteras μ et ν assumimus quia non semper aequales valores habent.

§. 239. Ex his itaque obtinebitur stabilitas nauis respectu axis longitudinalis $AB = M \left(\frac{EF^2 \cdot D}{\mu \nu} - OG \right)$ atque momentum respectu axis latitudinalis $= M \left(\frac{AB^2 \cdot D}{\nu \nu} - OG \right)$. Sin autem centrum grauitatis G infra centrum magnitudinis O caderet, tum loco $- OG$ scribi deberet $+ OG$; hocque casu nauis semper haberet stabilitatem affirmatiuam atque in situ suo aequilibrui firmiter persisteret. Stabilitas porro hoc casu eo erit maior, quo profundius centrum grauitatis G infra centrum magnitudinis O cadet. Ratione autem sectionis aquae stabilitas augebitur quo amplior ea accipiatur; tum enim non solum area eius $2 D$ eo fiet maior, sed etiam eius longitudo AB et latitudo EF , ex quo stabilitas duplicem ob rationem augebitur.

§. 240. Quod si igitur naues ita confici possent vt earum centrum grauitatis infra centrum magnitudinis caderet, tum nulla admodum cura esset adhibenda ad stabilitatem nauibus conciliandam, quoniam sponte haberent fati magnam. At haec conditio in plerisque nauibus nullo modo adimpleri potest, si enim tota nauis moles per carinam aequabiliter distribuatur, tum centrum grauitatis in ipsum centrum magnitudinis caderet, ex quo per-

spicuum est ob partem extra aquam eminentem centrum grauitatis altius esse positum. Quamuis enim maxime ponderosis oneribus in imum carinae collocandis centrum grauitatis deorsum et quidem infra centrum magnitudinis deduci posset; si spatium carinae suppetat; tamen in plerisque nauibus praesertim bellicis tanta onerum copia necessario supra superficiem aquae debet esse constituta, vt memorata onerum impositione centrum grauitatis vix ac ne vix quidem infra aquae superficiem deprimi queat.

§. 241. Cum igitur, si praesentem theoriam ad naues accommodare velimus, centrum grauitatis G supra centrum magnitudinis O cadere ponendum sit, summa cura in constructione nauium erit adhibenda, vt naues stabilitatem sufficientem obtineant. Hoc autem in negotio sufficiet, si nauibus stabilitas respectu axis longitudinalis satis magna concilietur, quae est $= M \left(\frac{EF^2 \cdot D}{\nu V} - OG \right)$; cum enim fuerit $\frac{EF^2 \cdot D}{\nu V} > OG$ multo magis erit $\frac{AB^2 \cdot D}{\mu V} > OG$, quia in omnibus nauibus longitudo AB multo maior est quam latitudo EF . Vulgo namque longitudo AB quadrupla statuitur latitudinis EF , ex quo $\frac{AB^2 \cdot D}{\mu V}$ circiter decies et sexies maius fit quam $\frac{EF^2 \cdot D}{\nu V}$, quia numeri μ et ν nullo casu a se inuicem multum discrepant. Quanquam enim stabilitas nauium respectu axis latitudinalis multo maior esse debet, quam stabilitas respectu axis longitudinalis, tamen ea satis fiet in gens, si modo stabilitas respectu axis longitudinalis sit aliqua. Quamobrem sufficiet stabilitatem respectu axis longitudinalis tantam effecisse, quantam circumstantiae requirunt.

§. 242. Cum autem nullum sit dubium, quin nauis, quo maiorem habeat stabilitatem, eo sit perfectior cen-
sen-

fenda, tum enim non solum aduersitates tempestatum minore periculo subit, sed etiam maiores vires sustinere valet; hanc obrem conueniet naues ita fabricari vt excessus quantitatis $\frac{EF^2 \cdot D}{yV}$ supra OG sit quam fieri potest maximus. Possét quidem iste excessus ad lubitum multiplicari augenda area sectionis aquae, sed quia hinc alia nascuntur incommoda, modus quidam est ponendus, quem transgredi non liceat. Definietur autem iste modus cum vsu, cui nauis quaeque destinatur, tum etiam aliis nauium non minus necessariis proprietatibus, quae non nimis amplam aquae sectionem admittunt; interim tamen id nunc maxime est necessarium, vt quantitas $\frac{EF^2 \cdot D}{yV}$ notabiliter intervallum OG superet, alioquin enim nauis nequidem aquae committi posset.

§. 243. Videamus igitur ante omnia quantum valorem haec quantitas $\frac{EF^2 \cdot D}{yV}$ circiter praebeat. Ac primo quidem constat volumen partis aquae submersae V maius esse pyramide basin habente sectionem aquae 2D et altitudinem = CD, seu esse $V > \frac{2}{3} D \cdot CD$; contra vero minus est V quam prisma eiusdem basis 2D eiusdemque altitudinis CD, seu erit $V < 2 D \cdot CD$. Videtur autem satis prope accipi posse $V = D \cdot CD$, tantum enim foret volumen carinae, si ea terminaretur rectis a singulis circumferentiae sectionis aquae punctis ad spinam ab normaliter ductis. Quanquam enim naues circa medium gibbosiores esse solent, quam in tali figura, tamen ad proram ac puppim tantundem fere deficit, quantum gibbositas addit: hancque ob rem assumamus $V = D \cdot CD$ vnde stabilitas respectu axis longitudinalis prodit = $M \left(\frac{EF^2}{yCD} - OG \right)$.

124 DE STABILITATE SITVS AEQVILIBRII.

§. 244. Centrum magnitudinis carinae circiter cadet infra sectionem aquae intervallo $CO = \frac{1}{3} CD$, si igitur centrum grauitatis totius nauis caderet in ipsam sectionem aquae foret $OG = \frac{1}{2} CD$, ponamus autem, ne nos vlli periculo exponamus $OG = \frac{1}{2} CD$. Hoc nunc valore sub-stituto debeat esse $\frac{EF^2}{vCD} > \frac{1}{2} CD$ seu $EF > CD \sqrt{\frac{v}{2}}$: tri- buamus quoque ipsi v maiorem valorem, quam vnquam habere solet, scilicet sit $v = 10$, debeatque esse $EF > CD \sqrt{5}$. Quocirca cuiusuis nauis maximam latitudinem in superficie aquae plus quam duplo maiorem esse oportet quam profunditatem, ad quam sub aquam mergitur. Quodsi igitur fiat $EF = 3 CD$, erit stabilitas respectu axis longitudinalis certo maior quam $M (\frac{9}{10} CD - \frac{1}{2} CD)$ hoc est maior quam $\frac{2}{5} M \cdot CD$, quae quantitas stabilitatis sufficere potest.

§. 245. Ex his iam facile erit pro nauibus cum ra- tione structurae tum onerum imponendorum diuersis ratio- nem assignare, quam latitudo sectionis aquae ad profun- ditatem carinae tenere debet, vt stabilitas fiat satis ingens. Si enim centrum grauitatis totius nauis cadat vel in ipsam superficiem aquae vel aliquantillum altius, ita tamen vt eius distantia a superficie aquae sextam partem profundi- tatis CD non superet, tum sufficet latitudinem EF tri- plam statuere profunditatis CD ; sin autem centrum gra- uitatis altius cadet, vt sit $OG = CD$, tum oportebit latitudinem EF circiter quadruplum profunditatis CD con- stitui. At si centrum grauitatis G infra superficiem aquae fuerit positum, ita vt sit $OG < \frac{1}{3} CD$ puta $= \frac{1}{4} CD$, tum satis erit, si latitudo EF aliquantulum plus quam du- plo accipiatur quam CD . Quodsi autem OG omnino

eua-

evanescat et latitudo EF duplo sumatur maior, quam profunditas CD, tum stabilitas erit $= \frac{2}{3} M \cdot CD$, hoc est tanta, quanta inuenta est pro casu $OG = \frac{1}{2} CD$ et $EF = 3 CD$.

§. 246. Definita nunc stabilitate respectu axis longitudinalis, paucis videndum est, quanta prodeat stabilitas respectu axis latitudinalis. Quoniam enim longitudo AB circiter quadruplo maior accipi solet quam latitudo EF, erit stabilitas respectu axis latitudinalis $M (\frac{1+\mu CD}{\mu} - \frac{1}{2} CD)$ si quidem fuerit $EF = 3 CD$ et $OG = \frac{1}{2} CD$. Vnde si ponatur $\mu = 10$, erit stabilitas $= 14 M \cdot CD$; quae plus quam tricies maior est quam stabilitas respectu axis longitudinalis. Necessè autem est vt stabilitas respectu axis latitudinalis multis vicibus maior sit, quam stabilitas respectu axis longitudinalis, quia omnis nauis multo fortius resistere debet inclinationibus versus proram puppimue, eo quod maximae vires, quibus nauis exponitur, ad inclinationem versus proram tendunt.

§. 247. Vt autem rem generaliter expediamus, ponamus esse volumen carinae $V = \frac{2D \cdot CD}{m}$ vbi m est numerus circiter $= 2$. Sit porro $OG = \frac{CD}{n}$, cuius numeri n valorem ex figura et oneratione nauis definiri oportet, minor autem n vnitatem esse non potest, quia centrum gravitatis nauis intra corpus nauis cadere debet. Hunc fiat $EF = p \cdot CD$ et $AB = q \cdot EF = pq \cdot CD$, quibus positis erit stabilitas nauis respectu axis longitudinalis $= M \cdot CD (\frac{mpq}{\mu} - \frac{1}{n})$, et stabilitas respectu axis latitudinalis $= M \cdot CD (\frac{mp^2q^2}{2\mu} - \frac{1}{n})$. Quod si ergo requiratur vt stabilitas respectu axis longitudinalis sit $= \frac{M \cdot CD}{2}$, quam iam vidimus esse

sufficientem, cum nulla fere nauis habeat maiorem erit $\frac{m \cdot p \cdot p}{2v} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ et $p = \sqrt{\left(\frac{v}{m} + \frac{2v}{n}\right)}$, vnde fit $EF = CD \sqrt{\left(\frac{v}{m} + \frac{2v}{n}\right)}$.

§. 248. Si nunc plures naues magnitudine inaequales at similiter constructas et oneratas concipiamus, tenebunt earum pondera M rationem triplicatam laterum homologorum; vnde cum stabilitas respectu axis siue longitudinalis siue latitudinalis sit vt $M \cdot CD$, erunt nauium similium stabilitates, in ratione quadruplicata laterum homologorum. Momenta autem virium venti ad naues similes inclinandas tantum sunt in triplicata ratione laterum homologorum, ex quo nauium similium eae, quae sunt maiores, inclinationibus magis resistent quam minores. Naues scilicet maiores, si quidem velorum superficies teneant rationem duplicatam laterum homologorum, minorem perturbationem in situ sui aequilibrui patientur, quam naues minores.

§. 249. Si nunc cum ex his tum ex reliquis principiis fuerit determinata proportio, quam longitudo, latitudo, et profunditas carinae inter se tenere debent facile erit quantitatem nauis assignare, cuius pondus praescribitur. Detur itaque volumen carinae quod fit $= V$, quia ab eo pondus nauis pendet, sitque superficies sectionis aquae $= \frac{AB \cdot EF}{\kappa} = 2D$, volumen carinae $= \frac{2D \cdot CD}{m} = \frac{AB \cdot EF \cdot CD}{m \cdot \kappa}$, ac ponamus esse hanc inuentam legem, qua esse debeat $EF = p \cdot CD$ et $AB = q \cdot EF = pq \cdot CD$ prodibit volumen carinae quod est datum, $V = \frac{p \cdot pq \cdot CD^3}{m \cdot \kappa}$. Quoniam nunc p , q , m et κ sunt numeri dati, erit $CD = \sqrt[3]{\frac{m \cdot \kappa \cdot V}{p \cdot pq}}$; inuenitur igitur profunditas carinae CD , ex qua
tum

tum latitudo tum longitudo eius cognoscerur. Nautis itaque construi poterit, quae tam pondus habeat datum quam stabilitatem datam.

§. 250. In nauibus bellicis grandioribus sumi solet latitudo carinae $EF = \frac{5}{8} CD$, atque longitudo $AB = 4 EF$: erit ergo $p = \frac{5}{8}$ et $q = 4$. Hinc ergo stabilitas respectu axis longitudinalis erit $= M \cdot CD \left(\frac{25m}{8v} - \frac{1}{n} \right)$, cum igitur hae naues habeant stabilitatem affirmatiuam, erit $25mn > 8v$. Ponatur $m = 2$, et $v = 10$, quoniam supra ostendimus hos valores proxime his litteris respondere, erit $50n > 80$ et $n > \frac{8}{5}$; erit ergo $OG < \frac{5CD}{8}$, seu distantia centri grauitatis nauium harum a centro magnitudinis carinae minor erit, quam quinque octantes profunditatis carinae. Cadit autem in huiusmodi nauibus centrum grauitatis, ob tormenta, quae omnia supra aquam sunt posita, supra aquae superficiem; quodsi ergo ponatur $OG = \frac{1}{2} CD$ seu $n = 2$, erit stabilitas respectu axis longitudinalis $= \frac{1}{2} M \cdot CD$.

§. 251. Quoniam in maioribus nauibus, si quidem similitudo obseruetur stabilitas crescit in ratione quadruplicata laterum homologorum, cum tamen vires inclinantes ad summum in ratione triplicata crescant; in maioribus nauibus sine periculo stabilitate minore contenti esse possumus. Scilicet si stabilitas exponatur per hanc expressionem $\frac{1}{x} M \cdot CD$, pro x in maioribus nauibus satis magnum numerum tuto accipere licet, quod in minoribus non sine periculo fieri posset. Hanc obrem in nauibus illis maximis bellicis sine periculo assumitur $EF = \frac{5}{8} CD$, quae proportio in minoribus nauibus damnum afferret, si quidem similis centri grauitatis positio adesset. Quodsi igitur

igitur sic $OG = \frac{1}{2}CD$, pro nauibus maximis sumi poterit $EF = \frac{5}{8}CD$, pro minoribus autem EF ad CD maiorem rationem tenere debet, triplam scilicet quam supra assignauimus.

§. 252. Quoniam virium naues inclinantium momenta sunt proxime vt pondera nauium, naues diuersae magnitudinis ita construi conueniet, vt earum stabilitates teneant rationem ponderum. Sint itaque duae naues, quarum maioris pondus sit $= M$, latitudo carinae EF , profunditas eius CD ; minoris vero nauis pondus sit $= m$, carinae latitudo ef , profunditas cd , in vtraque autem naui interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis aequetur semissi profunditatis carinae. Sit porro $cd = \frac{CD}{n}$, atque in maiore naui $EF = \frac{5}{8}CD$, quam rationem ad maximas naues esse accommodatam vidimus. Erit igitur stabilitas maioris nauis respectu axis longitudinalis $= M \left(\frac{EF^2}{v \cdot CD} - \frac{1}{2}CD \right) = \frac{1}{8}M \cdot CD$ posito $v = 10$: minoris vero nauis stabilitas erit $= m \left(\frac{n \cdot ef^2}{10 \cdot CD} - \frac{CD}{2n} \right)$; quae cum stabilitates esse debeant vt M ad m erit $nn \cdot ef^2 = 5CD^2 + \frac{5n}{4}CD^2$ hincque $ef = \frac{CD}{2n} \sqrt{(5n + 20)} = \frac{cd}{2} \sqrt{(5n + 20)}$.

§. 253. In nauibus igitur diuersae magnitudinis quae tamen in hoc conueniant, vt interuallum inter centra magnitudinis et grauitatis aequetur semissi profunditatis carinae, ratio inter latitudinem carinae et eius profunditatem eo erit maior, quo naues fiant minores. Ponamus ergo in nauibus maximis, in quibus sumi solet $EF = \frac{5}{8}CD$ esse $CD = 20$ pedum, atque habebimus sequentes proportionem inter profunditates carinae minores et latitudines.

Pro-

Profunditas carinae	Latitudo carinae
20 ped.	50, 00 ped.
18 ped.	45, 50 ped.
16 ped.	40, 99 ped.
14 ped.	36, 47 ped.
12 ped.	31, 94 ped.
10 ped.	27, 39 ped.
8 ped.	22, 81 ped.
6 ped.	18, 17 ped.
4 ped.	13, 42 ped.
fi generaliter m ped.	$\sqrt{5m(5+m)}$ ped.

§. 254. Quodsi autem ad datam nauem, cuius pondus est M , et stabilitas $= \frac{1}{3} M \cdot CD$ et $EF = \frac{5}{2} CD$, qualem modo instar fundamenti assumimus, aliam construere velimus, in qua interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis aliam teneat rationem ad profunditatem carinae, cuius tamen stabilitas se habeat ad stabilitatem illius in ratione ponderum. Sit huius alterius nauis pondus $= m$, latitudo carinae ef , profunditas cd , et distantia inter centra grauitatis ac magnitudinis $= \frac{1}{\lambda} cd$: erit huius stabilitas respectu axis longitudinalis $= m(\frac{ef^2}{10cd} - \frac{1}{\lambda} cd)$. Debebit ergo esse $\frac{ef^2}{10cd} - \frac{1}{\lambda} cd = \frac{1}{3} CD$: ponatur iam $CD = 20$ ped. et $cd = m$ ped. erit $ef^2 = 25m + \frac{10}{\lambda} mm$ seu $ef = \sqrt{25m + \frac{10}{\lambda} mm}$ ped. quae expressio pro norma accipi potest, ad rationem inter latitudinem et profunditatem carinae cuiusque nauis determinandam.

§. 255. Haec vero regula non ita striete est obseruanda, quasi de ea recedi nullo modo liceret; quaecunque enim inuenta fuerit ratio inter latitudinem ac pro-

funditatem carinae, tuto semper ratio maior accipi potest. Namque quo maior latitudo ad datam profunditatem adiungatur stabilitas prodibit eo maior, maiorque naui perfectio conciliatur. In omni scilicet naui expedit latitudinem respectu profunditatis tantam constituere, quam reliquae circumstantiae permittunt; quare si reliqua requisita, quae naues habere debent, patiantur, ut latitudo maior naui detur, quam regula data postulat, hoc incrementum maxime erit amplectendum. Minorem autem latitudinem, quam regula data praebet, cum data profiuditate minime coniungi conuenit; etsi enim reliqua nauium requisita minorem latitudinem postulent, tamen potius his reliquis requisitis vis erit inferenda, quam ut in eorum gratiam stabilitas nimium diminuatur.

§. 256. Diminutione autem profunditatis carinae respectu latitudinis eius non solum maior stabilitas nauibus affertur, quod quidem per se est commodum maximi momenti, sed etiam naues plura alia commoda non contemnenda consequuntur. Hac enim diminutione fit ut naues eiusdem molis in aqua ad minorem profunditatem immergantur, hocque ipso in maris regionibus minus profundis tuto cursum instituere queant, quas aliae naues, quae in aqua maiorem profunditatem occupant, nequidem ingredi audent. Praeterea etiam huiusmodi naues, quae aquae minus profunde immerguntur complures scopulos in mari latentes euitant, tutoque supra eos praetereunt, ad quos, si aquae profundius immergerentur alliderent, atque naufragii periculum subirent. Quae rationes coniunctim eo magis suadent, ut profunditas ad quam naues mergantur, quantum fieri potest, diminuatur.

§. 257. Haec autem praecepta, quae hactenus de stabilitate tradidimus, potissimum sunt ad naues iam debito modo oneratas accommodata; verum in constructione nauium non sufficit ad hoc solum attendere, vt naues, cum completam onerationem sint nactae, in situ erecto firmiter persistant; sed etiam naues ita comparatas esse oportet, vt vel minori onerum copia onustae, vel adeo vacuae in situ aequilibrii stabilitate sint praeditae. Quamquam enim navi, quae vacua nullam etiam habet stabilitatem, per onerationem stabilitas conciliari potest, tamen initio naues vacuae aquae immittuntur, ex quo, si stabilitate carerent, mox subuersioni maximisque hinc oriundis damnis forent obnoxiae. Quamobrem in constructione nauium summa cura erit adhibenda, vt primum vacuae aquae commissae tum vero etiam minori onerum copia onustae stabilitatem habeant; eam quidem non admodum magnam, quia hoc statu impetibus tempestatis nondum solent exponi, sed tamen aliquam, quae sufficiat ad navem contra minores vires in situ erecto conseruandam.

§. 258. Ac primum quidem perspicuum est, si navis siue vacua siue vtcunque onusta stabilitatem habuerit respectu axis longitudinalis, eandem multo stabilius fore constitutam respectu axis latitudinalis. Quocirca sufficiet naues ita construxisse, vt quaecunque eius portio aquam subeat situs aequilibrii stabilitatem habeat respectu axis longitudinalis. Minime autem navis aquae immergitur, si est vacua, ex quo superfluum foret stabilitatem pro minoribus immersionibus quaerere. Totum igitur hoc negotium huc redit, vt quaecunque navis sectio horizontalis, posita intra sectiones aquae, quas navis obtinet, si vel est vacua

vel completam onerationem confecta, vicem sectionis aquae subeat, stabilitas adfit respectu axis longitudinalis. Quoniam vero haec stabilitas ex maxima sectionis aquae latitudine definitur, sectionem carinae transuersalem ampliffimam considerari oportebit, quippe quae cuiusuis sectionis horizontalis maximam latitudinem praebet.

Tab. X.
fig. 1.

§. 259. Sit igitur EFD sectio ampliffima, cuius figuram quaerimus, vt naus requisita proprietate fit praedita. Cadat naus vacuae centrum grauitatis ad interuallum DG supra fundum carinae, perinde autem est siue in planum sectionis ampliffimae incidat siue minus: atque ponamus centrum grauitatis in eadem altitudine permanere, si successiue naus magis magisque oneretur. Tuto autem hoc assumere licet, nam imponendis oneribus centrum grauitatis ad profundiorum potius situm redigi solet; ex quo si stabilitas fuerit nauis conciliata, pro situ centri grauitatis in G, eo maiorem habebit nauis stabilitatem, si centrum grauitatis profundius fuerit situm. Transeat nunc sectio aquae per ef cuius maxima latitudo sit haec ipsa recta ef ponaturque portio aquae submersae profunditas Dc = x, semilatitudo sectionis aquae ce = y; atque interuallum constans DG = f. Portio aquae immerfae centrum magnitudinis proxime erit in o, vt sit Do = $\frac{2}{3}x$, vnde fiet oG = $f - \frac{2}{3}x$. Ex his erit stabilitas respectu axis longitudinalis = $M \left(\frac{4y^2}{vx} - f + \frac{2}{3}x \right)$ vbi pro ν circiter 9 vel 10 accipi oportet.

§. 260. Debet ergo in ea saltem sectionis ampliffimae portione, quae sectiones aquae suppeditare potest, esse $\frac{4y^2}{vx} > f - \frac{2}{3}x$, seu $4yy > 9fx - 6xx$ posito 9 pro ν . Quare si capiatur $4yy = 9fx - 6xx$, haecque curua describa-

scribatur, neceſſe eſt, vt ſectio ampliffima nauis hanc figuram in ſe includat, ſaltem eius portionem, quae intra ſectio- nes aquae extremas eſt poſita. Perſpicuum autem eſt hanc aequationem $4yy = 9fx - 6xx$ eſſe ad ellipſin DEHF cuius axis verticalis $DH = \frac{3}{2}f$, alterque horizontalis $EF = \frac{3\sqrt{6}}{4}$. Data ergo eleuatione centri grauitatis G ſupra fun- dum nauis D, capiatur $DH = \frac{3}{2}DG$, pro vno ellipſis axe, et $EF = \frac{3}{4}DG\sqrt{6}$ pro altero, ita vt ſit $DH^2 : EF^2 = 2 : 3$ atque deſcripta ellipſi HEDF, notatiſque ſectio- nibus aquae extremis EF et *ef*, quarum illa EF nauis pe- nitus onuſtae haec *ef* nauis vacuae reſpondeat, ſectio- nem nauis ampliffimam ita comparatam eſſe oportet, vt ſpa- tium ellipſis E *ef* F in ſe includat, pariterque in puncto D terminetur, quippe quod eſt imum nauis.

§. 261. In nauis vacua centrum grauitatis G commu- niter ſupra ſectio- nem aquae, quae nauis etiam oneratae competit, cadit. Cum enim plerumque pars nauis extra aquam eminens multo ſit maior, quam pars ſubmerſa ob ingentem eleuationem, quae cum verſus proram tum ve- ro maxime verſus puppim fieri ſolet, etiam centrum grauitatis ſupra mediam altitudinem cadet. Quoniam igitur in ellipſi inuenta centrum C infra G cadit, et qui- dem parte tertia ipſius CD, axis tranſuerſus EF proxi- me ſectio- nem aquae nauis onuſtae competentem repraeſen- tabit; ac hanc ob rem latitudo ſectio- nis aquae *ef*, quam obtinet nauis vacua minor erit quam EF. Quamobrem ſectio nauis ampliffima tuto ita confici poteſt, vt verſus fundum D conuergat: interim tamen conuergentia non de- bet eſſe nimis magna, in profunditate enim *c* ſectio am- pliffima maior eſſe debet, quam recta *ef*, quo ipſo con-

vergentia limitatur. Cognito autem loco centri grauitatis nauis vacuae, descriptaque ellipsi inuenta, statim iudicari poterit vtrum nauis vacua aquae immissa stabilitatem sit habitura, an secus; ac praeterea quanta ea futura sit.

§. 262. Constructa autem ad normam quamcunque nauis, ingestaque debita onerum copia, ab ipsa onerum per nauem distributione stabilitas plurimum pendet. Quamquam enim onera per primum requisitum ita disponi debent, vt totius nauis centrum grauitatis in eam rectam verticalem incidat, in qua versatur centrum magnitudinis partis submersae, tamen vt iam supra vidimus, huic requisito innumerabilibus modis satis fieri potest, cum id tantum esset efficiendum, vt centrum grauitatis in assignatam rectam verticalem incidat. Nunc vero cardo rei potissimum in hoc versatur, in quonam huius rectae verticalis puncto centrum grauitatis constituatur; ad stabilitatem enim nauis definiendam nosse oportet interuallum, quod inter centra grauitatis ac magnitudinis est interiectum. Ex formula enim stabilitatis data intelligitur, eo fore stabilitatem maiorem, quo minus fuerit illud interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis, si quidem centrum grauitatis supra centrum magnitudinis sit positum.

§. 263. Hinc itaque colligitur, quo magis oneribus disponendis centrum grauitatis nauis deprimatur, eo magis stabilitatem auctum iri; ex quo cum in nauibus stabilitas, quantum fieri potest, sit augenda, haec nascitur pro dispositione onerum regula, vt centrum grauitatis nauis quam maxime deorsum perducatur. Huic igitur regulae satisfiet, si onera ad tantam profunditatem collocentur, quantum circumstantiae permittunt; quo quidem in negotio

tio aduertendum est, vt ea onera, quae maximam habeant grauitatem specificam, profundissime ponantur, quo grauioribus enim oneribus infima carinae cavitatis impleatur, eo magis centrum grauitatis deorsum redigetur. Regula haec in praxi etiam sollicitè obseruatur, solent enim pleraeque naues circa infimam cavitatem grauissimis materiis, cuiusmodi sunt saburra, lapides, ferrum etc. adimpleri, quae plerumque per se nullius prorsus sunt vtilitatis, sed eum tantum in finem ingeruntur, vt nauis stabilitas augeatur.

§. 264. Haec rerum alias inutilium ingestio eo magis est necessaria, quo reliquae merces vehendae minorem habent grauitatem specificam. Quodsi enim talibus mercibus leuioribus infima nauis cavitatis impleretur, ob earum exiguum pondus centrum grauitatis non solum parum deorsum detraheretur, sed etiam a reliquis mercibus superiorem partem nauis occupantibus multo magis eleuaretur. Si ergo onera imponenda ita fuerint comparata, vt perinde sit, quoniam in loco quaeque collocentur, primum quidem omnia quam maxime deorsum erunt detrudenda; tum vero ea, quae sunt specificè grauiora, ad infimum locum, leuiora autem ad supremum collocari oportebit, sin autem plura onera maximi ponderis ex sua natura in superiore nauis parte versari debent, vt tormenta in nauibus bellicis, tum nisi stabilitas nauis per se satis sit magna, aliis ponderosissimis oneribus infima nauis cavitatis erit adimplenda. Ex his autem satis superque perspicitur, quomodo nauium onerationem dirigi oporteat, vt per eam maximum stabilitatis incrementum obtineatur.

§. 265. Vt autem distinctius intelligatur, quantum translatione onerum stabilitas naui afficiatur atque vel augeatur vel diminuatur, calculum subduci conueniet. Primo quidem ex formulis datis, quibus stabilitatis quantitas exprimitur, perspicuum est, si transpositione onerum in nauis contentorum centrum grauitatis per spatium quoddam s deorsum perducatur, tum stabilitatem nauis respectu cuiusuis axis augeri quantitate $= M. s$ denotante M pondus nauis. Quodsi autem onerum transpositione centrum grauitatis sursum promoueatur per interuallum $= s$, tum stabilitas diminuatur quantitate $= M. s$. Quoniam enim onera, quae in nauis iam actu insunt, tantum transponuntur, neque sectio aquae, neque volumen partis submersae mutabitur, sed vel depreffione vel eleuatione centri grauitatis solum interuallum inter grauitatis centrum et centrum magnitudinis partis submersae vel diminuatur quantitate s vel augebitur; ex quo stabilitas priori casu quantitate $M. s$ augebitur, posteriori vero casu tantundem minuetur.

Tab. X.
fig. 2.

§. 266. Sit nunc in nauis quacunque cuius pondus $= M$. DG recta illa verticalis in qua centrum grauitatis totius nauis G sit situm: atque ponatur onus aliquod, cuius pondus sit $= P$, transferri in locum humiliorem p , qua translatione quantum stabilitas augeatur, inuestigemus. Ponamus autem primum, oneris huius P centrum grauitatis P tam ante quam post translationem situm esse in ipsa recta verticali DG per centrum grauitatis nauis G transeunte. Separemus igitur saltem cogitatione pondus hoc P a tota nauis, ita vt reliquae nauis pondus sit $= M - P$; eiusque centrum grauitatis positum sit in γ . Cum vero totius nauis centrum grauitatis versetur in G , erit $(M - P)\gamma G = P.PG$

P.PG ideoque $G\gamma = \frac{P.PG}{M-P}$. Translatum iam fit pondus P in situm p , sitque nunc totius nauis centrum grauitatis in g , erit $P.pg = (M-P)\gamma g$ seu $P.pG - P.Gg = (M-P)Gg - P.PG$, ex qua aequatione oritur $Gg = \frac{P.Pp}{M}$. Descensu ergo oneris P per spatium Pp stabilitas augetur quantitate P. Pp.

§. 267. Quanquam autem hic centrum grauitatis oneris deorsum moti in ipsa recta verticali DG posuimus, tamen idem augmentum stabilitatis obtinebitur, si in nauis loco quocunque onus verticaliter deorsum transferatur. Nam ponamus onus = P, cuius centrum grauitatis situm ^{Tab. X.} est in P, deorsum ferri, vt eius centrum grauitatis perueniat in p ; hacque translatione descendat totius nauis centrum grauitatis G in g vsque. Sit γ centrum grauitatis reliquae nauis M-P erit PG: $G\gamma = M-P:P = pg:g\gamma$: atque componendo $P\gamma:G\gamma = M:P = Pp:Gg$ ex qua analogia oritur $Gg = \frac{P.Pp}{M}$. Cum igitur incrementum stabilitatis sit = M.Gg erit id = P.Pp. Quoties ergo in nauis onus aliquod cuius pondus = P, in locum humiliorum defertur, stabilitas nauis augetur, et quidem producto, quod oritur si pondus oneris deorsum translatis multiplicetur per altitudinem, per quam descendit. Ex quibus quantum augmentum stabilitatis per commodam et bene directam onerationem afferatur, luculenter perspicitur.

§. 268. Inquiramus nunc etiam quantum stabilitas nauium vel appositione nouorum onerum, vel ablatione onerum, quae ante affuerant, afficiatur; vbi quidem onera tum in ipsum centrum grauitatis apponi, quam ex eo auferri ponemus, quia si vel in aliud apponantur vel inde auferantur, mutatio stabilitatis ex casu praecedente

dente definiri potest. Consideremus tantum stabilitatem respectu axis longitudinalis, sitque M pondus nauis, V volumen partis submersae, $2D$ area sectionis aquae, EF eius maxima latitudo, O centrum magnitudinis partis submersae, G centrum grauitatis totius nauis, erit stabilitas nauis respectu axis longitudinalis $= M \left(\frac{EF^2 \cdot D}{9V} - OG \right)$. Est vero uti supra vidimus $v = 9$ vel 10 proxime, et $V = D \cdot CD$ atque $CO = \frac{1}{3} CD$ circiter. Quoniam ergo est $CD = \frac{V}{D}$ erit $OG = DG - DO = DG - \frac{2V}{3D}$, atque stabilitas prodibit $= M \left(\frac{EF^2 \cdot D}{9V} + \frac{2V}{3D} - DG \right)$.

§. 269. Ponamus iam huic naui in ipso centro grauitatis G nouum apponi pondus $= P$, eo pondus nauis fiet $= M + P$, atque ideo nauis profundius immergetur. Quodsi ergo sumamus tali maiore immersione sectionem aquae eiusdem quantitatis manere, id quod tuto affirmare licet, quia latera nauis circa aquae superficiem solent esse verticalia, retinebit D post noui oneris impositionem pristinum valorem; at maius volumen aquae submergetur, quod se habebit ad volumen V ut $M + P$ ad M . Cum igitur facta hac impositione ponderis P , abeat M in $M + P$, et V in $V + \frac{PV}{M}$, at EF , D , et DG maneant inuariata, erit stabilitas nauis post impositionem ponderis P respectu axis longitudinalis $= (M + P) \left(\frac{M \cdot D \cdot EF^2}{9V(P + M)} + \frac{2V(M + P)}{3M \cdot D} - DG \right) = \frac{M \cdot D \cdot EF^2}{9V} + \frac{2V(M + P)^2}{3M \cdot D} - M \cdot DG - P \cdot DG$; quae excedit stabilitatem pristinam quantitate $+ \frac{2P \cdot V \cdot (2M + P)}{3M \cdot D} - P \cdot DG$.

§. 270. Quodsi autem ponamus pondus hoc P non in centro grauitatis nauis G sed alio loco puta P imponi, augetur nauis stabilitas insuper incremento $= P \cdot GP$, unde

de totum stabilitatis incrementum, quod ex hac impositione ponderis P est natum erit $= \frac{2P \cdot V(2M+P)}{3M \cdot D} - P \cdot DP$. Cum autem pondus hoc P valde exiguum ponitur respectu totius navis, loco $2M + P$ scribere licet $2M$, ex quo stabilitatis accrementum erit $= \frac{4P \cdot V}{3D} - P \cdot DP$. Quoniam vero porro est $\frac{V}{D} = CD$ erit stabilitatis augmentum $= P(\frac{4}{3}CD - DP)$. Ex quibus perspicitur non solum omnia pondera quae naui infra aquae superficiem ingeruntur stabilitatem augere, sed etiam quae supra aquae superficiem adduntur, dummodo eorum distantia a superficie aquae non excedat tertiam partem profunditatis carinae.

§. 271. Vt igitur normam habeamus, quam sequi conueniat, cum in appositione tum in ablatione onerum supra sectionem aquae ACB alia concipienda est sectio horizontalis MLN cuius a sectione aquae distantia LC aequalis sit tertiae parti profunditatis carinae CD. Notata autem hac superficie horizontali MLN, omnia onera quae infra eam in nauem imponuntur stabilitatem nauis augebunt, contra vero onera quae supra eam superficiem adduntur, stabilitatem diminuent. Quod vero ad ablationem seu eiectionem onerum attinet ex iisdem principiis manifestum est si onera auferantur ex parte nauis superiori MNβα tum stabilitatem nauis augeri, contra vero si onera ex parte inferiori Mαb N eiiciantur, tum stabilitatem diminui. His autem singulis casibus tam incrementa quam decrementa stabilitatis inuenientur, si onera tam imposita de nouo quam ablata multiplicentur per suas a superficie horizontali MN distantias, ex quo intelligi licet, quantum lucrum tam ex adiectione quam ablatione onerum expectari debeat.

Tab. X.
fig. 5.

§ 272. Quamuis vox stabilitatis, qua in hac doctrina utimur, omnino noua videatur, tamen res ipsa omni tempore satis fuit nota; quoniam enim securitas navigationis potissimum a stabilitate nauium, qua in situ erecto persistere conantur, pendet, haec res nautis ignota manere non potuit, etiamsi nemo adhuc distincte ostenderit, quomodo ea sit comparata. Naues autem, quae sufficienti stabilitate sunt praeditae, nautis ita describi solent, ut dicant, eas velis portandis esse pares, seu vim velorum sustinere valere, quae definitio a nostra non multum discrepat. Cum enim vis venti in vela impingens non solum nauem propellat, sed etiam inclinare conetur, perspicuum est, nisi nauis satis magnam habeat stabilitatem, eam a vi venti nimium inclinari debere, praecipue in cursu obliquo, quo vis velorum nauem ad latera inclinare annitur. Quo igitur maiorem vim venti nauis sine periculosa inclinatione sustinere valet, eo maiori stabilitate praedita sit, necesse est.

§. 273. Saepe numero autem euenire solet, ut naues, quando iam sunt constructae atque aquae immissae, nimis paruum stabilitatem habere deprehendantur; quod quidem vitium, ex theoria nostra exposita non solum facile praevideri sed etiam euitari possit. Ac Paulus Hostis scriptor de re nautica celebris atque expertus refert plerasque naues in Gallia fabricari solitas hoc vitio laborare, ut nisi medela adhibeatur, velorum vim sustinere non valeant; atque ob hunc defectum complures naues perire solere. Ratio scilicet huius vitii in hoc est posita, quod vel pro data carinae latitudine profunditatem nimis magnam vel pro data profunditate latitudinem nimis paruum effecerint;

ex quo stabilitas nimis debilis existit. Plerumque igitur testimonio eiusdem Auctoris naues in Gallia constructas noua contabulatione extrinsecus muniri oportuit, vt ipse maior stabilitas conciliaretur; cuius medelae ratio cum nostra Theoria apprime congruit; hoc enim munimento amplitudo nauis ac proinde etiam sectio aquae dilatatur, vt eidem profunditati carinae maior latitudo eiusdem respondeat.

§. 274. Quo frequentius igitur hoc vitium in constructione nauium committi solet, eo maior cura erit adhibenda, vt medela maxime idonea reperiat, quae non simul, si adhibeatur, nauibus alia vitia inferat, cuiusmodi est ea contabulatio, cuius Auctor allegatus mentionem facit, qua resistentia nauis in aqua admodum augetur, celeritasque notabiliter retardatur. Quamobrem nunc potissimum inquiramus, quo pacto nauis iam fabricatae, quae nimis exiguam habeat stabilitatem, stabilitas quam commodissime augeri queat. Ac primo quidem iam exposuimus quomodo per onerationem, onerumque translationem stabilitati incrementum addi possit, verum haec medela plerumque vel minus parum prodest, vel ob reliquas circumstantias non adhiberi potest, quin simul nauis inutilis reddatur; vt si velimus in nauis bellica omnia tormenta infra aquae superficiem detrudere.

§. 275. Ex expressione autem, qua stabilitatis quantitatem definiuimus, intelligitur stabilitatem triplici modo augeri posse. Primo enim stabilitas crescit si centrum grauitatis nauis in humiliorem locum perducatur, quod fit grauioribus oneribus deorsum transferendis, quem vero modum in praesenti negotio parum adiumenti afferre iam

indicauius. Deinde etiam stabilitas augeri potest, si centrum magnitudinis carinae altius promoueatur, quod autem sine dilatatione carinae in parte superiori fieri nequit; dilatata vero carina in parte superiori incrementum stabilitatis simul a tertio modo oritur. Tertio enim stabilitas incrementum capit, si sectio aquae fiat amplior, hoc namque modo non solum centrum magnitudinis carinae fursum ascendit, sed quod maximum stabilitatis incrementum producit, momentum sectionis aquae respectu cuiusque axis augetur. Praecipue autem efficiendum est ut momentum respectu axis longitudinalis maxime augeatur, quia hoc in omnibus nauibus solet esse minimum, atque stabilitas respectu axis longitudinalis debilissima; ex quo haec stabilitas perpetuo maxime indiget augmentatione.

Tab. XI. §. 276. Inuestigemus igitur, quantum incrementum
fig. 1. stabilitas nauis respectu axis longitudinalis AB per amplificationem sectionis aquae nanciscatur. Ac primo quidem modum vsitatum contemplemur, qua nauis circa superficiem aquae vtrinque quasi alae Mem, Nfn adiungi solent, quo fit ut sectio aquae AEBF augeatur vtrinque spatiis MEme et NFnf circa eius maximam latitudinem EF. Ponamus sectionis aquae proprie sic dictae AEBF momentum respectu axis AB esse = I, pondus nauis = M, volumen carinae = V, centrum magnitudinis carinae situm esse in O et nauis centrum grauitatis in G, erit stabilitas nauis, quam ante adiunctionem alarum habuit = $M(\frac{I}{V} - OG)$. Nunc autem momentum sectionis aquae I augeri debet aggregato omnium productorum, quae oriuntur si singulae spatiorum MEme et NFnf particulae multi-

multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe AB. Hoc igitur aggregatum seu momentum si fuerit $= i$ stabilitas naus augmentum accipiet $= \frac{M i}{V}$.

§. 277. Ad quantitatem huius momenti i aestimandam sit area $MEme$ vel $NFnf = s$; atque accipiatur in altera particula infinite parua w cuius ab axe AB distantia sit Rw , erit $i = 2fw.Rw^2$ et $s = fw$. At $\frac{fw.Rw^2}{fw.Rw}$ dat distantiam centri oscillationis areae $MEme$ ab axe AB si circa axem AB oscillaret, quae sit $= f$; ac $\frac{fw.Rw}{fw}$ dat distantiam centri grauitatis areae $MEme$ ab axe AB, quae sit $= g$. Erit itaque $fg = \frac{fw.Rw^2}{fw} = \frac{fw.Rw^2}{s}$, ex quo oritur momentum areae $MEme$ respectu axis AB, $fw.Rw^2 = fgs$ et $i = 2fgs$. Est autem vt ex natura centri oscillationis patet $f > g$, et si p et q sint horum additamentorum centra grauitatis erit $i > 2s.Cp^2$ quia autem in hoc negotio praestat pro i valorem vero minorem accipere, ponamus $i = 2s.Cp^2$; quia etiam differentia est insensibilis.

§. 278. Incrementum igitur stabilitatis, quod oritur ab adiunctione istarum alarum erit $= \frac{2Ms.Cp^2}{V} = \frac{Ms.pq^2}{2V}$. Quodsi igitur ponamus alas tantum versus proram ac puppim extendi, vt earum centra grauitatis in E et F cadant, erit stabilitatis incrementum $= \frac{M.EF^2}{2V}$ quae expressio etiam semper a vera sensibilibiter vix discrepat, quia latitudo alarum Ee et Ff vehementer parua esse solet. Sin autem area sectionis aquae proprie $AEBF = 2D$ in computum ducatur et sumatur $V = D.CD$, atque ponatur $EF = CD \sqrt{\sigma}$, eo quod ratio EF ad CD non satis magna censetur, quia stabilitas augmentatione opus habet,

144 DE STABILITATE SITVS AEQVILIBRII.

habet, erit stabilitatis incrementum $\equiv \frac{3Ms \cdot CD}{D}$. Si porro ponatur area $MEme \equiv \frac{1}{n} ABE \equiv \frac{1}{n} D$ prodibit stabilitatis incrementum $\equiv \frac{3}{n} M \cdot CD$. Idem ergo proficitur, ac si centrum grauitatis nauis G per interuallum $\equiv \frac{3}{n} CD$ deorsum foret perductum.

§. 279. Huiusmodi igitur appositione alarum stabilitas multo magis augetur, quam per translationem ponderum vix fieri potest; tantundem enim hoc modo obtinetur, quantum translatione ponderis $\equiv \frac{3}{n} M$ a superficie aquae ad imum nauis. Praeterea vero non solum ob auctam sectionem aquae stabilitas augetur, sed quia haec contabulatio infra sectionem aquae porrigitur, carinae volumen etiam amplius euadit in parte superiori, vnde eius centrum magnitudinis eleuatur. Interim tamen hinc parum lucri accedit, quia ob eandem causam nauis aliquantulum extra aquam extollitur; (semper enim aequale volumen sub aqua versari debet), ex quo eius centrum magnitudinis iterum deprimitur. Sed quia haec sunt vix sensibilia, parum interest, vtrum ascensus an descensus huius centri magnitudinis praevaleat.

§. 280. Quanquam autem huiusmodi alis stabilitas admodum augetur, tamen ex iis aliud incommodum navibus infertur, quo fit vt resistentia in motu directo ab allisione aquae ad has alas multum augeatur, in motu autem obliquo cursus aduersus venti plagam non parum impediatur. Ad scopum quidem praesentem sufficeret alas has maxime tenues effecisse, quoniam stabilitatis incrementum a sola aucta area sectionis aquae proficiscitur, quo pacto resistentiae nullus locus concederetur: sed quia nauis non perpetuo situm erectum exactissime tenet, verum ad
latera

latera saepenumero non parum inclinetur, necesse est, vt alae notabilis crassitie conficiantur, quo in quavis nauis inclinatione sectionem aquae ampliorem reddant. Interim tamen hinc intelligitur, quomodo crassities alarum ex data inclinationum quantitate definiri debeat, ne nimia earum crassitie resistentia praeter necessitatem multiplicetur.

§. 281. Vt autem clarius appareat ad quantam profunditatem alae hae ad latera nauis pertingere debeant consideremus sectionem amplissimam EDF, ad quam representent mEp et nFq sectiones verticales istarum alarum. Deinde notetur maximus angulus ad quem nauis in summa tempestate circa axem longitudinalem inclinari solet, qui sit ECp vel FCq ; ducantur tum rectae mq et np , quae designabunt, quantum alae tam supra aquam eminere, quam infra aquam demergi debeant. At spatium hoc plerumque tam fiet magnum, vt resistentia vehementer augeatur; quando enim nauis istiusmodi medela indiget, eo ipso ad inclinationes perquam est procliuius, angulusque mCp valde magnus prouenit. Quodsi autem hae alae non satis altae conficiuntur, atque nauis eo vsque inclinaretur, donec altera ala tota ex aqua esset egressa, tum cessante incremento per alam acquisito subito nauis penitus subuerteretur.

§. 282. Possint vero hae alae nauibus ita applicari, vt iis nec resistentia augeatur nec motus nauis impediatur, id quod fiet, si eae naui post maximam latitudinem EF versus puppim B adiungantur, ita vt sectionis aquae pars anterior EAF maneat immutata, posterior vero abeat in parallelogrammum rectangulum $EefF$. Quoniam enim hoc modo EF manet latitudo maxima, et corpus versus

Pars II.

T

puppim

Tab. XI.
fig. 2.

Tab. XI.
fig. 3.

puppim adiunctum aqua non irruat, siquidem navis motu directo feratur, patet resistentiam alis hoc modo adiungendis non augeri. In motu vero navis obliquo tantum abest, ut hae alae accessionem aduersus plagam venti impedian, ut eam potius adiuuent atque declinationem a cursu directo eo minorem efficiant; quemadmodum ex libro superiori abunde colligere licet, tum infra pluribus docebitur. Hancque ob causam ista alarum applicatio praecedenti longe anteferenda videtur.

§. 283. Inquiramus igitur quantum incrementum stabilitas navis per alas hoc modo adhibitas capiat. Ponamus igitur sectionis aquae primitivae AEBF momentum respectu axis AB esse $= I$, atque D denotare aream AEB seu semissem sectionis primitivae, erit ut supra vidimus $I = \frac{EF^2 \cdot D}{\mu}$, vbi μ denotat numerum 9 vel 10. Quoniam nunc pars anterior EAF adiectis alis manet immutata, erit eius momentum respectu axis AB $= \frac{EF^2 \cdot D}{2\mu}$, siquidem portiones EAB et EBF proxime aequales ponuntur. Partis vero posterioris, quae est rectangulum momentum respectu axis AB erit $= \frac{2}{3} CE^3 \cdot BC = \frac{1}{12} BC \cdot EF^3$ ex quo sectionis aquae alis auctae momentum respectu axis longitudinalis AB erit $= \frac{1}{12} BC \cdot EF^3 - \frac{D \cdot EF^2}{2\mu}$. Quocirca si volumen carinae vocetur $= V$, habebitur stabilitatis respectu axis longitudinalis incrementum $= \frac{M \cdot BC \cdot EF^3}{12 V} - \frac{M \cdot D \cdot EF^2}{10 V}$ posito $\mu = 9$.

§. 284. Quoniam EF circiter per medium sectionis aquae transire censetur, erit area EBF $= D$, quae eadem proxime aestimatur $\frac{2}{3} BC \cdot EF$, ita ut sit $BC \cdot EF = \frac{3 D}{2}$. Si ergo hic valor substituatur prodibit stabilitatis incrementum

mentum $= \frac{M \cdot EF^2}{V} \left(\frac{D}{8} - \frac{D}{18} \right) = \frac{5M \cdot D \cdot EF^2}{72V}$. Pristina vero stabilitas ante alas has adiunctas erat $= M \left(\frac{1}{V} - OG \right) = M \left(\frac{D \cdot EF^2}{5V} - OG \right)$; vnde stabilitas pristina minor fuit quam $\frac{M \cdot D \cdot EF^2}{9V}$, quae nunc augmentum accipit $= \frac{5M \cdot D \cdot EF^2}{72V}$ quod nisi interuallum OG valde sit exiguum, maius est quam stabilitas praecedens. Ac si naus sine alis nullam omnino habuisset stabilitatem, alis adiiciendis acquireret stabilitatem $= \frac{5M \cdot D \cdot EF^2}{72V} = \frac{5}{12} M \cdot CD$ denotante CD profunditatem carinae, positoque $V = D \cdot CD$ et $EF = CD \sqrt{6}$ quae sane stabilitas satis foret magna.

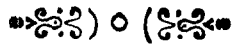
§. 285. Tali igitur alarum applicatione videmus non solum stabilitatem naus insignitur augeri, vt vel in solo incremento aequiescere possimus, si ante nulla omnino stabilitas adfuisse, sed etiam incommoda, quibus praecedens alarum appositio erat obnoxia, hic nullum habent locum. Primo enim motus naus directus his alis non impeditur, quia resistentia prae iis non augetur; deinde in motu obliquo his ipsis alis naus magis apta redditur, aduersus plagam venti progrediendi, eo quod declinatio a cursu directo diminuitur. Has igitur ob causas iste modus alas applicandi illi priori, qui vulgo in vsu esse solet maxime est antefendus. Quicquid autem sit, etiam talis alarum applicatio multis laborat difficultatibus; nisi enim hoc esset, praestaret naues statim ab initio ita fabricasse, neque per vitium ad tantam perfectionem deduci conveniret.

§. 286. Tria autem potissimum sunt vitia, quae istiusmodi alarum annexio nauibus infert; quorum primum est, quod hoc modo centrum grauitatis sectionis aquae nimium versus puppim deducitur; quod quidem est vi-

tiam non exigui momenti, quia hoc modo centrum gravitatis sectionis aquae de recta verticali per centrum gravitatis navis transeunte remouetur. At quia ob hunc defectum oscillationes navis tantum magis impetuosae redduntur, hoc vitium facile tolerari potest, dummodo alterum, quod in stabilitatis inopia versatur, tollatur. Alteram autem vitium quod cum ista alarum applicatione est coniunctum maioris est momenti; cum enim ob inclinationes navis hae alae ad notabilem profunditatem porrigi debent, iis allisio aquae ad gubernaculum vehementer impediatur. Atque tertio ob eandem rationem centrum magnitudinis carinae versus puppim perducitur, quod centrum gravitatis sequi debebit; quo nauibus quae vento propellantur, ingens incommodum affertur.

§. 287. Quae cum ita sint, eo maior opera et cura est adhibenda, ne naues, quando iam sunt fabricatae, tali emendatione indigeant, quod quidem nunc perspectis causis stabilitatem efficientibus haud difficulter praestabitur. Quae enim emolumenta ex correctione modo descripta consequuntur, ea quatenus non aliis difficultatibus sunt permixta, praestabit statim ab initio nauibus inducere, quam tum demum, cum vitium iam est commissum. In isto autem capite satis ostendimus, quomodo cum fabricatione nauium tum oneratione stabilitas satis magna possit obtineri; praecipuum vero momentum in constructione nauium est situm. Nam quantum oneratione profici potest, id plerumque non satis ad arbitrium tractari licet, ob circumstantias externas, ad quas naues accommodatas esse oportet; quibus quantum stabilitatem augeri concedatur, iam ante prospiciendum, ne nimis magnum subsidium inde expectetur.

Caput



Cap. IV.

DE MOTV NAVIVM OSCIL- LATORIO.

§. 288.

Omnes motus, quos navis aquae commissa recipere valet, commodissime ad duas classes reuocantur, quarum prima eos complectitur motus, quibus stabilitas navis relictatur, et qui ita sunt comparati, ut iis status navis aequilibrum continuo perturbetur. Huiusmodi motus oscillationum sunt similes, cum enim navis a vi quacunque ex situ aequilibrum fuerit depulsa, ob stabilitatem sese in situm aequilibrum restituere conabitur, propter motum autem conceptum in situ aequilibrum, quando eum attigerit acquiescere non poterit, verum in plagam oppositam ex eo declinabitur, quoad motus fuerit consumtus; atque hoc modo circa statum aequilibrum eundo ac redeundo oscillationes absoluet. Motus vero, qui ad alteram classem pertinent, statum aequilibrum non perturbant, sed saluo situ aequilibrum absoluntur, cuiusmodi sunt motus navis progressivus, ac rotatorius circa axem verticalem, qui vi gubernaculi produci solet.

§. 289. In capitibus praecedentibus naues in quiete adhuc constitutas considerauimus, ac primo quidem definiuimus, quomodo naues comparatas esse oporteat, ut in situ erecto aequilibrium teneant, tum vero quomodo efficiendum sit docuimus, ut situs aequilibrum sufficienti stabilitate simul sit praeditus: atque in utroque negotio expo-

fuimus, quomodo tam constructio navium quam oneratio dirigi debeant, ut his requeis maxime satisfiat. Nunc igitur pergimus ad naues in motu positas considerandas, inuestigaturi, quales regulae inde cum ad constructionem tum ad onerationem consequantur, ut naues ad motum recipiendum maxime idoneae reddantur. Cum enim hoc libro in formam navium perfectissimam inquiramus, singulos status, quibus naues exponi solent, ordine percurrere, regulasque perscrutari conuenit, quibus obseruatis nauis in quolibet statu secundum intentionem atque ad usum maxime accommodate versetur.

§. 290. In praesenti igitur capite motum navium oscillatorium examini subiicere constituimus, eo quod is sine potentiis sollicitantibus, de quibus demum postea tractabitur, cognosci queat. A quacunque enim causa nauis ex situ suo aequilibrii depellitur, vi sua propria se restituere conabitur oscillationesque peraget, ex quo praecipua oscillationum causa in vi navium propria non externa est sita. Contra autem res se habet in motibus alterius classis, qui sine potentiis sollicitantibus externis nec perseverare nec commode pertractari possunt, quamobrem eos motus postea euoluemus. Circa motum igitur navium oscillatorium hoc praecipue requiri solet, ut is sit maxime tranquillus, qui enim sibi ideam nauis omnibus numeris absolutae fingit, huius proprietatis non obliuiscetur, ut oscillationes minime sint impetuosae, sed quantum fieri potest tranquillae. Cui quidem requisito satisfieri palam est, si oscillationes reddantur maxime tardae, perspicuum enim est, quo oscillationes sint tardiores, eo minus eas fore vehementes atque tales quales a perfecta naui requiruntur.

§. 291 Cum autem naues duplici modo ex situ aequilibrum depelli queant, altero scilicet si navis vel magis vel minus aquae immergitur, quam situs aequilibrum postulat, altero vero si navis circa axem quempiam horizontalem inclinatur, duo quoque genera oscillationum omnis navis recipiet. Oscillationes nimium primi generis oriuntur, si navis ex aqua attollatur vel deorsum deprimitur; hinc enim navis alternatim in aqua descendet et ascendet, donec omnis motus fuerit consumptus, hasque oscillationes vocabimus verticales. Alterius vero generis oscillationes oriuntur, si navis vi quacunque circa axem horizontalem fuerit inclinata, tum enim navis ob stabilitatem, quae est vis sese in aequilibrium restituendi, motu pariter oscillatorio agitabitur, donec tandem in situ aequilibrum acquiescat. Hae ergo oscillationes fiunt circa axem aliquem horizontalem, eumque vel fixum vel variabilem, prout inclinatio est facta, priori casu oscillationes existunt satis regulares, posteriori vero confusae, quemadmodum haec fusius in superiori libro sunt exposita.

§. 292. Oscillationes has tam verticales, quam eas, quae fiunt circa axem aliquem horizontalem, hic vehementer exiguas et quasi infinite parvas contemplabimur. Nam uti in omni oscillationum genere, ita etiam in hoc oscillationes maiores plerumque fiunt admodum irregulares, neque inter se isochronae deprehendantur, cum contra minimae oscillationes non solum constantiorem legem sequantur, sed etiam multo facilius definiri queant. Ad nostrum praeterea institutum sufficit oscillationes tantum minimas considerare, quod si enim hae fuerint factae tardissimae seu maxime tranquillae, nullum est dubium, quin etiam oscillationes

tiones maiores futurae sint minime impetuosae. Positis igitur oscillationibus infinite paruis, sectio aquae neque quantitate neque figura mutabitur, ex quo tam calculus oscillationumque dimensio facilius euadet, quam ipsae oscillationes simpliciores magisque uniformem legem sequantur; quod fieri non posset, si variabilitas sectionis aquae in computum duci deberet.

§. 293. Quemadmodum autem ad aequilibrium constituendum duae res requiruntur, primum nempe tantum nauis volumen aquae submersum, cuius si ex aqua constaret, pondus aequale esset ponderi nauis; ac deinde ut centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis partis submersae vtrumque in eadem linea recta verticali sit positum: ita etiam dum nauis oscillationibus peragendis in statum aequilibrii tandem peruenit, vel quantitas voluminis submersi tantum mutatur, vel positio rectae lineae centra grauitatis ac magnitudinis iungentis, vel vtrumque. Oscillationes illas, quibus alterutrum tantum mutatur, vocabimus puras, illas autem quibus vtrumque mutatur mixtas. Ita oscillationes verticales erunt purae, quando inter oscillandum tantum mox maius mox minus volumen aquae immergitur, perpetuo autem recta iungens centra grauitatis et magnitudinis manet verticalis. Similique modo oscillationes alterius generis erunt purae, si continuo aequae magni nauis volumen in aqua versatur, solaque recta iungens centra grauitatis ac magnitudinis situm suum permutat.

§. 294. Ponamus iam, ut initium ab oscillationibus verticalibus faciamus, nauem aquae vel profundius immergi, vel ex aqua extrahi, ita tamen ut sectio aquae de nouo

orta

orta priori fit parallela; nifi enim navis tali motu ex ftatu aequilibrii deturbetur, ofcillationes verticales oriri non poterunt. Quodfi autem navis motu verticali vel magis vel minus immergatur, quam ad aequilibrium requiritur, tum ob volumen aequilibrio non conveniens aquae fubmerfum orientur quidem ofcillationes verticales; at fi fimul voluminis aquae fubmerfi centrum magnitudinis extra rectam verticalem per centrum grauitatis tranfeuntem excedat, tum etiam navis circa axem quendam horizontalem inclinabitur fimulque ofcillationes alterius generis conficiet. Cum igitur tali duplici motu ofcillatorio tranquillitas navis vehementer deftruatur, nauem perfectam ita comparatam effe oportebit, vt vtriusque generis ofcillationes puras abfoluere queat.

§. 295. Quodfi enim neque ofcillationes verticales perfici queant, quin fimul ofcillationes circa axem horizontalem eueniant, nec hae fine illis exiftere poffint, quaelibet caufa nauem ex fitu aequilibrii declinans duplicem motum ofcillatorium producet; ex quo motus parum tranquillus nafcitur. Neque vero tantum ob motum duplicem ofcillationes magis fiunt violentae, fed quod praecipuum eft inaequalitas temporum ofcillationum, qua fit, vt motus vtriusque generis modo magis modo minus confpirent, motum maxime perturbatum atque impetuofum producit. Quamobrem hoc tanquam praecipuum huius capitis requifitum eft ftabiliendum, quo navis ita fabricatas effe oportet, vt ad ambo ofcillationum genera feorfim fufcipienda fint aptae: hocque requifitum obtinetur fi centrum grauitatis fectionis aquae in eadem recta verticali fuerit fitum, in qua cum centrum grauitatis navis tum

centrum magnitudinis carinae iacent, quam proprietatem nauibus iam supra cap. II. induximus.

§. 296. Perspicuum autem est, si naus motu verticali aquae vel magis immergatur, vel ex aqua aliquantillum extrahatur, centrum magnitudinis partis submersae in recta verticali per centrum grauitatis totius nauis transeunte non manere, nisi centrum grauitatis sectionis aquae in eadem recta sit positum. Hanc itaque ob rem in constructione nauium haec regula minime est negligenda, quae postulat, vt centrum grauitatis sectionis aquae, centrum grauitatis nauis, et centrum magnitudinis carinae in vna eademque recta verticali contineantur. Quemadmodum autem huic requisito per nauium figuram satisfieri queat iam supra in capite secundo fusius exposuimus, vbi omnes species, ad quas nauium figurae reduci queant, euoluimus. Eo maioris vero momenti est hoc requisitum, quod siue eo non solum oscillationes verticales purae existere nequeant, sed etiam oscillationes, quae fiunt circa axem aliquem horizontalem.

§. 297. Haec vero regula eatenus tantum est obseruanda, quatenus aliis regulis maioris momenti non aduersatur. Quoniam enim haec regula ex tranquillitate motus oscillatorii originem traxit, facile intelligitur, eam post poni debere aliis regulis, quae vel ex stabilitate, vel cursus celeritate, vel diminutione declinationis a cursu directo consequuntur. Ante omnia enim incolumitas nauis maxime est spectanda, atque efficiendum vt nauis tuto ac sine periculo in vndis versari queat; tum sequitur cursus nauis, vt is quantum fieri potest celer reddatur, atque si nauis vento propellatur, aduersus plagam venti maxime dirigi possit.

possit. His nimirum primariis requisitis cum fuerit satisfactum, videndum est, quantum reliquis, quae incolumitatem et cursus celeritatem minus respiciunt, sed commoditatis gratia desiderantur, satisfieri queat. Neque enim conueniret requisita maioris momenti in gratiam aliorum, quae non absolute sunt necessaria, negligi.

§. 298. Repraesentet igitur figura $AEDFB$ nauem T.ab. XI. fig. 4. aquae in aequilibrio insidentem, cuius sectio aquae EF ita fit comparata; vt eius centrum grauitatis C in illa ipsa recta verticali CD sit positum, in qua cum centrum grauitatis nauis tum centrum magnitudinis partis submersae est constitutum. Immergatur iam haec nauis motu verticali aquae profundius, vt abeat in situm $aedfb$, in quo etiamnum recta iungens centra grauitatis nauis et magnitudinis partis submersae EdF erit verticalis. In hunc ergo situm peruenit nauis descendendo per spatium Cc , ex hocque situ in statum aequilibrui reuertetur ascendendo per idem spatium Cc . Quoniam enim in hoc situ $aedfb$ centra grauitatis et magnitudinis in recta verticali sunt constituta, aliam vim nauis non patietur ab aqua, nisi qua verticaliter sursum in situm aequilibrui pellatur. Quia vero oscillationes tantum infinite paruas contemplamur, omnes sectiones aquae, quas nauis durante motu per spatium Cc successiue induet, inter se aequales erunt.

§. 299. Ponamus totius nauis pondus $= M$, volumen partis submersae, cum tenet situm aequilibrui, $EDF = V$, amplitudinem sectionis aquae seu aream eius $= 2D$, et spatium $Cc = x$, quo nauis aquae profundius est immersa. Hoc igitur situ $aedfb$ aquae submersa est nauis volumen $= V + 2Dx$, maius, quam status aequilibrui
V 2
requi-

requirit, ex quo vis aquae nauem sursum vergens erit $\equiv M + \frac{2MDx}{V}$. Cum igitur navis proprio pondere deorsum nitatur vi $\equiv M$, nunc actu sursum sollicitabitur vi $\equiv \frac{2MDx}{V}$; quae ergo vis proportionalis est spatio x , quod navis est absolendum, donec situm aequilibrum attingat. Ex quo intelligitur, oscillationes, quas navis ascendendo ac descendendo alternatim perficiet, inter se esse isochronas. Quod si nunc ponamus longitudinem penduli simplicis isochroni esse $\equiv L$, debet sollicitatio qua navis in situ adb constituta sursum vergetur esse $\equiv \frac{Mx}{L}$, quae cum sit $\equiv \frac{2MDx}{V}$ erit $L \equiv \frac{V}{2D}$. Longitudo igitur penduli isochroni aequalis est altitudini cylindri, cuius basis est sectio aquae, et soliditas aequalis volumini partis aquae submersae in statu aequilibrum.

§. 300. Tempus igitur quo navis huiusmodi oscillationes absolvens ex situ imo ad summum vel contra pergit aequale erit tempori unius oscillationis seu itus reditus penduli simplicis, cuius longitudo est $\equiv \frac{V}{2D}$. Cum ergo in omni navi proxime soleat esse $V \equiv D \cdot CD$ uti supra animadvertimus, erit longitudo penduli simplicis isochroni $\equiv \frac{CD}{2}$, ex quo semissis profunditatis CD ad quam navis aquae immergitur proxime dabit longitudinem penduli isochroni: si quidem carina deorsum ita conuergat, ut volumen ipsius aequale sit cylindro cuius basis est sectio aquae et altitudo semissis profunditatis CD , ut fere fieri solet. Quare cum naues ad summum immergi soleant aquae ad profunditatem circiter 24 pedum, erit longitudo penduli simplicis isochroni 12 pedum, hincque maxime naues suas oscillationes verticales absolvent binis prope-

mo-

modum minutis secundis. Diuersarum vero nauium tempora oscillationum verticalium tenebunt rationem subduplicatam profunditatum, ad quas naues aquae immerguntur.

§. 301. Si oscillationes has quam tardissimas efficere velimus, quantitatem $\frac{V}{2D}$ maximam reddi oporteret. Quoniam autem volumen carinae V per pondus nauis, quod datum esse ponitur, determinatur, idque propterea immutari nequit, sectionem aquae $2D$ minimam fieri oporteret. Quoniam autem stabilitas nauium requirit, vt sectio aquae quam fiat amplissima, tarditas oscillationum verticalium obtineri non poterit, nisi stabilitas diminuatur. Neque vero stabilitati parum detraxisse sufficeret ad oscillationes tardiores reddendas, sed si eas vel vno minuto secundo lentiores reddere vellemus, stabilitas omnino euanesceret, situsque aequilibrui labilis fieret. Quamobrem minime erit consultum harum oscillationum verticalium rationem tantum habere in constructione nauium, sed potius praestabit eas maxime celeres admittere, vt stabilitas eo maior efficiatur. Accedit ad hoc, quod hae oscillationes parum durent, moxque euanescant, ob ingentem resistentiam quam nauis in descensu offendit; ex quo celeritas harum oscillationum ne in considerationem quidem duci meretur.

§. 302. Huius de oscillationibus nauium verticalibus tractationis, quae in libro primo erat praetermissa, comonefactus sum a Viro Celeb. Ioh. Bernoulli, cum ipsi meditationes meas de oscillationibus, quae circa axem horizontalem fiunt, et quae in nauigatione maxime sunt spectandae, perscripisssem. Arbitratur autem Vir Celeb. harum oscillationum verticalium insignem usum esse posse

ad pondera navium per experientiam inuestiganda. Quodsi enim cognita fit area sectionis aquae, quam posuimus $= 2D$, atque navis ad oscillationes huiusmodi verticales perficiendas impellatur, obseruari debet duratio harum oscillationum, ex iisque longitudo penduli simplicis isochroni definiri; quae si reperta fuerit $= L$, erit volumen carinae $V = 2DL$, ex quo simul pondus navis M innotescit. Verum ista ponderis navis determinatio non satis exacta videtur, primo quod sectionis aquae centrum grauitatis in ipsa illa recta verticali centra grauitatis navis et magnitudinis carinae iungente situm assumitur; deinde quod hae oscillationes non tam diu durant, vt longitudo penduli simplicis isochronii satis exquisite definiri possit.

§. 303. Quauquam ista penduli simplicis isochroni determinatio tantum ad oscillationes minimas atque adeo infinite paruas spectare videtur, tamen etiam pro maioribus oscillationibus valere potest, si quidem circumstantiae hypothefibus assumtis non aduersentur. Posuimus enim inter oscillandum semper aequae magnam navis sectionem horizontalem in superficie aquae esse positam, quodsi igitur idem in oscillationibus maioribus eueniat, eae oscillationes eandem tenebunt legem, minimisque erunt isochronae. Haec autem proprietas locum habebit, si navis circa sectionem aquae per satis notabile interuallum tam supra quam infra eam fuerit cylindriforme, seu omnes sectiones horizontales per hoc interuallum habeat inter se aequales, hoc enim si acciderit, oscillationes etiam maiores erunt isochronae, dummodo inter oscillandum portio navis in hoc interuallo contenta perpetuo in superficie aquae versetur. Pro oscillationibus autem verticalibus cor-
porum

porum omnino cylindricorum ista regula sine vlla exceptione valebit.

§. 304. Expositis oscillationibus navium verticalibus peruenimus ad alterum oscillationum genus, quae circa axem aliquem horizontalem absoluntur; in quibus iterum discrimen ante omnia obseruari meretur, vtrum eae sint purae an oscillationibus verticalibus contaminatae. Purae scilicet erunt istiusmodi oscillationes, quando inter oscillandum centrum grauitatis nauis immotum persistit, hoc est neque ascendit neque descendit, contra vero oscillationes erunt impurae, seu oscillationibus verticalibus mixtae, si inter oscillandum centrum grauitatis nauis vel ascendat vel descendat. Hoc enim casu ab alia vi diuersa centrum grauitatis in situm debitum redigetur, ab alia autem conuersio circa axem horizontalem producet, ex quo motus orietur mixtus ex oscillatorio verticali, et oscillatorio circa axem horizontalem; atque hinc motus ex vtroque compositus eo magis erit irregularis et succussionibus refertus, quo magis ambo illi motus oscillatorii a se inuicem discrepabunt.

§. 305. Discrimen autem horum duorum oscillationum generum non solum in ipsa motus diuersitate est positum, sed etiam vires, quibus eae oscillationes producuntur maxime inter se differunt. Cum enim nauis ex situ aequilibrii deturbatur, restitutio oritur a duabus viribus, quarum altera est ipsum nauis pondus cuius directio deorsum tendit ac per centrum grauitatis nauis transit, altera vero ex pressione aquae resultat, verticaliter sursum est directa, atque per centrum magnitudinis partis submersae transit. Nisi igitur hae duae vires se mutuo destruant, id quod

quod in statu aequilibrii accidit, vel eae inter se erunt inaequales vel tantum directiones non in eandem rectam incident, vel vtrumque. Ex inaequalitate virium istarum oriuntur oscillationes verticales purae, si quidem directiones incident in eandem rectam; sin autem vires fuerint quidem aequales, at directiones discrepent, orientur oscillationes circa axem quempiam horizontalem purae. At si nec vires fuerint aequales, nec directiones coincident, tum oscillationes orientur mixtae ex verticalibus, atque alteris, quae circa axem quendam horizontalem perficiuntur.

§. 306. Quoniam igitur ad eas oscillationes, quae circa axem horizontalem fiunt, puras producendas requiritur, vt centrum grauitatis quiescat, vel faltem a superficie aquae aequaliter maneat remotum, axis ille horizontalis, circa quem oscillationes peraguntur, per ipsum centrum grauitatis transire debet. Hoc vero etiam natura motus postulat; omnes enim vires, quae corpori cuiquam motum gyrationem imprimere valent, id circa axem per centrum grauitatis transeuntem conuertunt; vti in libro praecedente cumulate est ostensum. Vt igitur istae oscillationes purae existant, necesse est, vt, dum naus aliquantillum circa axem horizontalem per centrum grauitatis transeuntem conuertitur, volumen naus, quod in aqua versatur neque maius fiat neque minus, quam erat in statu aequilibrii. Si enim vel maius volumen naus vel minus durante conuersione aquam subiret, tum aequalitas inter pondus naus et vim ex pressionibus aquae resultantem cessaret, atque oscillationes simul verticales orirentur.

§. 307.

§. 307. Dum autem navis circa axem quemcunque horizontalem per centrum gravitatis transeuntem aliquantillum conuertitur seu infinite parum (hic enim tantum oscillationes infinite paruas consideramus) volumen perpetuo navis aequale in aqua versabitur, si centrum gravitatis sectionis aquae centro gravitatis verticaliter immineat. Quamobrem si situs navis aequilibrum ita fuerit comparatus, ut recta verticalis, in qua cum centrum gravitatis navis, tum centrum magnitudinis partis submersae est situm, simul per centrum gravitatis sectionis aquae transeat, tum navis apta erit ad oscillationes circa axem horizontalem puras suscipiendas. Supra autem vidimus eandem hanc proprietatem requiri ad oscillationes verticales puras producendas: ex quo haec proprietas eo maiori cura navibus induci debet. Atque hanc ob rem in capite secundo circa inventionem figurarum idonearum, ad quas carinae navium formentur, in hoc praecipue sumus occupati, ut centrum gravitatis sectionis aquae verticaliter immineat centro magnitudinis carinae; huiusque praecepti usus in hoc potissimum constat, ut oscillationes navium maxime tranquillae reddantur.

§. 308. Quodsi igitur navi eiusmodi figura tribuatur, ut in statu aequilibrum centrum gravitatis sectionis aquae in eandem rectam verticalem incidat, in qua posita sunt centrum gravitatis navis et centrum magnitudinis carinae, tum navis non solum apta erit ad oscillationes verticales puras absolendas, sed etiam ad oscillationes circa axem quemcunque horizontalem puras peragendas. Sin autem centrum gravitatis sectionis aquae extra rectam illam verticalem cadat, tum navis neutrius generis oscil-

lationes suscipere poterit, quin simul alterius generis oscillationes sint permixtae. Navis scilicet, a quacunque vi ex statu aequilibræ declinetur, duplicem statim motum oscillatorium recipiet, alterum verticalem, alterum circa axem quempiam horizontalem, neque villo modo effici poterit, vt alterius tantum generis oscillationes puras perficiat.

§. 309. Utilitas autem huius requisiti, quo volumus, vt centrum gravitatis sectionis aquae verticaliter immineat cum centro gravitatis navis, tum centro magnitudinis partæ submersæ, per se quidem satis perspicua, cum eo naues ad oscillationes vtriusque generis puras absolvendas accommodentur, quo ipso motus oscillatorius magis erit tranquillius minusque turbulentus. Magis vero utilitas elucebit, si consideremus oscillationes verticales per breve admodum tempus durare, alteras vero, quia resistentia minus obest, diutius manere. Quodsi igitur oscillationes verticales purae effici nequeant, eae non solum magis erunt impetuosae quam purae, sed etiam diutius durabunt, ob oscillationes horizontales cum iis permixtas. Deinde oscillationes circa axem horizontalem frequentissime occurrunt ab appulsu vndarum ad latera navis; ex quo si eae semper coniunctae essent cum oscillationibus verticalibus, multo violentioribus succussionibus navis perpetuo foret exposita. Has igitur ob rationes iure nobis postulare videmur, vt sectionis aquae centrum gravitatis in eam ipsam rectam verticalem, in qua posita sunt centra gravitatis navis et magnitudinis carinae, incidat.

§. 310. Assumamus igitur naues ita fabricatas vti capite secundo exposuimus, atque oscillationes quae oriuntur

etur a vi quacunque horizontali, qua centrum grauitatis nauis neque attollitur nec deprimitur, fiet circa axem horizontalem, eruntque purae, neque ascensu descensuue centri grauitatis perturbatae. Huiusmodi ergo oscillationibus durantibus centrum grauitatis nauis vel penitus quiescet vel mouebitur secundum directionem horizontalem vniformiter in directum. In superiori enim libro ostendimus huiusmodi motus gyatorios in quolibet corpore perinde se habere, siue corporis centrum grauitatis quiescat, siue progrediatur vniformiter in directum. Quocirca ad oscillationes nauium definiendas non habemus necesse ad motum eius progressiuum attendere, sed vtcunque nauis motu progressiuo feratur, poterimus tuto centrum grauitatis tanquam quiescens considerare.

§. 311. Constituto igitur nauis centro grauitatis in quiete oscillationes perficientur circa axem quendam horizontalem per ipsum centrum grauitatis transeuntem. Quare cum istiusmodi axes horizontales numero infiniti per centrum grauitatis nauis duci queant, innumerabiles orientur species huius oscillationum generis. Supra vero in praecedente libro ostendimus harum oscillationum alias esse regulares alias irregulares; regulares scilicet appellamus eas, quae quamdiu durant, circa eundem axem fixum et immobilem absoluntur; irregulares vero, in quibus axis ipse circa quem motus fit, perpetuo permutatur, ita vt initium cuiusque oscillationis circa alium instituatur axem, medium circa alium, finisque circa alium. Harum idcirco oscillationum irregularium determinatio maxime est difficilis, ob ipsius axis mutabilitatem, eamque propterea nequidem suscepimus; verum tamen eae; si oscillationes

regulares fuerint cognitae, satis prope ex istis colligi poterunt.

§. 312. In omni autem naui duae dantur species oscillationum regularium, quarum altera axem habet longitudinalem per centrum grauitatis nauis a puppi ad proram porrectum; altera vero circa axem latitudinalem per centrum grauitatis nauis pariter ductum absoluitur: haeque binae oscillationum species, quia in nauibus maxime conspiciuntur, prae reliquis imprimis considerari merentur. Oscillationes igitur, quae circa axem longitudinalem absoluntur ita sunt comparatae, ut quiescentibus prora et puppi latera nauis alternatim eleuentur atque deprimantur; hicque oscillatorius motus a Gallis *le Roulis* appellari solet. In altera vero oscillationum specie, circa axem latitudinalem fixa facta, alterno motu prora ac puppis eleuantur et deprimuntur, hicque motus Gallis voce *le Tangage* insignitur. Vtriusque autem motus oscillatorii cognitio in navigatione maximi momenti esse iure censetur.

§. 313. Antequam autem utrumque hunc motum oscillatorium seorsim fusius prosequamur quid utriusque commune sit videamus. Ac primum quidem se offert isochronismus utriusque harum oscillationum speciei, quo oscillationes minimae instar penduli aequalibus temporibus absoluntur. Non quidem oscillationes, quae circa axem longitudinalem fiunt, et eae, quae circa axem latitudinalem peraguntur, aequalibus temporibus absoluntur, sed in eadem naui oscillationes omnes circa axem longitudinalem inter se sunt isochronae, dummodo sint minimae, et si inter se sunt inaequales. Pari modo oscillationes circa axem latitudinalem minimae inter se sunt isochronae. Ac
prae-

praeterea eadem proprietas competit in oscillationes irregulares quae circa alios axes mutabiles perficiuntur, quamquam istae oscillationes ob axem mutabilem non facile distincte observari possunt.

§. 314. Deinde utriusque speciei oscillationes simili modo definiuntur; cum enim sint isochronae motus eorum commodissime cognoscetur, si longitudo penduli simplicis assignetur, quod suas oscillationes aequalibus temporibus absoluat. Longitudo autem penduli simplicis isochroni pro utraque oscillationum specie similiter inuenitur. Scilicet ad oscillationes circa axem longitudinalem determinandas, totius navis momentum respectu huius axis quaeri oportet, quod per stabilitatem navis respectu eiusdem axis longitudinalis divisum praebit longitudinem penduli simplicis isochroni. Pari modo si momentum navis respectu axis latitudinalis per centrum gravitatis ducti dividatur per stabilitatem navis respectu eiusdem axis latitudinalis, prodibit longitudo penduli simplicis, cuius motus oscillatorius congruet, cum oscillationibus navis, quae circa axem latitudinalem peraguntur.

§. 315. Ut igitur motum oscillatorium, qui fit ad latera navis circa axem longitudinalem per centrum gravitatis navis transeuntem definiamus, ante omnia stabilitatem navis respectu axis longitudinalis nosse oportebit: quae cum sit productum ex pondere navis M in rectam perpendiculari lineam quae fit $= f$, erit ea $= Mf$. Deinde momentum totius navis respectu eiusdem axis longitudinalis obtinebit, si singulae navis particulae multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab illo axe longitudinali atque omnia haec producta in unam summam colligantur:

ex quo momentum totius navis erit productum ex tota navis pondere M in quadratum rectae cuiusdam lineae, quae sit $=g$, ideoque $=Mg^2$. Ex his longitudo penduli simplicis isochroni oscillationibus, quae sunt circa axem longitudinalem erit $=\frac{g^2}{f}$.

§. 316. Quodsi ergo stabilitas navis respectu huius axis longitudinalis fuerit nulla, seu $f=0$, oscillationes erunt infinite lentae, hoc est nullae, id quod ipsa stabilitatis natura declarat. Namque si navis nullam habeat stabilitatem respectu axis longitudinalis atque aliquantillum ad alterutrum latus inclinetur, nulla fiet restitutio, hincque nullus motus oscillatorius, quod ipsum longitudo penduli simplicis infinite magna indicat. Quo maior autem fuerit stabilitas navis, eo minus prodit pendulum isochronum, ex quo aucta stabilitate oscillationes celeriores evadunt, si quidem momentum totius navis Mg^2 maneat idem. Quamquam autem oscillationes lentae celerioribus anteferendae sunt, tamen ideo stabilitatem navis diminui non convenit; stabilitas enim est requisitum navis essentielle, sine quo subsistere omnino nequit, et hanc ob rem minime est consultum stabilitatem imminuere, ut oscillationes tantum tardiores obtineantur.

§. 317. Stabilitate autem navis illaesa oscillationes tardiores effici possunt, si longitudo rectae g seu momentum totius navis respectu axis longitudinalis augeatur. Pendet vero haec quantitas g plurimum ab oneratione navis, cum Mg^2 sit summa omnium productorum, quae oriuntur si singula ponduscula ex quibus navis constat, per quadrata distantiarum suarum ab axe longitudinali multiplicentur. Quamobrem oscillationes tardiores reddentur, si one-

ra quantum fieri potest ab axe hoc longitudinali remouentur. Atque hinc noua nascitur regula pro operatione nauium, quam obseruare eatenus iuuabit, quatenus cum aliis regulis consistere potest. Minime enim conduceret alias regulas in gratiam huius infringere, cum haec tantum commoditatem navigationis habeat propositam.

§. 318. Praeterea autem vsus, cui nauis destinatur, ac reliquae regulae, secundum quas operationem dirigi oportet, parum admodum quantitatem g augeri permittunt. Quodsi enim omnia onera per interuallum vnus pedis ab axe longitudinali magis remoueantur, atque adeo quantitas g vno pede maior reddatur, id quod tamen ne in maximis quidem nauibus praestari queat, tamen vix sensibilis retardatio oscillationum exinde oriretur, saltem non tanta, ob quam mereantur tot translocationes suscipi. Sunt enim manente stabilitate oscillationum tempora vt interualla g , quare si iam ante fuerit g aliquot pedum, atque remotione onerum g augeatur vnitate, oscillationes tardiores fierent sui parte $\frac{1}{g}$, quae retardatio in vastis nauibus, vbi g complures pedes denotat non est sensibilis, in minoribus autem augmentum vnus pedis obtineri nequit.

§. 319. Haec omnia, quae circa oscillationes laterales ad axem longitudinalem relatas notauimus, valent quoque pro oscillationibus, quae circa axem latitudinalem peraguntur, neque id circo pro his oscillationibus easdem animaduersiones repeti necesse est. Quodsi enim stabilitas nauis respectu axis latitudinalis ponatur $= Mh$, ac momentum nauis respectu axis eiusdem latitudinalis per centrum grauitatis nauis ducti ponatur $= Mk$, erit longitudo penduli simplicis oscillationibus huius isochroni $= \frac{k^2}{h}$.
 Quod

Quod ergo in casu praecedenti erat g , hic nobis est k , et quod ibi erat f , hic est b ; unde factis his substitutionibus, locoque vocis longitudinalis posita voce latitudinalis, observationes factae circa piorem oscillationum speciem traduentur ad oscillationes, quae fiunt circa axem latitudinalem.

§. 320. Vnum tamen discrimen inter oscillationes circa axem longitudinalem et latitudinalem intercedit, cuius ratio est habenda. Quoniam nempe omnes naues ita fabricari solent, ut si vlla sit stabilitas respectu axis longitudinalis, stabilitas respectu axis latitudinalis per se fiat vehementer magna; quemadmodum etiam supra ostendimus stabilitatem respectu axis latitudinalis multis vicibus excedere stabilitatem respectu axis longitudinalis seu quantitatem b multum excedere quantitatem f . Ob hanc igitur rationem oscillationes circa axem latitudinalem fierent multo celeriores; at ex altera parte momentum navis respectu axis latitudinalis multo fit maius quam momentum respectu axis longitudinalis, ob onera in puppi ac prora collocata, quae ab axe latitudinali valde distant, hancque ob rationem in tarditate oscillationum per momentum compensabitur, quod per stabilitatem detrahitur.

§. 321. Definiamus paulisper quantum circumstantiarum incertitudo permittit, ipsam penduli simplicis isochroni longitudinem, ut quodammodo duratio oscillationum quae tam circa axem longitudinalem quam latitudinalem fiunt, praeter propter innotescat. Ac contemplemur quidem naues maximas bellicas, in quibus si carinae profunditas ponatur $= c$, latitudo solet esse $= \frac{5}{8} c$ et longitudo $= 10 c$. Ex praecedente autem capite constat huius-

huiusmodi nauium stabilitatem respectu axis longitudinalis circiter fore $= \frac{1}{3} M c$, stabilitatem vero respectu axis latitudinalis $= 10 M c$; quarum expressionum illa data opera ita est assumpta, ut sit iusto minor. Ibi enim ad securitatem nauium potissimum respeximus, cum praestaret stabilitatem actu maiorem deprehendi, quam calculus suppeditaret. Nunc igitur, quoniam incolumitas nauium nobis non amplius est proposita, quippe quae in praecedente capite iam satis est confirmata, tuto stabilitatem maiorem assumere poterimus, non tam ut veritatem propius accedamus, quam ut oscillationes potius celeriores reperiamus quam reuera sunt. Pariter enim expedit si oscillationes actu tardiores deprehendantur, quam calculus eas ostenderit.

§. 322. Ponamus igitur stabilitatem respectu axis longitudinalis esse $= \frac{1}{4} M c$, qui valor fere ex §. 250. prodit si pro v non 10 sed 8 ponamus; similique modo fit stabilitas respectu axis latitudinalis $= 12 M c$, ita ut sit $f = \frac{1}{4} c$ et $h = 12 c$. Iam ad momentum nauis respectu axis longitudinalis inueniendum, notandum est onera quae maxime ab hoc axe distent et ad latera nauis sint posita, distare ab hoc axe interuallo semilatitudinis nauis $= \frac{5}{4} c$; cum autem maxima onerum copia propius ad hunc axem sit sita, media quaedam distantia pro quantitate g debet accipi, maior tamen quam semissis $\frac{5}{8} c$, cum spatia magis remota sint ampliora, atque quadrata harum distantiarum capi debeant, quo fit ut maiores distantiae magis praeualeant minoribus; sumamus igitur c pro hac distantia media, ita ut sit $g = c$; ex quo longitudo penduli simplicis oscillationibus circa axem longitudinalem factis iso-

chroni erit $= 4c$. Quare si c sit 20 pedum circiter pro maximis nauibus, oscillationes hae absoluentur tempore circiter 5 minutorum secundorum.

§. 323. Ad tempora oscillationum, quae circa axem latitudinalem peraguntur, cognoscenda, aestimandum est momentum naus respectu axis latitudinalis. Ab hoc autem si omnia onera maxime essent remota, distaret intervallo semilongitudinis naus, quae est $= 5c$, cuius quantitatis ob rationes modo allegatas pars semisse maior loco k substitui debet. Ponamus igitur $k = 3c$, eritque longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{k^2}{b} = \frac{3}{4}c$, quae plusquam quadruplo minor est, quam longitudo penduli simplicis pro oscillationibus circa axem longitudinalem inventa. In nauibus itaque maximis quae habent $c = 20$ ped. oscillationes circa axem latitudinalem circiter absoluentur duobus minutis secundis. Hinc in qualibet naui, nisi eius figura maxime abhorreat a consueta, oscillationes circa axem latitudinalem multo erunt celeriores, quam eae quae fiunt circa axem longitudinalem.

§. 324. Expediamus hanc oscillationum determinationem generalius, ponamusque, si carinae profunditas sit $= c$, latitudinem carinae esse $= pc$ et longitudinem $= pqc$. Ponatur porro distantia inter centrum grauitatis naus et centrum magnitudinis carinae $= \frac{1}{2}c$, ac pro numeris μ et ν sumatur 8, erit ex §. 247. stabilitas respectu axis longitudinalis $= M c \left(\frac{pp}{3} - \frac{1}{2} \right)$ ac stabilitas respectu axis latitudinalis $= M c \left(\frac{ppqq}{5} - \frac{1}{2} \right)$. Deinde cum maxima onerum ab axe longitudinali distantia sit $= \frac{1}{2}pc$, sumantur huius duo trientes pro distantia media, ita vt sit momentum naus respectu axis longitudinalis $= \frac{1}{9}Mp^2c^2$. Atque simi-

li ratione ponatur momentum navis respectu axis latitudinalis $= \frac{1}{9} M p^2 q^2 c^2$: qui valores a veris non multum discrepabunt, dummodo carina deorsum conuergat, vti in calculo stabilitatis assumimus.

§. 325. His positis erit pro oscillationibus circa axem longitudinalem penduli isochroni simplicis longitudo $= \frac{8ppc}{9pp-36}$, pro oscillationibus autem circa axem latitudinalem erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{8ppqgc}{9ppqq-36}$. Cum igitur sit longitudo cuiusque navis maior latitudine seu $q > 1$, erit $\frac{8ppc}{9pp-36}$ semper maior quam $\frac{8ppqgc}{9ppqq-36}$; excessus enim illius expressionis supra hanc est $= \frac{32ppc(qq-1)}{9(pp-4)(ppqq-4)}$. Quamobrem quo magis longitudo navis superat latitudinem, eo magis erunt celeres oscillationes circa axem latitudinalem, si cum oscillationibus circa axem longitudinalem comparentur. Vnde animadversio ante facta latissime patet, quod in omni naui oscillationes circa axem latitudinalem celeriores sint, quam oscillationes circa axem longitudinalem.

§. 326. Intelligitur porro, quo maior latitudo navis cum data carinae profunditate c coniungatur, quo pacto stabilitas navis insigniter augetur, eo celeriores fieri oscillationes navis. Cum enim longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus circa axem longitudinalem sit $= \frac{8ppc}{9pp-36}$, ea fit infinita si capiatur $p=2$, seu latitudo navis duplo maior quam profunditas carinae c . Tribuendis vero ipsi p , continuo maioribus valoribus fit pendulum isochronum brevius, donec tandem, si p infinitum seu saltem admodum magnum accipiatur, fiat longitudo penduli isochroni $= \frac{8}{9} c$. Hoc autem facto longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus circa axem latitudinalem

fiet quoque $\frac{2}{3}c$. Ex quo, quo maior capiatur latitudo navis respectu profunditatis carinae c eo magis ambae hae oscillationum species ad aequalitatem reducentur.

§. 327. Si plures naues diuersae magnitudinis cum ratione constructionis tum onerationis inter se perfecte similes concipiantur, ita ut p et q in omnibus eisdem valores obtineant, solaque profunditas carinae c discrepet, longitudo pendulorum oscillationibus vel circa axem longitudinalem vel latitudinalem factis isochronorum tenebit ipsam profunditatem carinae, hoc est laterum homologorum rationem. Ex quo tempora oscillationum, quas naues hae circa homologos axes conficient, erunt in ratione subduplicata laterum homologorum. Navis igitur, quae quadruplo longior est quam alia navis oscillationes peraget duplo tardiores. Quodsi autem in minoribus navibus ipsi p maior valor tribuatur, quam obtinebat in maioribus, etiam ob hanc rationem oscillationes in navibus minoribus euadent celeriores. Supra scilicet obseruauimus, ut maiores et minores naues aequalibus inclinationibus fiant obnoxia stabilitatem ponderi navis oportere esse proportionalem, seu $c \left(\frac{p^2}{g} - \frac{1}{2} \right)$ esse debere quantitatem constantem puta i ; ex quo fiet $pp - 4 = \frac{2i}{c}$ et $pp = \frac{4(i+c)}{c}$; hinc ergo prodibit longitudo penduli oscillationibus circa axem longitudinalem isochroni $= \frac{4(i+c)c}{9i} = \frac{2}{3}c + \frac{4cc}{9i}$.

§. 328. Tanta oscillationum celeritas praesertim in minoribus nauigiis, plerisque non parum suspecta videbitur, atque adeo experientiae contraria. Quando enim cymbas aliasque minoris formae nauiculas mari vndis agitato iactari videmus, motum quidem oscillatorium deprehendimus
ingen-

ingentem ac vehementem, verum multo tardio- rem quam vi theoriae nostrae esse deberet. At ad scrupulum istum eximendum notari oportet agitationem istiusmodi nauicularum ab vndis maris prorsus esse diuersam a motu oscillatorio, quem hic definiuimus. Hic enim assumimus ac semper ponimus superficiem aquae in summa quiete, atque oscillationes determinauimus, quae oriuntur si nauis aliquantum inclinetur ac repentino dimittatur. Quando autem nauicula in mari vndis agitato versatur, tum superficies maris maxime est inaequalis, atque oscillationes non tam a conatu nauis sese in statum aequilibræ restituendi proficiscuntur, quam a continua vndarum sollicitatione, quibus eadem pars modo eleuatur modo deprimitur: quamobrem iste motus nauium quoque a motu vndarum maxime pendebit.

§. 329. Quod autem ad motum attinet quem maris agitatio nauibus imprimit, is altioris est indaginis, neque etiamnunc hydrostatica eousque est exulta, vt eius determinationem suscipere queamus. Primum enim nosse oportet quanta vi et in quam directione aqua, cum eius superficies non est ad libellam disposita, corpora innantia sollicitet; ac deinde ipsum motum vndarum exploratum habere necesse est. Motum quidem vndarum vel inuenire liceret, vel ad arbitrium assumere, vt cum experientia maxime conueniat; verum aquae pressiones, quando eius superficies non est horizontalis, longe diuersas leges sequi videntur, quarum ne vestigium quidem adhuc innotuit. Obseruantur enim naues, quod contra omnem expectationem videatur, per vndas ascendere motu accelerato, descendere vero motu retardato; atque si in

vase aqua ad marginem magis est eleuata quam in medio, leuia corpuscula innatantia sponte ad marginem accedunt, atque adeo sursum vrgentur; quod quam fit paradoxon, quilibet agnoscat, qui haec phaenomena per nota hydrostaticae principia explicare conatus fuerit.

§. 330. Quae igitur hic de oscillationibus exposita sunt, atque in hoc capite adhuc sequentur, ea non de agitatione nauium, quae ab vndis oriri solet, intelligi oportet, sed de illo motu reciproco, quem nauis quaeque in aqua maxime tranquilla recipere potest. Orientur autem huiusmodi oscillationes si nauis a vi quacunque e situ aequilibri deducatur ac subito iterum dimittatur, tum enim ob stabilitatem sese in statum aequilibrii restituet quidem, sed, quia eum cum celeritate attingit, in plagam contrariam inclinabitur, quoad impetus omnis sit absumentus; hincque simili motu redibit, atque instar penduli oscillationes absoluet. Oscillationes vero circa axem longitudinalem conficiet, si initio circa eundem axem hoc est ad alterutrum latus inclinetur: oscillationes autem circa axem latitudinalem producentur, si circa hunc axem vel versus proram vel puppim inclinetur. Haeque oscillationes convenient cum theoria data, si modo sectionis aquae centrum grauitatis in eam ipsam rectam verticalem incidat, in qua centra grauitatis nauis, et magnitudinis carinae sunt posita.

§. 331. Quodsi igitur eiusmodi oscillationes circa axem vel longitudinalem vel latitudinalem actu efficiantur, ac longitudo penduli simplicis isochroni obseruetur, tum per experientiam cognoscetur relatio inter stabilitatem nauis et momentum totius nauis respectu eius axis circa quem

quem fiant oscillationes. Si enim posito navis pondere $= M$, respectu eius axis circa quem oscillationes absolvuntur stabilitas fit $= Mf$ et momentum $= Mg^2$; dabit longitudo penduli simplicis isochroni observata valorem fractionis $\frac{gg}{f}$; ita ut si L exprimat longitudinem penduli isochroni futurum fit $gg = fL$. Apparet quidem in hac expressione pondus navis M non inesse, quia cum in momento navis tum in stabilitate aequaliter inerat, verumtamen vi propria pondus M in ea latet, cum neque momentum navis neque stabilitas sine navis pondere cognito determinari queat.

§. 332. Observandis igitur huiusmodi oscillationibus, poterit vel ex data navis stabilitate eius momentum respectu eius axis, cuius respectu cum oscillationes fiunt, tum stabilitas cognoscitur, determinari vel contra ex momento hoc aliunde cognito stabilitas. Dabimus autem in sequente capite methodum stabilitatem respectu cuiusvis axis per experientiam definiendi; haec ergo si fuerit cognita atque aequalis Mf , denotante M pondus totius navis, ac longitudo penduli simplicis oscillationibus navis isochroni reperta sit $= L$; sumi oportebit mediam proportionalem inter f et L , quae praebebit valorem ipsius g , ex qua momentum navis innotescet, quippe quod est $= Mgg$. Vel cum sit $gg = fL$, stabilitas navis quae iam constat et est $= Mf$ multiplicetur per longitudinem penduli observatam L dabitque productum MfL ipsum navis momentum quaesitum; ita ut hac via adhibenda nequidem opus sit pondus navis seorsim nosse.

§. 333. Quodsi autem momentum navis respectu illius axis, circa quem oscillationes peraguntur, aliunde quocun-

cunq̄ue modo fuerit compertum atq̄ue adeo valor $M g g$ inuentus, non difficulter ex cognito motu oscillatorio stabilitas nauis respectu illius axis determinabitur. Cum enim ex cognito motu oscillatorio constet longitudo penduli simplicis isochroni L , fitq̄ue $g g = f L$, erit $f = \frac{g g}{L}$, et stabilitas nauis quaesita $= M f = \frac{M g g}{L}$; vnde ista nascitur regula: momentum nauis iam notum diuidatur per longitudinem penduli simplicis L , isochroni cum oscillationibus nauis, et quotus resultans praebebit ipsam nauis stabilitatem. Quo circa etiam haec inuestigatio institui potest, etiam si pondus nauis absolutum ignoretur.

§. 334. Summopere autem expedit nullam praeter mittere occasionem, qua eiusmodi experimenta instituire licet, ex quibus vlla cognitio nauium deduci queat. Cum enim ad omnia nauium phaenomena tam intelligenda quam prospicienda tot tamque variarum rerum ad naues pertinentium cognitio requiratur, quae a priori vel difficulter vel non satis accurrate cognosci possunt, institutio experimentorum quorumcunq̄ue hanc cognitionem magno-
pere promouebit ac perficiet. Sic tam oscillationum verticalium, quam harum quae fiunt circa axem aliquem horizontalem, obseruatio ingentem afferet vtilitatem, ex illis enim relatio inter sectionem aquae et volumen aquae immersum; ex his vero relatio inter momentum nauis ac stabilitatem definitur; quorum vtrumque notitiam nauium plurimum promouet.

§. 335. Quoniam autem ex motu oscillatorio nauium circa axem horizontalem vel longitudinalem vel latitudinalem per obseruationes cognito definiri potest stabilitas nauis si momentum nauis respectu eiusdem axis habeatur,
non

non abs re erit exponere, quo pacto ad cognitionem momenti navis respectu dati axis horizontalis pervenire queamus. Ac primum quidem praesto est methodus a priori petita, qua singulae tam ipsius navis particulae, quam onerum ingestorum multiplicantur per quadrata distantiarum ab axe proposito, cunctaque haec producta in vnam summam colliguntur, ad quam operationem perfecta notitia cum structurae totius navis, tum rationis operationis requiritur. Deinde vero momentum tale etiam per singularia experimenta potest determinari, quae inter notari praecipue merentur ea, quibus motus oscillatorius navis in libero aere ex dato axe suspensionis observatur; quo circa quemadmodum momentum navis ex istiusmodi observationibus colligi possit, explicabimus.

§. 336. Ponamus igitur cognitae esse oscillationes, Tab. XII.
fig. 1. quas navis $aCdb$ in libero aere ex axe horizontali immobili PQ suspensa absoluat; huncque axem PQ parallelum esse illi axi horizontali AB per centrum gravitatis navis G ducti, respectu cuius momentum navis desideratur. Sit navis totius pondus $= M$, eius momentum respectu axis AB quod quaerimus $= Mg^2$, et distantia centri gravitatis navis G ab axe PQ circa quem oscillationes fiunt scilicet $OG = b$, quae distantia cognita ponitur. Observata iam sit longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus, quas navis in hoc statu constituta absoluit, sitque ea longitudo $= k$: quae recepto loquendi modo distantiam centri oscillationis ab axe suspensionis PQ denotabit.

§. 337. Ex principiis autem mechanicis, quibus theoria centri oscillationis innititur, constat longitudinem penduli

Paras II. **Z** duli

duli simplicis isochroni, quae nobis est $= k$ obtineri, si momentum corporis oscillantis respectu axis suspensionis, seu summa omnium corporis particularum per quadrata distantiarum suarum ab axe suspensionis respectiue multiplicatarum diuidatur per productum totius corporis in distantiam centri grauitatis eius ab axe, ex quo corpus est suspensum: quod productum nostro casu ob $OG = b$ est $= Mb$. Quamobrem momentum totius nauis respectu axis PQ erit $= Mbk$; ac propterea ex obseruato motu oscillatorio dabitur. Quaestio itaque huc redit vt ex dato momento corporis cuiusque respectu axis cuiuscunq; definiatur momentum eiusdem corporis respectu axis per centrum grauitatis ipsius ducti illique axi paralleli.

§. 338. In libro autem superiori methodus est tradita, cuius ope ex dato momento corporis cuiuscunq; respectu axis cuiuspiam per eius centrum grauitatis transeuntis reperiri potest momentum respectu alius cuiusuis axis illi axi paralleli; ad hoc quippe definiendum tantum opus est, vt ad momentum respectu axis per centrum grauitatis transeuntis addatur productum totius corporis per quadratum distantiae amborum memoratorum axium multiplicati. Cum igitur nostro casu sit momentum nauis respectu axis AB, quod quidem quaerimus, $= Mgg$ erit momentum eius respectu axis PQ $= Mgg + Mbb$ quod cum per obseruationes sit inuentum $= Mbk$ erit $gg = bk - bb$ et $g = \sqrt{b(k-b)}$; innotescit itaque longitudo illa g , per cuius quadratum si multiplicetur massa nauis M , obtinetur momentum eius respectu axis AB.

§. 339. Pro corpore igitur quocunq; circa axem horizontalem oscillationes peragente methodum nacti sumus

mus expeditam momentum illius corporis respectu axis illi axi paralleli ac per centrum grauitatis ducti determinandi; quae methodus regula ista facili continetur. Massa seu pondus corporis multiplicetur primum per distantiam centri grauitatis ab axe suspensionis, hocque productum denovo multiplicetur per excessum longitudinis penduli simplicis isochroni supra distantiam illam centri grauitatis ab axe suspensionis; vel quaeratur media proportionalis inter distantiam centri grauitatis ab axe suspensionis et inter distantiam centri oscillationis a centro grauitatis, quo facto productum ex massa corporis et quadrato mediae huius proportionalis dabit momentum corporis respectu axis per centrum grauitatis transeuntis et axi suspensionis paralleli.

§. 340. Quaecunque igitur accipiatur distantia axis suspensionis PQ a centro grauitatis G corporis eadem perpetuo prodibit quantitas momentum corporis respectu axis AB exprimens. Quodsi igitur successiue idem corpus in variis distantis ad oscillandum suspendatur erit semper distantia centri oscillationis a centro grauitatis reciproce ut distantia centri grauitatis ab axe suspensionis. Interim tamen ad nostrum institutum non omnino perinde est quanta distantia axis suspensionis PQ a centro grauitatis G accipiatur; sed eam neque nimis magnam neque nimis paruam accipi conuenit. Cum enim factum $b(k-b)$ sit constans, expediet distantiam b mediocris assumisse quantitatis ut factores b et $k-b$ non admodum fiant dispares, atque conclusio eo certior inde inferri queat. Hoc vero obtinebitur, si eiusmodi eligatur suspensio, quae oscillationes maxime celeres producat.

§. 341. Modus quidem iste, etsi in se admodum expeditus ac facilis, nullo modo ad naues praecipue maiores accommodari potest, ob ingens pondus et volumen quae impediunt, quo minus in libero aere suspendi atque ad oscillandum impelli queant. Verum tamen utilitatem afferre poterit non contemnendam, si ad similitudinem vastiorum navium minora exempla summa diligentia conficiantur, qualia fere semper fabrefieri curantur. Si enim istae minoris moduli nauiculae ipsis nauibus omnino sint similes, experimenta quae in iis instituuntur simul proprietates maiorum declarabunt. Inseruient itaque istiusmodi moduli cum ad sectionem aquae tum ad volumen aquae submersum, tum etiam ad stabilitatem ac momentum respectu cuiusque axis determinanda, quae res in scientia nauali summam utilitatem habebunt.

§. 342. Quodsi autem nauiculae, in qua experimentum instituitur, centrum grauitatis non tam accurate fuerit exploratum, quemadmodum opus est, ex duplici suspensione duplicique motu oscillatorio momentum nauiculae respectu axis per centrum grauitatis transeuntis poterit concludi etiam ignoto loco centri grauitatis. Ponamus enim in primo motu oscillatorio repertam esse longitudinem penduli simplicis isochroni $= k$; deinde axem suspensionis a corpore magis remoueri per interuallum $= x$, ita ut si priori casu fuerit distantia centri grauitatis ab axe suspensionis $= b$, ea casu altero futura sit $= b + x$: fit autem hoc altero casu longitudo penduli simplicis isochroni $= q$: ob $b(k-b) = (b+x)(q-b-x)$ reperietur $b = \frac{x(q-x)}{q-k-2x}$ atque $gg = b(k-b) = \frac{x(k-q+x)(k+x)(q-x)}{(k-q+x)^2}$, quae quantitas
per

per pondus corporis M multiplicata dabit momentum eius quaesitum respectu axis AB per centrum grauitatis G ducti et paralleli axibus binis, ex quibus erat suspensum.

§. 343. Non difficile itaque erit pro data naui momentum eius respectu axis cuiusuis horizontalis per experimenta definire, dummodo nauis accuratum habeatur exemplum idoneae magnitudinis fabricatum. Non solum autem hoc exemplum ratione figurae et constructionis omnino simile esse oportet ipsi naui quam repraesentat, sed etiam oneratio vbique ad similitudinem debet esse constituta. Primo scilicet non solum pondus nauiculae minoris ad pondus maioris triplicatam tenere debet rationem laterum homologorum, sed etiam pondera ita debent esse disposita vt centrum grauitatis similiter sit positum. Deinde etiam omnia pondera in ipsa naui eiusque exemplo cum in se spectata similia esse debent, tum similiter distributa, vt etiam momenta, respectu similium axium prodeant similia.

§. 344. Quemadmodum autem ex momento minoris nauiculae respectu cuiuspiam axis determinato momentum respondens in naui maiori simili concludi debeat, ex dictis facile colligi licet. Cum enim momentum sit productum ex pondere corporis in quadratum cuiuspiam lineae rectae, corporum similium momenta similia tenebunt rationem quintuplicatam laterum homologorum. Quoniam autem pondera sunt in ratione triplicata, si inuenta fuerit linea illa, per cuius quadratum pondus nauiculae multiplicatum praebet momentum eius respectu axis cuiuspiam; tum pro ipsa naui per regulam auream quaeratur similis linea recta in ratione simplici laterum homologorum;

quae si fuerit inuenta, eius quadratum per pondus ipsius navis multiplicatum dabit momentum navis respectu axis in ea similiter positi.

§. 345. Modus iste per oscillationes momenta corporum respectu cuiusvis axis per centrum gravitatis ducti explorandi, etiam adhiberi potest ad momenta superficies planarum in vestiganda, atque ideo parem utilitatem afferet ad momenta sectionis aquae navium cognoscenda, quae ad stabilitatis cognitionem requiruntur. Ex lamina scilicet aequabili ac perquam tenui excindatur figura sectioni aquae omnino similis, eaque in situ verticali posita suspendatur ex axe horizontali, ita ut vel axis longitudinalis vel latitudinalis situm teneat horizontalem; tum lamina ad oscillandum impellatur noteturque longitudo penduli simplicis isochroni k . Quodsi nunc distantia centri gravitatis laminae ab axe suspensionis fuerit $= b$, erit $\sqrt{b(k-b)}$ linea illa, per cuius quadratum superficies laminae multiplicari debet, ut prodeat eius superficiei momentum respectu axis vel longitudinalis vel latitudinalis, eius videlicet qui in motu oscillatorio situm horizontalem obtinuit.

§. 346. Quodsi autem pro huiusmodi lamina definita fuerit ea linea, per cuius quadratum superficies laminae multiplicata praebet eius momentum respectu axis propositi, tum fiat ut longitudo illius laminae ad longitudinem sectionis aquae, cui figura laminae similis est sumpta, ita linea illa inuenta $\sqrt{b(k-b)}$ ad quartam. Haecque quarta linea proportionalis inuenta erit ea ipsa longitudo per cuius quadratum superficies sectionis aquae multiplicari debet, ut obtineatur eius momentum, cuius cognitio ad stabilitatem navis definiendam requiritur. Manifestum autem est, ut
ista

ista conclusio fit legitima, laminam primo vbique eiusdem crassitiei atque ex materia homogenea paratam esse debere, deinde etiam necesse est vt lamina illa fit tenuissima, seu vt eius crassities prae superficie euanescat; quemadmodum iam indicauimus.

§. 347. Ad longitudinem autem penduli simplicis isochroni cum oscillationibus istiusmodi experimentorum inuestigandam, plures modi adhiberi possunt, quorum commodissimus mihi videtur, qui nititur longitudine penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis, quae etsi in variis terrae regionibus aliquantillum discrepat, tamen satis tuto his praecipue locis accipi potest 3166 $\frac{1}{4}$ part. mill. pedis Rhenani. Numerentur iam oscillationes corporis suspensi, quae vno minuto primo absoluuntur, sitque eorum numerus = n , et longitudo penduli simplicis isochroni, quae quaeritur ponatur = k partium millesimarum pedis Rhenani, erit ex natura oscillationum $\frac{\omega}{n} : 1 = \sqrt{k} : \sqrt{3166\frac{1}{4}}$ hincque $k = \frac{11338500}{nn}$. Oscillationes vero efficiendae sunt admodum exiguae, vt arcus circulares per quos fiunt cum cycloidicis confundantur, atque oscillationes inter se isochronae obtineantur.

§. 348. His itaque continetur doctrina de oscillationibus nauium, quas peragunt vel circa axem longitudinalem vel latitudinalem, quae duo oscillationum genera non solum sunt praecipua, quae in nauibus inuestigari merentur, sed ea etiam sola ad calculum reuocari possunt. Quae enim oscillationes circa alium axem horizontalem fieri concipiuntur, eae rarissime circa axem fixum contingunt, sed plerumque inter oscillandum axis circa quem fiunt oscillationes continuo mutatur. Pendet autem haec irregularitas a diffi-

a dissimilitudine partium navis vtrinque circa axem dispositarum, qua fit vt linea recta per centra oscillationis amborum sectionis aquae partium non sit ad axem oscillationis seu ei parallelum in sectione aquae sumtum normalis, quae conditio ad oscillationes puras et regulares producendas absolute est necessaria.

§. 349. Siue autem oscillationes, quae circa alium axem horizontalem praeter longitudinalem et latitudinalem fiunt, sint regulares siue irregulares, eae tamen satis prope ex cognitis oscillationibus circa axem longitudinalem et latitudinalem factis concludi poterunt, medium scilicet aliquod inter has tenebunt. Facile namque ex forma navium colligere licet alteras harum oscillationum fore celerissimas alteras tardissimas. Quicquid autem sit, si quis voluerit oscillationes istas irregulares circa axem quemcunque horizontalem obliquum eodem modo; quo regulares, definire, is quidem a veritate non multum aberrabit. Oportebit autem pro tali axe obliquo tam stabilitatem navis respectu istius axis, quam momentum cognitum esse; atque momentum per stabilitatem diuisum dabit longitudinem penduli simplicis, cuius oscillationes cum oscillationibus navis proxime congruent.

§. 350. Quemadmodum autem ad stabilitatem respectu axis obliqui definiendam, calculo particulari opus non est, sed ea ex cognitis stabilitatibus respectu axium longitudinalis et latitudinalis facile colligi potest; ita etiam momentorum ratio est comparata. Namque si cognita fuerint momenta navis respectu axis cum longitudinalis tum latitudinalis, ex iis momentum respectu alius cuiusvis axis horizontalis per centrum grauitatis transeuntis definiri potest.

Quod

Quod ut appareat, fit G centrum gravitatis navis, AB axis longitudinalis et CD latitudinalis, quorum respectu momenta ponuntur cognita. Sit vero EF axis obliquus in plano horizontali $ACBD$ assumtus respectu cuius momentum quaeritur. Sumatur navis particula quaecunque M , ex qua primum in planum horizontale perpendiculum ML demittatur atque ex L in axes perpendicula LP , LQ et LR .

§. 351. Momentum igitur navis respectu axis EF quaesitum erit $= fM \cdot MR^2 = fM \cdot ML^2 + fM \cdot LR^2$. Sit finus anguli $AGE = m$, cosinus $= n$, erit $LO = \frac{LP}{n}$, $PO = \frac{m \cdot LP}{n}$, $GO = PG - \frac{m \cdot LP}{n}$, et $OR = mPG - \frac{mm \cdot LP}{n}$; vnde $LR = mPG + n \cdot LP$. Hinc erit momentum respectu axis $EF = fM \cdot ML^2 + m^2 fM \cdot PG^2 + 2mnfM \cdot PG \cdot LP + n^2 fM \cdot LP^2$, in qua expressione ob navem circa axem AB vtrinque similem terminus $fM \cdot PG \cdot LP$ evanescet. Cum igitur sit momentum respectu axis longitudinalis AB , quod fit $R = fM \cdot ML^2 + fM \cdot LP^2$, et momentum respectu axis latitudinalis CD quod fit $S = fM \cdot ML^2 + fM \cdot PG^2$, erit momentum respectu axis obliqui $EF = m^2 S + n^2 R$ ob $mm + nn = 1$. Ex quo sine peculiari siue calculo siue experimento momentum navis respectu axis cuiusvis obliqui horizontalis expedite poterit determinari, ex datis momentis respectu axium longitudinalis atque latitudinalis.

§. 352. Posuimus in ista de oscillationibus navium tractatione perpetuo centrum gravitatis sectionis aquae in eadem recta verticali esse situm, quae transit per centrum gravitatis totius navis simul ac per centrum magnitudinis carinae: hancque hypothesin ideo assumimus, quod cum

ea ad oscillationes maxime tranquillas reddendas requiratur, tum vero oscillationes tam verticales quam horizontales seu circa axem horizontalem motu angulari factas puras, et uniformes atque in suo genere isochronas producat. Quodsi autem aliae navium conditiones non permittant, ut sectionis aquae centrum grauitatis verticaliter immineat centro magnitudinis carinae, atque ad eas condiciones magis respiciendum sit, quam ad tranquillitatem oscillationum oscillationes neque verticales neque horizontales purae existere poterunt, sed alterum genus perpetuo cum altero erit permixtum, si quidem axis horizontalis per centrum grauitatis ductus, circa quem oscillationes fiunt, cum centro grauitatis sectionis aquae non fuerit in plano verticali constitutus.

§. 353 Quando autem centrum grauitatis sectionis aquae non in rectam verticalem per centrum grauitatis navis ductam cadit, id erit vel magis versus proram vel versus puppim promotum. Vtroque tamen casu necesse est, ut id sit positum in intersectione plani diametralis et sectionis aquae; quoniam sectio aquae vtrinque circa hanc intersectionem ex duabus partibus similibus et aequalibus constat. Quamobrem axis longitudinalis etiam sublata hypothese prius assumta, cum centro grauitatis sectionis aquae tamen in plano verticali erit situm. Ex quo manifestum est hoc quoque casu oscillationes circa axem longitudinalem factas esse puras futuras, ita ut hoc oscillationum genus etiamnum peculiarem tractationem non requirat.

§. 354. Aliter autem res se habet in oscillationibus, quae fuerit circa axem latitudinalem: eo quod centrum graui-

grauitatis sectionis aquae non positum erit in plano verticali, in quo axis latitudinalis per centrum grauitatis nauis ductus collocatur. Hinc enim fit, vt inter oscillandum vel volumen modo maius modo minus aquae immergatur, si centrum grauitatis in quiete permaneat, vel centrum grauitatis nauis ascendat descendatue si perpetuo aequale volumen aquae immersum maneat. Non poterunt igitur hoc casu oscillationes circa axem latitudinalem fieri quin simul centrum grauitatis nauis vel ascendat vel descendat; atque id circo nauis circa axem latitudinalem oscillationes puras absoluere non poterit, sed eae semper necessario oscillationibus verticalibus erunt inquinatae, ex quo confusum et difforme oscillationum genus nascetur.

§. 355. Vt hoc clarius percipiatur, sit ADB sectio nauis verticalis a prora A ad puppim B facta et nauem vtrinque in duas partes similes et aequales diuidens: sit praeterea ADB portio huius sectionis sub aqua versans, dum nauis in aequilibrio est constituta; eruntque centrum grauitatis nauis G et centrum magnitudinis carinae O cum in plano huius sectionis tum in eadem recta verticali CD posita. Porro erit recta AB axis longitudinalis sectionis aquae eiusque diameter, ex quo sectionis aquae centrum grauitatis I in hac ipsa recta AB situm erit: quodsi incidere in punctum C oscillationes forent eiusmodi, vti ante definiuimus, atque oscillationes tam verticales quam horizontales fierent purae. Pro praesenti instituto igitur punctum I a puncto C remotum assumimus.

§. 356. Quando nunc nauis haec ex situ aequilibrii ad oscillationes circa axem latitudinalem perendas inclinatur, sectio diametralis ADB manebit quidem verticalis, verum

A a 2

alia

Tab. XII.
fig. 3

alia prodibit sectio aquae, cuius pariter diameter existet in interfectione eius cum plano verticali ADB. Sit igitur in situ hoc inclinato recta ab diameter sectionis aquae, secans superiorem diametrum AB in puncto V, atque ponatur interuallum $CV = x$. Angulus vero $AVa = BVb$ fit quam minimus $= dw$, qui erit angulus inclinationis naui de situ aequilibrii. Quantitas igitur sectionis aquae in utroque situ ad sensum non mutabitur, sed aream habebit eandem, quae ponatur $= 2D$. Positio haec latissime patet, atque omnes declinationes de situ aequilibrii, ex quibus oscillationes circa axem longitudinalem oriri queant, in se complectitur.

§. 357. Vt nunc in motum oscillatorium inquiramus, qui ex hac declinatione ex situ aequilibrii oriri debet, ponamus pondus totius naui $= M$, volumen carinae seu partis aquae submersae, dum naui in aequilibrio versatur $= V$: et uti interuallum $CV = x$ positum est, fit interuallum $CI = c$. Distantia centrorum grauitatis naui et magnitudinis carinae $GO = b$, ubi ponimus centrum grauitatis G supra centrum magnitudinis O cadere: ita ut, si contrarium eueniat, littera b negatiuum valorem induat. Idem de litteris c et x est intelligendum, quae affirmatiuum valorem retinent, si punctum I puppi B propius est puncto C, punctumque V prorae propius quam C. Quodsi autem haec puncta aliter fuerint disposita, tum in mutatione signorum omnis variatio poterit comprehendi.

§. 358. In situ igitur hoc inclinato erit ab in sectione aquae, ideoque horizontalis, et partis nunc aquae immer-sae planum diametrale erit aDb . Quantum autem futurum sit volumen partis submersae, ex eo colligi poterit, quod,

quod, si recta ab per punctum I transfret, volumen aequale foret volumini in situ aequilibrum V . Quare hoc casu volumen aquae submersum maius est quam V , hocque excedit spatio, quod comprehenditur inter sectionem aquae ab et sectionem ipsi parallelam per I ductam, quarum distantia erit $Ii = (c+x)dw$. Cum autem mutatio quam minima ponatur, sectio aquae ab aequalis censei potest sectioni aquae naturali $= 2D$, et hanc obrem volumen nunc aquae submersum erit $= V + 2D(c+x)dw$:

§. 359. Cum autem vis nauem sursum pellens sit vt volumen aquae submersum, hoc statu; vis navem sursum vrgens maior est quam pondus nauis M quo deorsum nititur: atque excessus se habebit ad $2D(c+x)dw$ vt M ad V . Ergo Centrum grauitatis nauis hoc statu actu sursum sollicitabitur vi $= \frac{2MD(c+x)dw}{V}$ excessu scilicet vis ex pressionibus aquae ortae supra ipsius nauis pondus. Ascendere igitur debet centrum grauitatis nauis G , quod nunc infra aquae superficiem submersum est ad profunditatem Gg , ducta Gg perpendiculari ad ab . Ob angulum autem cGg infinite paruum dw erit $Gg = Gc = GC + xdw$. Hoc igitur situ inclinato centrum grauitatis G profundius est situm, quam in situ aequilibrum, idque intervallo $Cc = xdw$. si quidem x valorem affirmatiuum obtineat, qualem figura repraesentat.

§ 360. Quando ergo punctum V extra puncta C et I vti in figura cadit, vis ex pressione aquae orta tendet ad centrum grauitatis G in altitudinem naturalem constituendum. Nam si V extra C et I versus proram sit positum, centrum grauitatis G profundius stat in inclinatione quam in statu aequilibrum, simul vero etiam vis praesto est

id sursum follicitans. Sin autem punctum V extra puncta C et I versus puppim esset situm, tum centrum grauitatis G in statu inclinato magis foret eleuatum quam in statu aequilibrii, simul vero etiam pondus nauis pressioni aquae praeualeret, atque centrum grauitatis G magis immergeret; si quidem angulus inclinationis dw sit affirmatiuus, hoc est si inclinatio ita fiat, vt prora magis immergatur quam puppis. In inclinatione enim contraria omnia contra se habebunt, ob dw negatiuum.

§. 361. His igitur duobus casibus vires nauem follicitantes tendent, ad nauem ex situ inclinato in situm aequilibrii restituendam, si quidem nauis in hoc situ aequilibrii habeat stabilitatem. Vtrum autem vno motu continuo, hoc est dum angulus dw omnino euanescit, nauis in situm aequilibrii restituatur an minus, postea indagabimus. Hic vero prius nobis spectandus est casus, quo punctum V intra puncta C et I cadit; qui hoc habet singulare, quod vis quidem adfit centrum grauitatis G sursum vrgens, cum tamen in situ inclinato hoc centrum grauitatis iam altius sit positum quam in situ aequilibrii. Hoc ergo casu vires non solum non restitutionem in situm aequilibrii promouebunt, sed adeo magis perturbabunt; centrum enim grauitatis iam nimis eleuatum etiam magis eleuabunt, ex quo motus vehementer irregularis existat, necesse est.

§. 362. Quare cum res ita se habeat, si punctum V intra puncta C et I cadat, concludendum est, oscillationes non subito regulares et vniformes generari posse, quam primum V extra C et I cadat, sed difformitatem tantum continuo magis decrescere. Difformitas autem in omni casu eo maior erit, quo maius fuerit intervallum

vallum inter puncta C et I. Nam si haec puncta coincidunt et sit $c = 0$; tum vis centrum grauitatis eleuans erit $= \frac{2MDx\,d\omega}{V}$ et idem centrum grauitatis G magis erit depressum quam in situ aequilibrii interuallo $x\,d\omega$. Cum igitur hoc casu vis vrgens proportionalis sit ipsi interuallo, quo centrum grauitatis a suo situ naturali est remotum, hoc casu vniformitas motus ofcillatorii non turbabitur. Manifestum autem est, quo maius sit interuallum e , eo minus vim illam spatio $x\,d\omega$ fore proportionalem, ex quo vniformitas eo magis tolletur.

§. 363. Vt nunc in motum, qui ex actione virium nauem in situ hoc inclinato sollicitantium inquiramus, ante omnia idem, quod de omni motu corporum extensorum, est notandum: seorsim scilicet inuestigandus est motus centri grauitatis, atque motus rotatorius circa centrum grauitatis. Quod primum ad motum centri grauitatis G attinet, id verticaliter sursum vrgebitur nostro casu a vi motrice $= \frac{2MD(c+x)\,d\omega}{V}$, quoniam autem in centro grauitatis collectam concipi debet integrum nauis pondus M, vis acceleratrix centri grauitatis erit $= \frac{2D(c+x)\,d\omega}{V}$. Pari igitur modo centrum grauitatis primo motus momento versus suum situm naturalem impelletur, quo pendulum longitudinis $\frac{Vx}{2D(c+x)}$, quod a situ quietis per interuallum $x\,d\omega$ est deductum.

§. 364. Ad motum gyratorium circa centrum grauitatis definiendum, determinari oportet momentum virium sollicitantium respectu horizontalis per centrum grauitatis G ductum et ad planum ADB normalem, quoniam ex nauium forma certum est, motum gyratorium circa hunc
nullum

nullumque alium axem oriri debere. Oritur autem hoc momentum a solis aquae pressionibus, quae ita concipi possunt, quasi singulis particulis voluminis submersi essent insitae iis ipsis proportionales, atque verticaliter sursum vrgeant. Volumen autem in situ inclinato aquae submersum aDb in tres partes discerni potest; primum scilicet in partem ADB cuius volumen positum est $= V$, tum in partem inter angulum BVb contentam; ac tertio in partem intra angulum AVa comprehensam, ita ut totum volumen aquae submersum sit $= V + BVb - AVa$, quarum partium si uniuscuiusque momentum fuerit determinatum, simul totius voluminis aquae submersi momentum habebitur.

§. 365. Contemplemur primum partem V , cuius cum sit centrum grauitatis in O , ex ea nascetur vis nauem sursum pellens in directione verticali Oo , atque haec vis ipsi naui ponderi M aequalis erit. Haec autem vis non tendet ad restitutionem in statum aequilibrii, sed contra nitetur, eritque eius momentum propterea negatiuum $= M \cdot og = Mbdw$. ob $Go = b$. Quare si momentum ad restitutionem producendam determinare velimus ex parte voluminis aquae submersi V nascetur momentum $= -Mbdw$: quod ad nauem subuertendam tendet, si quidem centrum grauitatis naui G supra O cadat; et hanc obrem, nisi momenta ex reliquis partibus oriunda fiant affirmatiua ac simul maiora quam $Mbdw$, nulla omnino restitutio naui in situm aequilibrii fieret, quemadmodum supra de stabilitate est ostensum.

§. 366. Ut momenta, quae ex partibus intra angulos BVb et AVa comprehensis nascuntur, inuestigemus, sit

fit portionis intra angulum BVb contentae volumen $= P$ et huius centrum grauitatis seu magnitudinis situm in P , cuius distantia ab V fit $Vp = p$. Ex hac ergo portione vis nascitur $= \frac{MP}{V}$ et nauem sursum pellit in directione Pp ; quae vis ideo ad nauis restitutionem tendet. Huius autem vis momentum respectu axis horizontalis per G ducti erit $= \frac{MP}{V} \cdot pg$; at est $pg = Vp - Vg = Vp - VC = p - x$, ex quo momentum huius vis ad restitutionem tendens erit $= \frac{MP}{V} (p - x)$. Sit porro portionis intra alterum angulum AVa contentae volumen $= Q$, eiusque centrum grauitatis in Q existente $Vq = q$. Ex hac portione igitur vis oritur $= \frac{MQ}{V}$ nauem in directione qQ sursum vrgens, quae ideo restitutioni in situm aequilibrii reuertitur. Momentum ergo erit $= -\frac{MQ}{V} \cdot gq = -\frac{MQ}{V} (q + x)$.

§. 367. Cum igitur volumen in situ inclinato aquae submersum totum sit $= V + BVb - AVa$; erit momentum ex hoc volumine natum ad nauem restituendam $= -Mbdw + \frac{MP}{V} (p - x) + \frac{MQ}{V} (q + x) = -Mbdw + \frac{M}{V} (Pp + Qq - Px + Qx)$. In hac autem expressione denotat Pp momentum portionis intra angulum BVb contentae respectu axis horizontalis per punctum V ducti et normalis ad planum ADB ; similique modo Qq exhibet momentum portionis intra angulum AVa contentae respectu eiusdem axis horizontalis per V ducti. Denique P et Q sunt volumina ipsa nauis intra angulos BVb et AVa contenta.

§. 368. Repraesentet nunc $AEBFA$ ipsam sectionem aquae, cuius diameter AB congruat cum recta AB in praecedente figura, sitque I centrum grauitatis huius sectionis aquae et PVQ ille axis horizontalis, qui vtriusque

Tab XII.
fig. 4.

Fars II.

B b

sec-

sectioni aquae cum in situ aequilibrum tum in situ inclinato est communis. Nunc concipiatur haec sectio circa axem PQ, aliquantulum conuerti ad angulum dw , ut orientur illa spatia P et Q intra angulos ad PQ contenta: atque diametro AB parallela consideretur recta quaecumque XRY, cuius pars RY verticaliter producta generet triangulum

fig. 5. YRy elementare voluminis P. Area autem huius trianguli erit $= \frac{1}{2} RY^2 \cdot dw$, ex quo erit P = summae omnium $\frac{1}{2} RY^2 \cdot dw = \frac{1}{2} dw \int RY^2$ similique modo erit ex altera parte Q $= \frac{1}{2} dw \int RX^2$. ideoque P - Q $= \frac{1}{2} dw \int (RY^2 - RX^2)$.

fig. 4. §. 369. Sit nunc per centrum grauitatis I sectionis aquae ducta recta EF parallela ipsi PQ, erit ex natura centri grauitatis $\int SY^2 = \int SX^2$. Cum igitur fit RY = S₁ + VI et RX = SX - VI, erit RY² - RX² = SY² - SX² + 2 VI . XY atque $\int (RY^2 - RX^2) = \int SY^2 - \int SX^2 + 2 VI \int XY = 2 VI \int XY$ ob $\int SY^2 - \int SX^2 = 0$. Dat autem $\int XY$ aream totius sectionis - aquae quae posita est = 2 D, et est VI = c + x, vnde erit P - Q $= \frac{1}{2} dw \cdot 2 (c+x) \cdot 2 D = 2 D (c+x) dw$. Quare pro formula superiore erit - Px + Qx = - 2 D (c+x) x dw = - 2 D dw (cx + xx), vnde iam litterae P et Q ante tantum assumtae ex calculo exterminabuntur, superest igitur ut valorem Pp + Qq determinemus.

fig. 5. §. 370. Cum fit Pp momentum ponderis voluminis aquei intra angulum BVb, et Qq momentum ponderis aquae intra angulum AVa contenti respectu axis PQ, momentum ipsius Pp reperietur ex angulari sectione YRy, fit enim RM = z, MN = dz, ob angulum YRy = dw erit Mm = z dz, et particula MNnm = z dz dw. Huius

fig. 4. igitur momentum respectu axis PQ erit = z z dz dw = dz dz.

zzdz.

$zzdz$. At est $zzdz$ productum ex particula quacunque sectionis aquae ipsius in quadratum distantiae suae ab axe PQ multiplicatum, ideoque momentum quasi materiae elementare sectionis aquae respectu axis PQ. Quare cum fit $Pp = dw$. summam omnium $zzdz$, in parte PBQ et $Qq = dw$. summam omnium $zzdz$ in parte PAQ, erit $Pp + Qq = dwx$ momentum sectionis aquae respectu axis PQ, cuiusmodi momenta sectionis aquae iam supra sumus contemplati.

§. 371. Considerauimus autem ante momentum sectionis aquae respectu axis horizontalis per eius centrum grauitatis I ducti; quamobrem etiam hic concipiamus axem EF per I ductum et ipsi PQ parallelum, sitque momentum sectionis aquae respectu huius axis $EF = 2D.ff$, est enim perpetuo momentum cuiusque siue corporis siue superficies aequale producto ex quadrato alicuius lineae rectae in corporis vel massam, vel in superficies aream. Deinde etiam demonstrauius si habeatur momentum alicuius figurae respectu axis per eius centrum grauitatis transeuntis quemadmodum inde momentum respectu cuiusuis alius axis illi paralleli definiri debeat. Scilicet regulam ibi traditam sequentes reperiemus momentum huius sectionis aquae respectu axis $PQ = 2D.ff + 2D.VI^2 = 2Dff + 2D(c+x)^2$, vnde erit $Pp + Qq = 2Ddw (ff + cc' + 2cx + xx)$.

§. 372. Cum nunc fit $Pp + Qq = 2Ddw (ff + cc + 2cx + xx)$ et $-Px + Qx = -2Ddw (cx + xx)$ erit $Pp + Qq - Px + Qx = 2Ddw (ff + cc + cx)$. Atque hanc obrem momentum quod ex pressione aquae oritur ad conuertendam nauem circa axem horizontalem

Tab. XII.
fig. 3.

per centrum gravitatis G ductum atque ad planum ADB normalem erit $= Mdw \left(-b + \frac{2D(jf+cc+cx)}{v} \right)$ huiusque effectus tendet ad restitutionem navis in situm æquilibrii. Atque ex hac expressione simul intelligitur, vtrum navis eo modo, quo posuimus, ex situ æquilibrii declinata sese restituere conetur an secus. Nimirum navis se restituet si fuerit $\frac{2D(jf+cc+cx)}{v} > b$. Quodsi autem sit $VI = 0$, qui est casus supra in stabilitatis indagazione pertractatus, restitutio sequetur si fuerit $\frac{2Dff}{v} > b$.

§. 373. Cum igitur navis circa axem longitudinalem stabilitate prædita ponatur, erit $\frac{2Dff}{v} > b$. Quamobrem si inclinatio fiat circa axem PQ vt hic posuimus, vis restituens maior erit, quam vis restituens inclinatione circa axem EF facta, atque excessus illius vis super hanc erit $= \frac{2DMdw}{v}(cc+cx) = \frac{2DMxw}{v}$, VI.CI, si quidem hæc expressio fuerit affirmatiua. Ex quo perspicuum est, si punctum V ad alteram partem punctorum C et I nempe inter I et puppim cadat, tum hanc expressionem fieri negatiua, atque vim restituentem minorem esse futuram, quam si inclinatio circa axem EF esset facta; quin etiam valor ipsius x tantopere in negatiuum excrecere poterit, vt vis restituens, quatenus ea in motu rotatorio producendo consistit, fiat negatiua atque inclinationem adeo augeat.

§. 374. Quamuis autem hoc casu, quo x tantum valorem negatiuum induit, vt etiam $c + x$ fiat negatiuum satis ingens, inclinatio de situ æquilibrii augeatur, tamen subuersio navis non subsequetur, dummodo habeat stabilitatem. Tum enim centrum gravitatis magis erit eleua-

elevatum quam in situ aequilibrii, simul vero altera vis superius determinata, id deprimet, atque in statum naturalem reducet. Quamobrem inclinatio primo tantum momento aliquantulum augebitur, mox vero cum centrum gravitatis propius fuerit ad suum situm naturalem reductum, motus eueniet fere congruus cum eo, quem supra in motu restitutionis in statum aequilibrii definiuimus, atque ideo deinceps inclinatio diminui incipiet. Interim tamen hoc certo sequitur, motum oriturum esse perquam difformem, atque a motu oscillatorio uniformi alienissimum.

§. 375. Consideremus autem casum, quem figura repraesentat, quo momentum pressionum aquae ad inclinationem minuendam atque ad restitutionem tendit; motumque inuestigemus quo haec restitutio saltem incipiet. Ad hoc ponatur momentum materiae totius navis respectu axis horizontalis per centrum gravitatis ducti, circa quem fiet restitutio $= Mk^2$. Atque hinc initium motus restitutionis simile erit motui restitutionis penduli simplicis cuius longitudo est $= \frac{Vkk}{2D(jf+cc+cx)-Vb}$. Ac penduli tantae longitudinis oscillationibus isochronae forent oscillationes navis circa axem horizontalem longitudinalem, si modo hae oscillationes essent uniformes, neque a motu centri gravitatis turbarentur.

§. 376. Ex his intelligitur, motum navis post inclinationem factam oriundum eo magis fore irregularem ac perturbatum, quo magis primi motus tum centri gravitatis, tum rotationis circa axem longitudinalem a se invicem discrepent. At supra inuenimus motum centri gravitatis initio convenire cum motu penduli simplicis longitudinis $\frac{Vx}{2D(c+x)}$ (§. 363), hic vero est ostensum motum

rotationis ipfo initio conuenire cum motu penduli, cuius longitudo fit $= \frac{Vkk}{2D(j+cc+cx)-Vb}$. Quo maior itaque fuerit differentia inter has expreffiones eo maior difformitas inerit in motu nauis. Contra autem perfpicuum est, fi hae duae longitudoes fuerint inter fe aequales, tum oscillationes vtriusque generis consentire, atque id circo fore regulares neutrasque ab alteris turbari.

§ 377. Dabitur igitur casus, quo ex facta inclinatione nauis motum oscillatorium vniformem ac regularem recipiet, id quod eueniet si punctum V seu interuallum CV = x ita fuerit constitutum vt fiat $\frac{Vx}{2D(c+x)} = \frac{Vkk}{2D(j+cx+cx)-Vb}$. Quare si ex hac aequatione definiatur valor ipsius x, prodibit ille inclinationis casus, ex qua nauis motum oscillatorium vniformem consequetur. Iste autem casus latius patebit, nam cum omne corpus, quod initio motu maxime irregulari mouetur, mox vniformitatem affectet, eiusque motus tandem sese ad motum oscillatorium simplicem pendulorum similem componat; per hanc inuestigationem ille innotescet motus, quem nauis, quantumuis irregulari motu principio circa axem longitudinalem moueri inceperit, tandem assequetur; ita vt omnes motus oscillatorii maxime irregulares tamen in hunc motum oscillatorium regularem tandem abire debeant.

§. 378. Longitudo igitur penduli isochroni cum motu oscillatorio regulari, quem nauis tandem recipiet, erit $= \frac{Vx}{2D(c+x)}$, si ipsi x valor tribuatur, quem obtinet in hac aequatione: $2Dkkc + 2Dkkx = 2Dffx + 2Dccx + 2Dcxc - Vbx$ quae reducitur ad hanc $xx = \frac{2x(Dkk - Dff - Dcc + \frac{1}{2}Vb) + 2Dkkc}{2Dc}$ Ponatur breuitatis gratia $Dff + Dcc -$

$Dcc - \frac{1}{2}Vb = Dpp$, est enim ob stabilitatem $Dff > \frac{1}{2}Vb$, hincque multo magis $Dff + Dcc > \frac{1}{2}Vb$, eritque $xx = \frac{x(kk - pp)}{c} + kk$; unde elicitur $x = \frac{kk - pp}{2c} \pm \sqrt{(kk + \frac{kk - pp}{4cc})}$. Cum igitur x duplicem habeat valorem, oscillationes duplici modo tandem regulares evadere poterunt; vterque enim valor semper est realis. Hoc autem valore substituto prodit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{v}{2D} \cdot \frac{kk - pp \pm \sqrt{(4cckk + (kk - pp)^2)}}{2cc + kk - pp \pm \sqrt{(4cckk + (kk - pp)^2)}} = \frac{v}{2D} \cdot \frac{2kk}{kk + pp \pm \sqrt{(4cckk + (kk - pp)^2)}}$.

§. 379. Vt hi duo casus quibus oscillationes obtinentur uniformes, melius percipiantur, ponamus primum esse $CI = c = 0$, quo casu iam novimus oscillationes tam verticales, quam horizontales esse regulares. Fiet autem $pp = ff - \frac{Vb}{2D}$; et $\sqrt{(kk + \frac{(kk - pp)^2}{4cc})} = \frac{kk - pp}{2c} + \frac{cck}{kk - pp}$, unde $x = \frac{kk - pp}{2c} \pm \frac{kk - pp}{2c}$ ob $c = 0$. Ergo fit vel $x = 0$ vel $x = \infty$. Priori casu oscillationes solae prodeunt horizontales, quarum longitudo penduli simplicis isochroni est $= \frac{v}{2D} \cdot \frac{kk}{pp} = \frac{vkk}{2Dff - Vb}$, posteriori oscillationes solae verticales efficientur respondentes pendulo $= \frac{v}{2D}$, quos ambo casus iam ante tractauimus.

§. 380. Ponamus esse $p = k$ seu $kk = ff + cc \frac{Vb}{2D}$, quae positio in navium figuras cadere potest, erit $x = \pm k$. Altero casu quo est $x = CV = \pm k$ erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{vk}{2D(c+k)}$, altero casu vero quo est $CV = -k$ fiet longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{vk}{2D(k-c)}$. Ad similitudinem ergo talis penduli oscillationes oriri poterunt si fuerit $k > c$ hoc est $p > c$. Quoties autem navis habet stabilitatem simul erit $p > c$; nam propter stabilitatem cum sit $Dff > \frac{1}{2}Vb$, erit in hac aequatione $Dff + Dcc - \frac{1}{2}Vb = Dpp$ etiam $p > c$. Quando autem

est

est $p > c$ neutro casu longitudo penduli inuenta vnquam negatiua esse potest, ac propterea duobus semper casibus oscillationes vniformes et tautochronae oriri poterunt.

§. 381. Si interuallum $CI = c$ fuerit valde paruum, simul vero $(kk - pp)^2$ quantitas satis ingens vt prae ea terminus $4cckk$ sit perquam exiguus, erit $\sqrt{4cckk + (kk - pp)^2} = kk - pp + \frac{2cckk}{kk - pp}$ proxime; vnde erit $x = \frac{kk - pp}{2c} + \frac{(kk - pp)}{2c} + \frac{ckk}{kk - pp}$. Longitudo autem penduli simplicis isochroni erit, si signum $+$ locum habeat $= \frac{v}{2D} \cdot \frac{1}{1 + \frac{c}{kk - pp}} = \frac{v}{2D} \cdot \frac{kk - pp}{cc + kk - pp}$, in his autem oscillationibus verticales plurimum praeualebunt, motusque circa axem horizontalem vix erit sensibilis. Valente autem signo $-$ erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{v}{2D} \cdot \frac{kk}{pp - kk - pp}$; in hocque oscillationum genere oscillationes verticales fere erunt nullae.

§. 382. Quomodo autem cunq̄ue nauis initio inclinatur ex situ aequilibrii, et quantumuis irregularis motus inde oriatur, tamen ipsum motum, qui sequetur per principia ante stabilita determinare licebit dummodo inclinatio de statu aequilibrii fuerit minima. Ponamus enim nauem principio ita declinatam esse, vt centrum grauitatis interuallo r magis fuerit depressum quam in statu aequilibrii, atque vt tota nauis motu angulari ex situ aequilibrii declinata sit angulo $= s$. Tum vero motum esse subsecutum, hocque durante depressionem centri grauitatis infra situm naturalem esse adhuc $= y$, et situm nauis praesentem a situ aequilibrii differre angulo $= w$. motum vero in hoc statu ita esse comparatum, vt celeritas, qua centrum gra-

gravitatis in fitum naturalem procedit, fit debita altitudini v , celeritatem angularem autem circa axem horizontalem per centrum gravitatis G ductum tantam esse, vt in distantia k ab hoc axe debita fit altitudini u .

§. 383. Repraesentet autem figura eum naus statum, quem hic durante motu consideramus, erit nobis w quod ante fuerat $= dw$, atque cum fit $y = xdw$, hic nobis est $\frac{y}{w}$, quod ante fuerat x . Iam tempusculo minimo dt centrum gravitatis ascendendo progrediatur per intervallum $= -dy$, quo progressu altitudo celeritati debita v augmentum accipiat dv ; eodem vero tempusculo dt motu angulari naus conuertatur per anguli elementum $= dw$, quia ad statum aequilibrii accedit, et altitudo celeritati angulari, quae in distantia k viget, debita u augmentum capiat $= du$. Cum igitur elementa dy et du aequali tempusculo dt conficiantur, erit ex natura motus $dt = -\frac{dy}{v} = -\frac{kdw}{v u}$ vnde erit $dy : dw = kV v : Vu$.

§. 384. Quodsi nunc vtramque sollicitationem contemplerur, qua tam ascensus centri gravitatis acceleratur, quam motus rotatorius incitatur, reperiemus binas sequentes aequationes

$$\text{I. } dv = -dy \cdot \frac{2D}{V} (cw + y)$$

$$\text{II. } du = -w dw \left(\frac{2D}{V} (cc + ff) - b \right) - dw \cdot \frac{2D}{V} cy$$

Ponatur brevitatis gratia $\frac{2D}{V} = 2m$ et $\frac{2D}{V} (cc + ff) - b = 2nk^2$ atque habebuntur sequentes aequationes

$$\text{I. } dv = -2mcw dy - 2my dy$$

$$\text{II. } du = -2mcy dw - 2nk^2 w dw$$

Pars II.

C c

quae

quae inuicem additae summam producunt integrabilem; erit scilicet

$$v + u = C - 2mcwy - my^2 - nk^2w^2$$

Cum autem ipso motus initio, quo erit $y = r$ et $w = s$, sit $v = 0$ et $u = 0$ erit

$$v + u = 2mcrs + mr^2 + nk^2 - 2mcwy - my^2 - nk^2w^2.$$

§. 385. Quoniam autem elementa dy et dw eodem tempore absoluuntur, erit $dy = \frac{kdw\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ et $dw = \frac{dy\sqrt{u}}{k\sqrt{v}}$; vterque valor substituatur in illis aequationibus differentia- libus, eritque

$$\text{I. } \frac{dv\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = -2mckw dw - 2mky dy$$

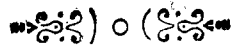
$$\text{II. } \frac{du\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = -\frac{2mcy dy}{k} - 2nkwdy$$

quarum summa integrata dabit $2\sqrt{vu} = \text{Const.} - mckw^2 - \frac{mcy^2}{k} - 2mkfy dw - 2nkfy dy$. At ex aequatione differentiali prima est $-2fw dy = \frac{v}{mc} + \frac{yy}{c}$, ex altera vero $-2fy dw = \frac{u}{mc} + \frac{nk^2w^2}{mc}$; quibus substitutis habebitur $2\sqrt{vu} = \text{Const.} + \frac{ku}{c} + \frac{nk v}{mc} + (\frac{nk}{c} - \frac{mc}{k})(yy + k^2w^2)$ seu $\frac{mku + nk v}{mc} - 2\sqrt{vu} = (\frac{nk}{c} - \frac{mc}{k})(rr - yy + k^2(ss - w^2))$.

§. 386. Duas igitur nacti sumus aequationes integrales, ex quibus bini valores v et u poterunt determinari per r , s , y et w . Quodsi fuerit factum, differentietur valor ipsius v inuentus ac differentiale aequale ponatur ipsi $-2mcw dy - 2my dy$, hocque pacto obtinebitur aequatio inter y et w , cuius ope ad datum quemuis ipsius y valorem licebit valorem anguli w assignare. Ac si denique factis substitutionibus hae aequationes in subsidium vocentur $dt = \frac{-dy}{\sqrt{v}} = \frac{-kdw}{\sqrt{u}}$, omnes quantitates variables v , u , y et w per tempus t exhiberi poterunt, atque hoc facto

facto ad datum quoduis tempus status, in quo navis verfabitur, assignari poterit.

§. 387. Hanc inuestigationem autem ulterius non persequor, cum propter calculi difficultatem et prolixitatem, tum etiam, quia praesens institutum eo non multum iuuaretur. Sufficiat igitur perspicue monstrasse, leges motus hic et in superiore libro stabilitas omnino sufficere ad motus huiusmodi maxime irregulares ac perturbatos determinandos, quanquam saepius calculus ob summam molestiam ad finem perducere non potest. Etsi autem in hac inuestigatione inclinationem navis e situ aequilibrii infinite parvam posuimus, tamen methodus resoluendi manet eadem inclinatione posita quantumvis magna. At tum calculus multo adhuc fit prolixior et difficilior, eo quod in tanta inclinatione, figura sectionis aquae continuo mutatur cuius mutationis ideo ratio quouis momento haberi debet.



Caput. V.

DE INCLINATIONE, QVAM NAVES A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE PATIVNTVR.

§. 388.

In hoc capite incipiemus in effectus quos vires quaecunque externae nauibus applicatae producere valent, inquirere. Quanquam enim hoc argumentum in superiori libro, vbi corpora quaecunque aquae innatantia considerauimus, iam fufius est pertractatum, tamen hic eandem inuestigationem ad naues in specie transferri conueniet, vt regulas etiam hinc confequamur certas, quas cum in constructione nauium, tum etiam in earum instructione et gubernatione obseruari oporteat. Ex fingulis enim circumstantiis ad naues spectantibus propositum nobis est regulas pro nauium constructione, oneratione, et gubernatione elicere, quo deinceps ex omnium harum regularum collisione perfectissima nauium forma colligi queat.

§ 389. Omnes effectus, quas vires quaecunque in naues exerere possunt, ad quinque genera reuocantur. Primum genus eos complectitur effectus, quibus centrum grauitatis nauis, atque adeo ipsa nauis vel sursum vel deorsum vrgetur. Ad genus secundum pertinet motus horizontalis centri grauitatis, quo nauis super aqua a viribus sollicitata progreditur secundum quamcunque regionem. In tertio genere comprehendo motum nauis rotatorium circa
axem

axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem. Quartum autem et quintum genus inclinationes nauis respicit circa axem horizontalem siue longitudinalem siue latitudinalem. Atque haec duo postrema genera hic diligentius inuestigare, et quanta inclinatio a datis quibusque viribus oriri debeat, determinare est propositum.

§. 390. Plerumque autem vna eademque vis plures effectus diuersos in nauis producere solet, verum tamen singuli sunt ita comparati et a reliquis disiuncti, vt nullus effectus, a reliquis ab eadem vi oriundis turbetur, quemadmodum in libro superiori demonstratum est. Quamobrem cum hic tantum inclinationem nauis circa axem horizontalem siue longitudinalem siue latitudinalem inuestigare constituerim, hunc effectum solum definire poterimus, sine vilo respectu ad reliquos effectus habito, qui forte ab eadem vi proficiscuntur. Atque ita in hoc negotio versari licebit, quasi reliqui effectus vel omnino hanc inclinationem non comitarentur, vel ab aliis viribus, quae nullam inclinationem producant, penitus destruerentur. Semper enim vires eiusmodi contrariae concipi possunt, quae omnes datae vis effectus praeter eum, qui in inclinatione nauis consumitur, destruant.

§. 391. Quo igitur clarius eas vires cognoscere queamus, a quibus inclinatio nauis producatum primum eas vires notari iuuabit, a quibus nulla inclinatio oriri potest. Hinc enim in quolibet casu eiusmodi vires contrariae fingi poterunt, quae effectus omnes reliquorum generum praeter inclinationem destruant. Imprimis autem hic eae vires considerandae veniunt, quarum directiones per centrum grauitatis nauis transeunt; harum enim virium totus effe-

ctus vel in promotione navis secundum directionem horizontalem, vel in elevatione seu depressione navis tantum consistit. A talibus igitur viribus neque rotatio navis circa axem verticalem neque vlla inclinatio oriri poterit: ex quo huiusmodi vires in hoc capite non locum invenient, nisi ad effectus ab instituto alienos mente saltem destruendos.

§. 392. Simili modo nulla vis, cuius directio transit per axem horizontalem per centrum grauitatis ductum, inclinationem circa illum axem generare valet; et hanc obrem si inclinatio circa axem longitudinalem tantum consideretur, omnes vires huic effectui erunt impares, quarum directiones transeunt per axem longitudinalem, hoc est, quae productae cum hoc axe vel concurrunt, vel parallelae existunt; quod idem de axe latitudinali est intelligendum. Deinde vero omnes vires, quarum directiones sunt horizontales, atque in ipso plano horizontali per centrum grauitatis transeunte, sitae, circa neutrum axem siue longitudinalem siue latitudinalem nauem inclinabunt. Ex his igitur iam facilius intelligetur, a quibusnam viribus navis inclinationem patiat; an vero secus; quodsi enim vis nauem vrgens aliter sit comparata, atque modo indicauimus, certo inclinatio navis subsequetur.

§. 393. Quaecunq; autem oriatur navis inclinatio a fitu naturali, ea circa axem aliquem horizontalem per centrum grauitatis navis transeuntem fieri censenda. Quanquam vero huiusmodi axes numero infiniti existunt, tamen omnes inclinationes reuocari possunt ad binos memoratos axes principales, longitudinalem scilicet ac latitudinalem; ita vt definita inclinatione, quae a data vi circa vtrumque illum
axem

axem generatur, vera inclinatio navis cognoscatur; simulque axis ille obliquus assignari queat, circa quem navis durante inclinatione sese conuerterit. Simili scilicet modo, quo decompositio virium, inclinatio circa axem obliquum resolui potest in binas inclinationes circa ambos axes principales.

§ 394. Sit enim AEBF sectio navis horizontalis Tab. XIII. fig. 1. per eius centrum grauitatis G facta, in eaque ambo axes principales, longitudinalis AB et latitudinalis EF; sitque A prora, B puppis, E latus finistrum, F dextrum. Ponamus iam nauem duplicem pati inclinationem, alteram circa axem AB finistrorsum per angulum α , alteram circa axem EF prorsum per angulum ξ , huicque duplici inclinationi aequialere inclinationem simplicem, quae fiat circa axem obliquum MN versus V, per angulum γ . Sumatur iam punctum quoduis V, e quo ad tres illos axes ducantur normales VT, VS, et VR. Nunc pro duplici inclinatione, inclinatio circa axem AB deprimet per spatium α . TV, altera inclinatio circa axem EF deprimet idem punctum per spatium ξ . SV. ita vt punctum V a duplici inclinatione deprimatur per spatium α . TV + ξ . SV. ita simplici inclinatione circa axem MN deprimatur per spatium γ . RV.

§. 395. Quoniam igitur tam duplex quam simplex inclinatio eundem motum in singulis punctis V producit, fiet α . TV + ξ . SV = γ . RV. Ducta ergo recta GV fiet α . fin. AGV + ξ . fin. EGV = γ . fin. MGV. Quae aequatio cum vbique locum habere debeat, erit puncto V in A translato ξ = γ . fin. MGA = γ . cof. MGE; puncto vero V in E translato fit α = γ . fin. MGE = γ cof.

cof. BGM. ita autem angulis α et ξ determinatis erit vbi-
que α fin. AGV + ξ fin. EGV = γ . fin. MGV. Fiet au-
tem $\alpha\alpha + \xi\xi = \gamma\gamma$, ideoque $\gamma = \sqrt{\alpha\alpha + \xi\xi}$; hinc-
que porro positio axis obliqui MN ita definietur vt fit
fin. EGM = $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\alpha + \xi\xi}}$ et cof. EGM = $\frac{\xi}{\sqrt{\alpha\alpha + \xi\xi}}$ seu tang.
EGM = $\frac{\alpha}{\xi}$.

§. 396. Quodsi ergo naus duplicem patiatur incli-
nationem alteram circa axem longitudinalem AB finifror-
fum per angulum α , alteram circa axem latitudinalem
EF per angulum ξ ; duplex haec inclinatio renocabitur
ad inclinationem simplicem circa vnicum axem obliquum,
quae fiet per angulum $\gamma = \sqrt{\alpha\alpha + \xi\xi}$. Positio autem
huius axis obliqui fequenti modo definietur. Diuifa super-
ficie naus fectionis per axes principales in quatuor portio-
nes AGE, BGE, BGF et AGF; binae portiones a
duplici inclinatione motus consentientes nancifcentur, vti
nostro cafu portiones AGE, et oppofita BGF; reliquae
vero binae oppofitae portiones AGF et BGE motus di-
fcrepantus accipient per easque axes ille obliquus MN
transibit, ita autem erit positus, vt fit anguli EGM tan-
gens = $\frac{\alpha}{\xi}$, circa quem naus inclinabitur per angulum =
 $\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}$.

§. 397. Inclinatio igitur quam naus a vi quacun-
que patietur, commodiffime definietur, fi, quantam inclina-
tionem ea vis circa vtrumque axem principalem producat,
inueftigabitur; tum enim fimul axis obliquus innotefcét,
circa quem ab ea vi inclinatio simplex orietur, atque in-
clinationis quantitas. Quamobrem fufficiet expoſuiſſe me-
thodum, cuius ope inclinatio circa alterutrum axem prin-
cipalem a data vi oriunda determinari queat. Facillime
autem

autem hoc praeftabitur, si vis seu potentia naudem follicitans in ternas vires refoluatur, quarum vnus directio fit verticalis, reliquarum binarum vero directiones horizontales, ita vt alterius directio parallela fit axi longitudinali, altera vero axi latitudinali; haecque refolutio sine vlla molestia instituitur, dum vis follicitans, si multiplicetur per cosinum anguli, quem eius directio cum vna ex illis tribus directionibus facit, statim praebet vim resultantem in ea ipsa directione.

§. 398. Cum autem vis quaecunque naudem follicitans in huiusmodi tres vires fuerit distributa, singulae seorsim considerentur. Ac primo quidem vis verticalis spectetur, inuestigetur eius distantia ab vtroque plano verticali, altero per axem latitudinalem, altero per axem longitudinalem; quo facto vis verticalis multiplicata per distantiam a plano longitudinali dabit momentum eius respectu axis longitudinalis; similique modo eadem vis multiplicata per distantiam a plano verticali, quod per axem latitudinalem transit, dabit eius momentum respectu axis latitudinalis. Inuentis autem his momentis respectu vtriusque axis principalis, diligenter dispiciatur, in vtram plagam inclinatio nauis inde debeat oriri, quo pateat, vtrum plura eiusmodi momenta ad eundem axem relata per additionem an per subtractionem iungi debeant.

§. 399. Quod autem ad binas reliquas vires horizontales attinet, perspicuum est, eam, cuius directio axi longitudinali est parallela nullum momentum respectu huius axis producere; neque etiam ab ea, cuius directio parallela est axi latitudinali, respectu huius axis momentum existere. Quare ex vi, cuius directio est parallela axi longitudinali tantum momentum respectu alterius axis lati-

tudinalis oritur, contraque ex vi, cuius directio est parallela axi latitudinali, tantum nascetur momentum respectu axis longitudinalis. Vtriusque autem huius momenti quantitas obtinebitur, si vtraque vis multiplicetur a distantia sua a plano horizontali per centrum gravitatis ducto, quae adeo distantia pro vtraque vi erit eadem.

§. 400. Quaecunque ergo vi navem sollicitante resoluta in ternas memoratas vires momenta ex ea pro utroque axe principali oriunda facili negotio determinabuntur. Duo autem ad summum momenta pro ambobus axibus reperientur, quorum alterum ex vi verticali, alterum ab una vi horizontali proficiscitur. De his itaque binis momenti dispiciendum est, utrum ad effectus contrarios an consentientes producendos sint accommodata; ut intelligatur, utrum eorum differentia an summa capi debeat, pro toto momento ex illa vi oriundo. Quodsi autem navis simul a pluribus viribus sollicitetur, simili modo momenta ex singulis viribus pro utroque axe principali colligentur, ex quibus tandem coniunctis momenta totalia pro utroque axe prodibunt.

§. 401. In hoc negotio vires sollicitantes tantum instituto praesenti conformiter sumus contemplati: momenta scilicet tantum ex iis deriuavimus, ad inclinationem producendam idonea, atque a reliquis effectibus cogitationem prorsus abstraximus. Ista vero resolutio cuiusque vis in ternas pariter ad effectus reliquos cognoscendos maxime est accommodata. Nam primo vis verticalis praeter inclinationem producet in navi vel maiorem vel minorem immersionem. Atque vires horizontales navem partim secundum horizontem propellent, partim conuertent

DE INCL. QVAM NAVES A VIRIB. QVIB. PAT. 211

tent circa axem verticalem per centrum grauitatis nauis ductum.

§. 402. Quodsi iam ex viribus nauem sollicitantibus deducta fuerint momenta nauem circa ambos axes principales inclinantia, ex iis quae in libro superiori demonstrata sunt facili negotio inclinatio ipsa circa vtrumque axem determinabitur; si quidem vti hic perpetuo ponimus, inclinatio fuerit tam parua vt ea in calculo pro infinite parua haberi queat, id quod accidit si sinus inclinationis ipsi inclinationis angulo fuerit proportionalis. Circa vtrumque autem axem duplex oriri potest inclinatio; circa axem longitudinalem scilicet nauis vel sinistram vel dextram versus inclinari potest; circa axem latitudinalem vero inclinatio vel proram versus, vel retrorsum fieri potest, quod discrimen ex momentis inclinationem vtramque generantibus facile cognoscetur.

§. 403. Inclinatio vero circa quemcunque axem colligitur ex stabilitate, quam nauis habet respectu illius axis. Si enim stabilitas respectu axis cuiusuis ponatur F , eaque modo supra adhibito exprimatur, ea ita se habet, vt, si nauis circa illum axem inclinetur angulo $= w$, momentum quo ipsa nauis sese restituere conatur, futurum fit $= Fw$. posito sinu toto $= r$, et denotante w vel ipsum arcum, angulum inclinationi aequalem in hoc circulo subtendentem vel eius sinum. Ex quo apparet esse F momentum, seu productum ex pondere quodam in aliquam longitudinem. Expressimus autem stabilitatem F per pondus nauis M in longitudinem datam ductum.

§. 404. Ponamus nunc ex viribus externis sollicitantibus nauem resultasse momentum $= P$. ad nauem circa axem siue

longitudinalem siue latitudinalem inclinandam , cuius respectu stabilitas fit $= F$: atque ab hoc momento oriri inclinationem per angulum $= w$, quam quaerimus. Cum igitur ipsa naus in hoc statu inclinato polleat vi sese restituendi , huiusque vis momentum fit $= F w$, necessè est , vt momentum P virium hanc inclinationem producens aequale sit et contrarium vi restituenti ; ex quo fiet $P = F w$, hincque $w = \frac{P}{F}$. Quamobrem fractio $\frac{P}{F}$, cuius numerator et denominator quantitates homogeneas momenta scilicet nota denotant , dabit sinum anguli inclinationis oriundae a virium momento P , posito sinu toto $= I$.

§. 405. In genere igitur intelligitur , quo maior fuerit stabilitas naus respectu eius axis , circa quem naus inclinatur , eo minorem fore inclinationem , eadem manente vi inclinante P , quod quidem ex ipsa stabilitatis idea consequitur. Quamobrem vt naus minimis inclinationibus sit obnoxia , stabilitas quantum fieri potest , augeri debet , quod , quibus modis efficiendum sit , supra fusius ostendimus. Atque ideo ad nauium formam perfectissimam inuestigandam hic stabilitate F relicta , dispiciemus , quemadmodum momentum P pro naus incolumitate comparatum esse debeat.

§ 206. Fractio igitur $\frac{P}{F}$, in qua est P ad F vt sinus anguli inclinationis , a momento virium P ortae ad sinum totum , tam exigua esse debet , vt haec inclinatio naui nullum detrimentum afferat. Quamobrem inclinationes illas maximas quas naus sine vilo periculo subire potest , definiri oportet , vt limites habeantur , quos inclinationes transgredi non liceat. Ac primo quidem pro axe longitudinali videtur inclinationis angulus 10° superare non debere ;

bere ; pro axi latitudinali autem inclinatio vltra quinque gradus exfurgere non potest , eo quod ob ingentem nauium longitudinem immerfio et emerfio in prora et puppi nimis fieret magna. Hos autem limites non quasi fixos affumimus , fed tantum exempli gratia ; atque pro dato nauium ftatu ii vel maiores vel minores accipi poterunt. Interim tamen incolumitati nauium eo magis confuletur , quo minores ifti limites conflituantur.

§. 407. Si igitur inclinatio circa axem longitudinalem oriatur , prouidendum eft , ne valor fractionis $\frac{P}{F}$ vnquam excedat $\frac{1}{2}$. quae fractio proxime accedit ad finum anguli 10° . At pro inclinatione circa axem latitudinalem fractionis $\frac{P}{F}$ valor nunquam maior effe debet quam $\frac{1}{2}$. Quare fi in nauibus ftabilitas refpectu vtriusque axis principalis iam fuerit definita , in hoc erit elaborandum , vt nauis nunquam tantis viribus exponatur , quarum momenta inclinationem producentia excedant limites iftos definitos , vel alios , qui ad naues magis reperiantur accommodati , qui quidem ab his non multum difcrepabunt. Cum autem ifti limites angulis fatis paruis contineantur , id nancifcimus commodi , vt ipfi anguli fuis finibus proxime fint proportionales ; ex quo regula data perpetuo tuto adhiberi poterit.

§. 408. Quodfi autem euentus externi , quibus naues expositae effe folent , non ita ad lubitum temperari queant , vt momenta inclinantia , quae ex iis nafcuntur , infra praefcriptos limites redigi queant atque ideo valor litterae P tanquam datus accipi debeat ; tum aliter fecuritati nauis profpici non potest , nifi vt ipfi tanta ftabilitas concilietur , ex qua angulus inclinationis $\frac{P}{F}$ prodeat innocuus.

Atque ex huiusmodi casibus vel fortuito vel necessario se immiscensibus ipsa stabilitatis quantitas determinari debet. Cum enim nauium conseruatio prae omnibus reliquis commodis intendatur, in nauium constructione stabilitas praecipue spectari debet, atque effici, vt ea ad debitam quantitatem augeatur. Quod iudicium cum ex quantitate virium externarum, naui interitum minantium, tum ex statu nauium ipso, vnde intelligitur, quantam inclinationem quaeque nauis sine periculo pati queat, institui oportet.

§. 409. Si omnes naues tam ratione constructionis quam onerationis essent corpora inter se perfecte similia, tum earum stabilitates respectu axium homologorum tenerent inter se rationem quadruplicatam laterum homologorum. Scilicet si maioris nauis fuerit profunditas carinae $= C$ et minoris profunditas carinae $= c$, erit primo pondus nauis maioris ad pondus minoris vti C^3 ad c^3 . Stabilitas autem nauis maioris se tenebit ad stabilitatem minoris vt C^4 ad c^4 . Si quidem vtraque stabilitas ad axem eiusdem nominis hoc est siue longitudinalem siue latitudinalem referatur. Quare si stabilitas maioris nauis ponatur $= F$ et stabilitas minoris $= f$ erit $F : f = C^4 : c^4$.

§. 410. Vires autem externae, quibus naues expositae esse solent, siue spectetur vis propellens, siue vis aquarum, tenent rationem duplicatam laterum homologorum. Quod si enim naues vento propellantur vis venti eadem celeritate vrgentis erit vt superficies velorum, indeque tenebit rationem duplicatam laterum homologorum. Simili modo resistentia aquae, quando omnia sunt paria, superficiei nauis in quam irruit est proportionalis, hincque etiam tenebit rationem duplicatam laterum homologorum. Vnde
efficitur

efficitur vt eiusmodi naues similes ab eiusdem venti impulsu aequales in aqua acquirant celeritates, postquam scilicet ad motum aequabilem fuerint redactae. Quo enim naues fuerint maiores eo tardius hanc velocitatem vniformem assequentur, vti patet ex iis, quae supra de motu progressiuo sunt tradita.

§. 411. Cum autem vires sollicitantes teneant rationem duplicatam laterum homologorum, earum momenta, ex quibus inclinationem nauium concludere oportet, erunt in ratione triplicata laterum homologorum, eo quod momenta prodeunt, si vires sollicitantes per vectes multiplicentur, qui ipsis lateribus homologis sunt proportionales. Quare si pro naui maiori momentum inclinans ponatur = P et pro naui minori = p , erit $P : p = C^3 c^3$. Hinc igitur anguli inclinationum in naui maiori et minori erunt vt $\frac{1}{c}$ ad $\frac{1}{C}$. Hoc est inclinationes in nauibus similibus a viribus quoque paribus productae erunt reciproce vti latera homologa; ita vt, tametsi omnia sint similia, inclinationes tamen maxime fiant dissimiles.

§. 412. Cum igitur in nauibus similibus inclinationes a paribus viribus ortae sint eo minores, quo maiores fuerint naues, manifestum est nauium similibus maximas minimo subuersionis periculo esse obnoxias. Ex quo intelligitur quo naues conficiantur maiores, eas praeditas esse eo maioribus commodis, si cetera omnia sint paria. Quin etiam si naues minores ita fuerint comparatae, vt sine aperte interitus periculo tempestatum impetibus committi nequeant, tamen naues maiores ad idem exemplum constructae ab eodem periculo ob solam magnitudinem liberantur. Hocque quotidiana experientia clarissime confirmat,

mat, quippe qua constat minora nauigia tempeſtatis vehementiam ſuſtinere minime poſſe, cum tamen naues maiores tuto per mare migrare queant. Acceſdunt quidem hic alia incommoda ab vndis oriunda, quarum hic nullam habemus rationem; hoc tamen non obſtante theoria manifeſto per experientiam confirmatur.

§. 413. Quodſi autem ponamus nauem minorem vim tempeſtatis ſine vlllo periculo ſuſtinere poſſe, tum maior nauis, ſi quidem omnia ſint ſimilia, multo tutius in eadem tempeſtate verſabitur. Deinde vero ſi aequalis inclinatio cum pari periculo fuerit coniuncta, maior navis quoque maiorem impetum cum eodem periculo ſufferre poterit; nam ſi impetus ſive venti ſive aquae fuerint in ratione ſimplici laterum homologorum nauium, tum demum naues maiores ac minores aequalem inclinationem patientur; ac proinde aequali periculo erunt obnoxiae.

§. 414. Perſpicuum igitur eſt maximas naues prae minoribus ſummis et grauiffimis emolumentis eſſe praeditas, ſi quidem inclinatio, de qua hic nobis ſola ſermo eſt, ſpectetur, a qua nauis incolumitas potiffimum pendet. Praeterea autem facile intelligitur, a motu et impetu vndarum, quibus naues non ſolum ſuccutiuntur, ſed etiam ex ſitu erecto deturbantur, naues, quo ſint maiores, eo minus affici debere, id quod praeter rationem experientia abunde teſtatur. Laborant vero etiam naues maiores prae minoribus non contemnendis incommodis; primo enim non tam facile ſe dirigi ac gubernari patiuntur, qua de re infra fuſius videbimus; deinde vero ſi in mari occulti ſcopuli ac ſyrtes reperiantur, naues maiores facile nauſra-

nafragium patiantur, dum minores tuto transire possunt: verum huiusmodi casus alieni in theoriam non incurrunt.

§. 415. Quodsi autem maxima violentia, in quam naues vnquam incidere possunt, fuerit definita, atque summa inclinatio, quam naus sine damno pati potest, determinata, similitudo nauium ita poterit alterari, vt naues maiores multo insigniora commoda consequantur. Scilicet, si naus minor, cuius latus homologum sit $= c$, incolomis perseverare queat, in naui maiori maior velorum copia, quam similitudo requirit, sine periculo adhiberi poterit. Scilicet si maioris naus latus homologum sit C ; superficies omnium velorum in naui maiori ita constitui potest, vt se habeat ad superficiem velorum in minore vt C^2 ad c^2 , quo impetrabitur, vt naus maior celerius propellatur quam minor, paremque tamen inclinationem subeat.

§. 416. Quanquam autem haec, quae ad velorum constitutionem spectant, infra data opera sumus evoluturi, tamen, quantum ad praesens institutum nauium scilicet inclinationem attinet, hic paucis tetigisse iuuabit. Vidimus autem, naues, quo sint maiores, maiorem velorum copiam admittere, quam ratio duplicata laterum homologorum requirit; si naues ceterum inter se ita sint similes, vt earum stabilitates teneant rationem quadruplicatam laterum homologorum; atque vt aequales inclinationes eueniant, momenta ex vi venti ad nauem inclinandam oriunda tenere debere rationem pariter quadruplicatam laterum homologorum. Quodsi ergo latitudo velorum ponatur $= L$ et altitudo $= A$, erit vis venti absoluta vt AL eiusque momentum ad nauem inclinandam vt $A^2 L$, vel neglectis cum velorum conuergentia sursum, tum altitudine supra

centrum grauitatis, vel vbique fimilibus pofitis. Hincque debet effe $A^2 L$ vt C^4 , quo inclinationes prodeant aequales.

§. 417. Si iam in nauibus ceterum fimilibus latitudo velorum L ponatur lateribus homologis proportionalis, altitudo velorum A debet effe vt $C \sqrt{C}$, hoc eft altitudines velorum vel malorum tenebunt rationem fefquipli-
catam laterum homologorum: ita vt in naui quadruplo maiori feu 64 vicibus grauiori, fumta latitudine velorum quadrupla, altitudo malorum capi debeat octies maior. Sumtis vero velorum altitudinibus in ratione laterum homologorum, latitudines accipi poterunt in ratione duplicata laterum homologorum. Atque generaliter fi latitudo capiatur vt C^n et altitudo A vt C^m , debet effe $2m - n = 4$; vnde fiet vis venti abfoluta nauem propellens vt C^{4-m} , quia eft vt velorum superficies AL .

§. 418. Quodfi autem non expediat in nauibus maioribus quantitatem virium tantum augere, quantum stabilitas permittit, tum tuto in iftiusmodi nauibus maioribus stabilitas diminui poterit. Si enim tam altitudo quam latitudo velorum teneat rationem simplicem laterum homologorum, feu fubtriplicatam ponderum in nauibus diuerfae magnitudinis, ex quo vires impellentes a vento oriundae rationem laterum homologorum duplicatam, momenta vero ad nauem inclinandam tendentia rationem triplicatam habebunt. Tum igitur fufficiet naues ita adornaffe, vt stabilitates inter fe feruent rationem triplicatam laterum homologorum: quae, fi perfecta conftitueretur fimilitudo, forent biquadratis laterum homologorum proportionales. Huicque hypothefi accommodauimus ea, quae fupra in Cap. de Stabilitate §. 251. et feqq. funt tradita.

§. 419. Quanquam autem stabilitas tam essentialis ac necessaria nauium est proprietas, vt expedire videatur, eam, quantum fieri queat, augere, tamen lucrum ex eius nimia multiplicatione oriundum parui est momenti, ita vt merito aequiescere queamus, si stabilitas tanta fuerit, vt nauis nunquam vltra datos limites inclinari queat. Si quidem stabilitatis multiplicatio, quae praeter necessitatem instituat, nullis incommodis alius naturae esset permixta, tum vtique foret consultum stabilitatem efficere quam maximam; sin autem incommoda hinc oriunda saltem alicuius fuerint momenti, minime conueniret ea negligere. Quae cum ita sint in nauibus maioribus saepe numero conueniet, stabilitatem ex similitudine oriundam aliquantum diminuere, vt alia commoda non parui momenti, quibus alias stabilitas obfarcire solet, inde obtineantur, atque ad maiorem perfectionis gradum euehantur.

§. 420. Praecipuum igitur momentum, ex quo stabilitatem cuiusque nauis determinari conueniat, petendum est ex viribus, ad quas sustinendas nauis vel de industria accommodata esse debet, vel quibus casu nauis saepe exponitur; vbi maxime prospiciendum est, ne istiusmodi vires contingentes damnum afferant. Atque ex hac consideratione determinabitur quantitas stabilitatis, vt nauis valeat istiusmodi viribus satis resistere, ne ab iis detrimentum patiatur. Quo facto sufficiet naui tantam vel saltem non multo maiorem stabilitatem inducere, et reliqua capita, quibus nauis determinatur, tamdiu indeterminata relinquere, quoad reliquae proprietates omnes, quibus nauem praeditam esse oportet, fuerint sedulo perpenfcae; quo etiam his facilius per nauis constructionem satisfieri queat. Hactenus

quidem eiusmodi proprietates nondum sumus contemplati quae stabilitatis determinationem suadeant, sed infra tales proprietates abunde occurrent.

§. 421. In genere haec valent ad stabilitatem navium cum ratione axis longitudinalis tum latitudinalis ex viribus, quibus naues actu exponuntur, determinandam; quo in negotio hoc tantum est cauendum, ne ab his viribus inclinatio navibus damnosa afferatur; id quod stabilitate iustae magnitudinis navibus inducenda obtinebitur. Infra vero, ubi vires, quibus naues vrgeri solent, curatius examinabimus, in earumque veram magnitudinem inquiremus, pro quovis casu ipsam stabilitatem ad navium incolumitatem requisitam accurate definire licebit. Quamobrem hoc loco istam doctrinam eatenus tantum exposuisse sufficiat, ut post modum, quando vera virium sollicitantium quantitas definietur, statim inclinatio ab iis oriunda assignari queat, ex quo deinceps praecepta ad navium conservationem necessaria deducantur.

§. 422. Hic vero adhuc obiter notari conveniet vires, quibus naues circa axem latitudinalem inclinantur, multo maiores esse iis, quae naues circa axem longitudinalem inclinare conantur. Cum enim praecipuus navium scopus in cursu sit positus, qui maximam partem secundum directionem axis longitudinalis institui solet, vires etiam tam propellentes, quam quae naui reluctantur, secundum eandem fere directionem sollicitabunt; ex quo eae maxime valebunt ad naues circa axem latitudinalem inclinandas, parum vero circa axem longitudinalem; nisi forte in cursu navium, quae a vento propelluntur obliquo, cursus aduersus plagam venti instituitur; ubi virium

mo-

momentum respectu axis longitudinalis satis fit magnum. Hinc igitur sequitur regula maximi momenti, quae postulat, vt in omnibus nauibus stabilitas respectu axis longitudinalis multo reddatur maior, quam respectu axis longitudinalis.

§. 423. Quodsi autem AEBF denotet sectionem aquae, AB eius axem longitudinalem, EF axem latitudinalem, et CD profunditatem carinae; porro vero centrum magnitudinis carinae positum sit in O, et totius navis centrum grauitatis in G: in capite de stabilitate vidimus, si nauis totius pondus ponatur = M, fore stabilitatem respectu axis longitudinalis proxime = $M \left(\frac{EF^2}{10 CD} - OG \right)$, stabilitatem vero respectu axis latitudinalis = $M \left(\frac{AB^2}{10 CD} - OG \right)$. Hanc ob rem ista quantitas $\frac{AB^2}{10 CD} - OG$ multo maior esse debet, quam illa $\frac{EF^2}{10 CD} - OG$; vnde sequitur in omnibus nauibus esse debere $AB \gg EF$. Quo circa patet ratio praecipua huius regulae constantissimae, qua in omnibus nauibus longitudo AB multum superare debet latitudinem EF.

Tab. IX.
fig. 5.

§. 424. Commemorata generatim nauium inclinatione, quae a vi venti oriri potest, sequeretur, vt etiam inclinationem nauium a vi remorum oriundam, quae est altera vis praecipua, qua naues propelli solent, contemplaremur, sed quia ob directionem harum virium fere horizontalem, et parum a plano horizontali per centrum grauitatis nauis ducto distantem, momentum harum virium fit satis exiguum, nulla inde inclinatio proficisci potest, quae nauis detrimentum afferat; idque eo magis cum istas vires pro lubitu moderari liceat. In huiusmodi igitur nauibus, quae remis tantum propelluntur, stabilitas ex aliis viribus, in quas naues fortuna incidunt, debet definiri,

quarum utique in omnibus nauibus ratio maxime est habenda, cum eae non a nostro arbitrato pendeant, et plerumque de improviso tam vehementer irruunt, ut naues in maximum pereundi periculum incidant. Qui casus, quo minus euitari possunt, eo magis est laborandum, ut naues tantam violentiam sustinere queant.

§. 425. Post ventum vires, quibus naues maxime agitantur, in aqua sunt positae, quae ad duo genera commode reuocantur. Primo scilicet etsi mare est tranquillum, tamen, si nauis celeriter vehitur, magnam ab aquae resistentia vim suffert, cuius effectus quidem potissimum in motus retardatione constat, verumtamen etiam pro figura nauis momentum ad inclinationem producit. Alter effectus multo vehementior cernitur, si aqua vndis vehementer turbatur; tum enim non solum naues ab allisione vndarum vim patiuntur inclinationem efficientem, verum etiam ob superficiem aquae non amplius horizontalem situs aequilibrum nauium maxime perturbatur, ex quo ingentes inclinationes et alterationes in portione, quae aquae est submersa, oriri possunt.

§. 426. Quod ad vires prioris generis attinet, eae sunt eo fortiores, quo celerius nauis in aqua progreditur, et propemodum sequuntur rationem celeritatum duplicatam. Fit autem iste impetus potissimum aduersus proram, si quidem nauis cursu directo progrediatur; in cursu obliquo autem non multum a prora distabit. Effectus autem in nauis inclinationem generans imprimis ab obliquitate prae AC pendet; quae si esset nulla, proraque verticaliter spinae CD insisteret, momentum resistentiae ad inclinationem producendam perquam esset paruum, dum
tan-

Tab. XIII.
fig 3.

tantum penderet a distantia mediae directionis resistentiae a plano horizontali per centrum grauitatis nauis directo. Atque hoc casu resistentia proram deprimeret, si media directio infra centrum grauitatis caderet, contra autem eleuaret.

§ 427. Maioris autem momenti fiet ista resistentiae vis inclinationem importans, si prora AC oblique descendat, tum enim media directio resistentiae aquae RS sursum dirigetur eo magis, quo linea AC plus a situ verticali recesserit. Hinc itaque momentum inclinans eo maius existet, quo longior fuerit nauis, eo quod a distantia horizontali puncti R a recta verticali per centrum grauitatis ducta pendet. Tali igitur vi RS prora nauis eleuabitur, eoque inclinatio circa axem longitudinalem puppim versus generabitur. Effectus iste etiam ad nauis vtilitatem traduci solet, cum eo inclinatio prorae versus, quae a viribus nauem propellentibus oritur, diminuatur, nauisque magis in situ erecto detineatur: quin etiam tali prorae obliquitate resistentia admodum diminuitur, quod est commodum non leuis momenti; siquidem aliae rationes non aduersentur.

§. 428. Tametsi vero istiusmodi prorae obliquitas duplicem vtilitatem affert, decrementum scilicet resistentiae et destructionem inclinationis a viribus propellentibus oriundae, tamen eam ultra certos limites augere non expedit, modumque in ea obseruari oportet. In nauibus enim, quae vento propelluntur, in quibus effectus ab hac prorae decliuitate oriundus maximi vñs esse videatur, ob alias grauiiores rationes ista decliuitas, quantum fieri potest, debet euitari; namque per eam centrum resistentiae nimis
a cen-

224. DE INCL. QVAM NAVES A VIRIB. QVIB. PAT.

a centro grauitatis anteriora versus remouetur, quo fit, vt gubernaculi vsus fiat admodum difficilis; quo de argumento autem infra fusius agetur. In nauibus autem, quae solis remis cientur, quia vis proram versus inclinans non est sensibilis, etiam destructione tantopere non indiget; propter resistentiae vero diminutionem istae naues maiorem obliquitatem admittunt, quia nunquam cursu obliquo vi coguntur.

§. 429. Vt autem pro instituto huius capituli solum inclinationem ab hac resistentiae vi oriundam contemplemur, ante omnia videmus, eius momentum ad nauem inclinandam eo fieri maius, quo magis obliqua constituitur prora. Ponamus enim proram tam oblique esse formatam, vt speciem rostri Ca referat, etiamsi ipsa resistentia sit minor, tamen momentum ad nauem inclinandam augebitur ob duplicem rationem, primo scilicet, quia media directio rs propius ad situm verticalem accedit ac deinde, quia ipsa media directio rs magis a medio navis versus rostrum a remouetur. Hinc igitur non solum inclinatio crescet, sed etiam in ipso rostro a ob magnam a centro grauitatis distantiam magis fiet sensibilis, ex quo perquam magna portio rostri aquae modo immergetur, modo eminebit.

§. 430. Incommodum hoc, etiamsi in se spectatum leue videatur, tamen, quia rostrum a admodum alte supra aquam exstrui atque confirmari deberet, ne vnquam aquae submergeretur, in reliquis scopis, quos in structura nauium attendere oportet, magnum impedimentum inferret. Ad haec vero accedit impetus vndarum, quae pariter in obstacula normaliter agentes tale rostrum vehementius sursum

furfum pellerent, atque oscillationes circa axem latitudinalem nimis violentas producerent; unde navis hoc modo instructa proram haberet nimis mobilem, resistentiamque propterea valde inaequabilem pateretur, vt hinc motus perturbatus et incertus oriri deberet. Has ob rationes nunc quidem praelonga illa rostra, quibus veteres naues suas exornarunt, maximam partem sunt abolita, cum experientia incommoda eorum satis clare monstrauisset.

§. 431. Similiter ratio est comparata, quando vndae ad latera nauis impingunt, tum enim ex directione impetus intelligitur, quantum nauis debeat inclinari. Ac primo quidem si latera essent verticalia, tum media directio vis vndarum foret horizontalis, atque aliquantum infra aquae superficiem caderet, quod si iam centrum grauitatis in eadem altitudine esset positum, tum momentum ad nauem inclinandam foret nullum, at quia centrum grauitatis nauis plerumque altius collocatur, inclinatio orietur eiusmodi, vt superior nauis pars versus vndas inclinetur. Sin autem latera nauis in sectione aquae vehementer fursum diuergant, tum directio vis ab allisione vndarum ortae magis fursum verget, nauemque in contrariam partem inclinabit.

§. 432. Inter binos igitur hos casus contrarios dabitur media laterum nauium constitutio, in quae si vndae impingant, nulla sensibilis inclinatio oriatur. Pendebit scilicet haec constitutio a loco centri grauitatis nauis; si enim latera ita fuerint disposita, vt media directio impetus vndarum per centrum grauitatis transeat, tum nulla omnino inclinatio eueniet. Quare si centrum grauitatis nauis altius sit positum, quam superficies aquae, tum expediet

si latera sursum aliquantum diuergant, vt media directio impetus vndarum pariter aliquantum sursum tendat, hancque diuergentiam conueniet esse eo maiorem, quo altius centrum grauitatis fuerit situm. Quoniam vero etiam accidit, vt vndae in superiorem partem laterum impingant, ideo diuergentia memorata iterum diminui debet.

§ 433. Quae cum ita se habeant, manifestum est, notabilem laterum diuergentiam sursum in regione superficiei aquae tolerari omnino non posse. Nimum enim directio impetus vndarum inclinaretur ad horizontem, indeque momentum ad nauem inclinandam fieret maius. Et quoniam ista vis latera vrgens tendit ad nauem circa axem longitudinalem inclinandam, cuius respectu stabilitas est minima, maxime erit cauendum, ne momenta ad nauem circa hunc axem inclinandam oriri queant notabilis magnitudinis, quia alias, si aliae vires inclinationem in eandem plagam accederent, stabilitas iis coniunctim resistere non valeret. Supra aquam ergo minime conuenit latera nauium diuergentia constituere, quae regula in praxi quoque diligenter obseruari solet, nisi aliae rationes graui-
ores absolute contrarium postulant.

§. 434. Ponamus igitur latera nauis supra aquae superficiem neque conuergere neque diuergere, hoc est in situ erecto perpendiculariter horizonti insistere. Vndae igitur in haec latera impingentes vim exerent in directione horizontali, et nisi centrum grauitatis nauis admodum profunde sit positum, vix sensibile producent momentum ad inclinationem. Quodsi autem nauis multum supra aquam emineat, centrumque grauitatis admodum sit humile, tum vndae in latera istiusmodi verticalia impingentes multum
valerent

valerent ad nauem inclinandam. His igitur casibus iuuabit latera nauis sursum aliquantum conuergentia reddere, quo fiet, vt media directio impetus vndarum aliquantum deorsum magisque versus centrum grauitatis dirigatur.

§. 435. Omnino autem impetus vndarum ad latera nauis impingentium nullam inclinationem circa axem longitudinalem producent, si latera superiora versus ita incuruentur, vt centrum curuaminis incidat in axem longitudinalem per centrum grauitatis ductum. Scilicet si ME Tab. XIII. fig. 4. DFN repraesentet sectionem transversalem ad axem longitudinalem verticalem, in qua G sit intersectio axis longitudinalis, EF sectio aquae atque latera EmM et FnN formentur in arcus circulares, centrum in G habentes, quae curuatura aliquantulum etiam infra aquae superficiem porrigatur; manifestum est, ab allisione vndarum ad latera EM et FN mediam impulsus directionem per centrum G esse transituram; hincque momentum, quod nauem inclinare conatur, profus euanescere, ita vt nauis ab vndis nullam inclinationem sentire queat.

§. 436. Hoc igitur pacto efficietur, vt ab allisione vndarum ad latera nauium nulla inclinatio circa axem longitudinalem oriatur. Quod vero ad inclinationem circa axem latitudinalem attinet, ea quidem erit quoque nulla, si vndae in medio nauis, vbi existit centrum grauitatis, in latera impingant; at si impulsus fiat prope proram seu puppim, momentum aliquod ad nauem circa axem latitudinalem inclinandam, si quidem naues per totam longitudinem eandem seruarent latitudinem, oritur. Verum cum naues versus proram ac puppim incuruentur, directio istiusmodi impulsuum propius versus centrum grauitatis di-

rigitur, quam ob causam inclinatio diminuetur. Suadet vero hanc nauium versus proram ac puppim incuruatio etiam cum diminutio resistentiae tum potissimum actio gubernaculi, quae ab impulsu vndarum in laterum extremitates nimium difficilis redderetur.

Tab. XIII.
fig. 2.

§. 437. Videamus nunc etiam, quid perturbatio in superficie aquae horizontali ab vndis orta in statu nauium efficere valeat. Sit igitur ADB sectio quaedam nauis, AB linea horizontalis in superficie aquae, dum est tranquilla, ducta, ac ponamus subito ob vndarum motum, lineam rectam ab factam esse aquae superficiem, quae cum horizontali AB faciat angulum ACa vel $BCb = w$. In hoc ergo statu portio laterum Aa immergitur, quae in statu naturali extra aquam eminebat, ex altera autem parte portio Bb ex aqua quasi educitur; ponamus autem volumen aDb aequale esse volumini ADB calculi faciliandi gratia, si enim volumen nunc sub aqua versans maius esset vel minus quam ADB , tota nauis vi propria vel emergeret vel magis immergeretur.

§. 438. In hoc igitur statu nauis erit quasi in situ inclinato, cum alia portio, ac in statu naturali aquae sit immersa. Perspicuum autem est, nauem in hoc statu, etiam si obliquitas superficie ab maneret, perseverare non posse; quare videamus an nauis de hoc situ sese in alium peiorem magisque damnosum recipere debeat, an in magis conuenientem. Desunt quidem verae leges, quas aqua in statu violento posita, ubi eius superficies non est horizontalis, in pressione obseruat; interim tamen non multum a veritate aberrabimus, si ponamus easdem esse leges, quae in aqua tranquilla, atque sic pressio aquae in
volu-

volumen naus submersum huic ipsi volumini erit proportionalis, eiusque media directio transibit per centrum magnitudinis voluminis submersi aDb , eritque ad superficiem aquae ab normalis; quam hyppothesin tuto assumere licet, si quidem angulus ACa quam minimus ponatur.

§. 439. Sit iam O centrum magnitudinis voluminis ADB et G centrum grauitatis naus, cuius pondus sit $= M$, volumen autem aquae submersum $= V$. Iam vim restituentem quaerendo vt supra, erit vis ex pressionibus aquae in volumen ADB agentibus orta $= M$, eiusque momentum ad nauem conuertendam secundum sensum BDA erit $= M \cdot GO \cdot w$ tendetque haec vis ad portionem Aa ex aqua extrahendam, eaque fiet, vt debitum volumen sub aqua restet. Ex portione vero ACa oritur vis quae erit ad M vt volumen ACa ad V , ita vt sit $= \frac{M \cdot AC^2 \cdot w}{2V}$; similique modo vis ex portione BCb orta erit $= \frac{M \cdot BC^2 \cdot w}{2V}$; at ob spatia ACa et BCb aequalia erit $BC = AC = \frac{1}{2} AB$.

§. 440. Vis autem prioris ex spatio ACa orta directio erit Pp normalis ad ab , ita vt sit $CP = \frac{2}{3} AC$, quae in longitudinem vectis $Pg = \frac{2}{3} AC - CG$. w ducta dabit momentum nauem in eandem plagam BDA inclinare annitens, quod adeo erit $= \frac{M \cdot AC^2 \cdot w}{2V} (\frac{2}{3} AC - CG \cdot w)$ Simili modo vis ex spatio BCb orta tenderet in plagam contrariam, at quia spatium $B'b$ subtrahi debet vt obtineatur spatium aDb , eius vis fiet conspirans cum binis praecedentibus. Erit igitur haec vis $Qq = \frac{M \cdot AC^2 \cdot w}{2V}$, et est $CQ = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3} AC$. Haec vis ducatur in longitudinem vectis $Qg = \frac{2}{3} AC - CG$. w , prodibitque momentum $= \frac{M \cdot AC^2 \cdot w}{2V} (\frac{2}{3} AC - CG \cdot w)$. Ex his igitur

nascitur totale momentum, quo navis vrgebitur in situm naturalem, cuius pars aquae submersa est ACB , $= M w$ ($\frac{2AC^3}{3V} + GO$).

§. 441. Perfpicitur ergo hoc momentum, quo navis per propriam vim conabitur partem Aa submersam ex aqua extrahere, perfecte conuenire cum expressione stabilitatis supra inuenta. Ex ratiocinio enim adhibito intelligitur, si loco triangulorum ACa et BCb vera spatia effemus contemplati, tum similiter loco $\frac{2}{3} AC^3$ momentum sectionis aquae proditutum fuisse, quod in expressionem stabilitatis ingreditur. Quamobrem nunc clare intelligimus nauem eiusmodi sitibus obliquis in aqua vndis turbata per ipsam stabilitatem resistere: atque si nauibus sufficiens stabilitas sit conciliata, tum etiam eo ipso potestatem esse habituras eiusmodi aquae viribus ex superficie non horizontali ortis resistendi; ita vt ad pericula, quae hinc oriri queant, evitanda nouis cautelis non sit opus.

§. 442. Sic itaque satis dilucide exposuimus, si indoles nauis perfecte fuerit cognita, hoc est eius stabilitas, situs centri grauitatis, sectio aquae, et volumen aquae submersum, quomodo inclinatio nauis, quae a viribus quibuscunque oritur, definiri debeat. Verum ex hac ipsa doctrina etiam insignem vtilitatem haurire possumus, ad ipsam nauium indolem inuestigandam, si ea nondum satis fuerit perspecta. Quemadmodum enim ex statu nauis cognito et viribus sollicitantibus cognitis inclinatio nauis potest definiri, ita vicissim, si inclinatio fuerit explorata, quae a datis viribus nauem sollicitantibus generatur, inde poterit natura nauis cognosci, atque si data sufficiant, ex iis tam locus centri grauitatis, quam stabilitas nauis eiusque

que reliquae proprietates colligi poterunt, quarum rerum cognitio, quae alioquin non tam accurate haberi potest, maxime necessaria est ad euentus omnes determinandos ac prouidendos.

§. 443. Primum autem ex inclinatione, quae a vi quacunque, nauem horizontaliter sollicitante, circa axem longitudinalem producitur, statim centrum grauitatis sectionis aquae cognoscitur. Quodsi enim naui vis applicetur eam vel versus proram vel puppim inclinans, eiusque vis directio fuerit horizontalis, qua fit vt neque maius neque minus volumen aquae immergatur, tum sectio aquae, quam in statu inclinato habebit, interfecabit sectionem aquae, quam in statu libero occupat in ipso sectionis aquae centro grauitatis. Scilicet si AEBF fuerit sectio aquae in statu natu-^{Tab. XII.} Tab. XII. ^{fig. 4.} fig. 4. rali, et, postquam nauis a vi horizontali quacunque circa axem longitudinalem fuerit aliquantillum inclinata, notetur intersectio nouae sectionis aquae cum priore, quae fiat in recta EF, tum haec recta EF transibit per centrum grauitatis I sectionis aquae, cuius positio adeo per vnicum experimentum inuenitur.

§. 444. Ex vnica porro inclinatione diligenter observata locus centri grauitatis satis exacte definiri poterit. Quod vt appareat, ponamus nauem in prora A sursum ^{Tab. IV.} Tab. IV. ^{fig. I.} fig. I. trahi a pondere P ope funis AmnP circa trochleas m et n extra nauem fixas ducti, in puppi vero B deprimi a pondere Q in ipsa naui k suspenso, pondera autem P et Q inter se esse aequalia. Primum ergo manifestum, quia horum ponderum alterum sursum trahit alterum deorsum, nauis vim grauitatis non mutari, quare post inclinationem tantum volumen aquae erit submersum, quantum
in

in statu navis libero. Deinde vero, quia vtriusque vis directio est verticalis, navis ad motum horizontalem omnino non incitabitur. Quocirca, dum navis ab his duobus ponderibus circa axem longitudinalem inclinabitur, eius centrum gravitatis G prorsus immotum manebit.

§. 445. Quo autem ipsa inclinatio curatius observari, atque centri gravitatis locus G determinari queat, conveniet navem secundum longitudinem prope parietem fixum in porta vbi aqua est tranquilla constitui; latusque navis parietem versus instrui aliquot stylis ad parietem vsque pertingentibus, qui in pariete motum, quem in inclinatione acquirant, designent. Sint huiusmodi styli duo in prora A et in puppi B infixi; qui dum navis inclinatur in pariete binos arcus circulares Aa et Bb depingent, commune habentes centrum in loco, vbi axis longitudinalis per centrum gravitatis navis G transiens parieti occurrat. Datis autem his duobus arcibus Aa et Bb , si super medietatibus chordarum normales aG et bG ducantur, earum intersectio G in pariete monstrabit vestigium axis longitudinalis, vnde in navis cum ipse axis longitudinalis centrum gravitatis G innotescet.

§. 446. Facilius autem verus centri gravitatis locus inveniatur, si ante positio axis verticalis per centrum gravitatis ducti inuestigetur, id quod sequenti modo satis commode fieri poterit. Sit $AEBF$ sectio navis horizontalis quaecunque per quam transeat axis verticalis in G , quod punctum inuestigari oporteat. Applicentur navis in A et B duae vires horizontales AP et BQ aequales et in plagas oppositas trahentes; hisque adeo neque navis motus progressivus neque vlla inclinatio inducetur. His
autem

autem duabus viribus navis conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis G ductum. Quodsi iam conuersio admodum parua fuerit secuta, notentur puncta a et b , in quae prora A et puppis B sint promotae; atque interseccio rectae ab cum AB dabit positionem axis verticalis in G , eiusque in plano verticali diametrali AB distantiam tam a prora quam a puppi.

§. 447. Cum autem hoc modo axis verticalis per centrum grauitatis ductus fuerit recte determinatus, modo ante tradito multo facilius ac tutius ipse centri grauitatis situs in hoc axe verticali determinari potest. Hinc enim iam cognitus erit situs rectae gD verticaliter per centrum grauitatis G ductae; ex quo si vnicus arcus Aa fuerit notatus ex sola inclinatione eius ad rectam AB statim definietur positio centri grauitatis G in recta gD . Atque si difficile fuerit inclinationem aliquam circa axem latitudinalem, ob ingentem stabilitatum, generare, poterit simili modo navis circa axem longitudinalem inclinari, quod facilius effici potest, indeque situs centri grauitatis G in axe verticali gD assignari.

§. 448. Si autem cognitus fuerit locus centri grauitatis navis G , ope experimentorum, quibus inclinatio a datis viribus orta inquiritur, stabilitas navis propositae tam respectu axis latitudinalis quam longitudinalis poterit explorari eiusque vera quantitas assignari. Sit ADB sectio navis verticalis siue secundum longitudinem navis facta siue secundum latitudinem, quae transeat per axem verticalem CD in quo situm est centrum grauitatis navis G . Scilicet ad stabilitatem ratione axis latitudinalis explorandam debet sectio navis ADB secundum longitu-

dinem accipi, at pro stabilitate ratione axis longitudinalis sectio Δ DB erit verticalis transuersalis per centrum gravitatis G ducta, vtrumque enim casum coniunctim pertractabimus, quia tam experimentorum quam conclusionis inde faciendae ratio est eadem.

§. 449. In tali ergo navis sectione ADB quam descripsimus constituatur malus MN sufficientis longitudinis, eique in puncto quodam N ope funis Nn P circa trochleam n extra navim firmatum appendatur pondus P, quo ergo malus MN in directione Nn quae sit horizontalis trahetur vi \equiv P. Contra vero in puppi B navis a pondere Q aequali ipsi P trahatur etiam in directione horizontali Bm; quibus duabus aequalibus viribus fiet, vt centrum gravitatis navis G quiescat, atque simplex inclinatio versus A producat, siquidem momentum ponderis P praeualeat momento ponderis Q; haecque inclinatio fiet vel circa axem latitudinalem vel longitudinalem prout sectio ADB fuerit facta vel secundum longitudinem vel latitudinem navis. Perspicuum autem est, si malus MN in ipso axi verticali CD constituatur, tum eundem inferuire posse ad experimenta vtriusque generis instituenda.

§. 450. Ponamus iam longitudinem mali MN \equiv f, eousque scilicet sumtam, vbi ipsi vi P applicatur, atque interuallum CG, quo centrum grauitatis G infra horizontalem AB est positum, esse \equiv b. His positis momentum vis P ad nauem versus A inclinandam erit \equiv P (f + b) et momentum vis Q reluctans huic inclinationi \equiv Q b. Cum igitur sit Q \equiv P, erit momentum, quo nauis actu versus A inclinabitur \equiv P f. Sit iam w angulus inclinationis hinc oriundae seu eius sinus, si quidem inclinatio
poni-

ponitur quam minima, atque stabilitas navis huic inclinationi resistens sit $= F$, crit $\frac{Pf}{F} = w$, hincque $F = \frac{Pf}{w}$, unde vera stabilitatis quantitas cognoscitur.

§. 451. Huiusmodi experimenta ad stabilitatem navium respectu utriusque axis principalis cognoscendam institui possunt, vel in ipsa naui, si apparatus et occasio idonea habeatur, vel in exemplo minoris moduli ad similitudinem propositae navis perfecte tam fabricato, quam onerato. Quodsi autem stabilitas huiusmodi minoris naviculae fuerit explorata, ex eo facile stabilitas maioris navis ex similitudine concludi poterit. Cum enim stabilitates navium similibus respectu axium analogorum teneant rationem quadruplicatam laterum homologorum, haec illatio per regulam auream perfici poterit. Atque hoc modo iudicium ferri poterit, utrum navis proposita viribus, quibus exponi debet, sustinendis par sit an secus.

§. 452. Haecenus inclinationes tam exiguas tantum sumus contemplati, quae in calculo instar reuera infinite parvarum tractari queant, atque de huiusmodi inclinationibus regula data tantum valet, qua inuenimus momentum inclinationis per stabilitatem navis diuisum praebere angulum inclinationis. Assumimus enim in inclinatione navis sectionem aquae ratione magnitudinis sensibilibus non mutari, quod evenit cum in omnibus inclinationibus infinite parvis, tum etiam in maioribus, quando latera navis superficiei aquae perpendiculariter insistant. Haecque laterum positio propemodum maximam partem eligi solet, atque etiam debet, prouti ante ostendimus curvaturae laterum centrum incidere debere in centrum gravitatis navis seu potius in axem longitudinalem.

§. 453. Quanquam autem in tali nauium statu inclinationes iam satis sensibiles pro infinite paruis haberi possunt, tamen non abs re erit monstrare, quomodo inclinationes finitae magnitudinis, qua tales spectatae, tractari debeant. Hinc enim eo magis elucebit, quibus casibus inclinationes finitae tanquam infinite paruae considerari queant sine errore, et si error committatur, quantus is sit futurus. Fieri namque poterit, ut inclinatio a datis viribus producta, si exacte inuestigetur, vel maior vel minor sit proditura, quam regula haecenus usurpata ostendit, atque hinc tutius iudicare licebit, quando naues subuersioni fiant obnoxiae, cum omnimoda subuersione semper cum inclinationibus satis magnis debeat esse coniuncta.

§. 454. In hac igitur disquisitione positio laterum nauis prope sectionem aquae maxime considerari debet, cum ab ea sectio aquae, quam nauis inclinata occupat, pendeat, haecque adeo insuper in determinationem inclinationis a datis viribus oriundae ingredietur, atque cum stabilitate coniunctim inclinationem veram indicabit. Quod si autem inclinatio fuerit quam minima, ratio huius positionis laterum nauis in inclinatione afficienda euanescet. Quamobrem, si quantum laterum nauis constitutio inclinationem secundum praecedentem methodum inueniendam perturbet, fuerit compertum, tum etiam maxime conuenientem laterum nauis constitutionem definire licebit, de qua adhuc nihil, nisi ex allisione vndarum quicquam definiri potuit.

§. 455. Quo autem hanc inuestigationem facilius expedire queamus; vnicam nauis sectionem verticalem, quae normaliter ad eum axem, circa quem fit inclinatio, sit facta, contemplabimur; atque inclinationem, quae huic
tan-

tantum sectioni inducetur, determinabimus, prouti supra in stabilitatis determinatione initio fecimus. Hoc tamen non obstante ista inuestigatio latissime patere censenda erit: primo enim eo referri poterunt omnia corpora prismatica, quae scilicet omnes sectiones parallelas ei, quam hic consideramus habeant eidem similes et aequales. Deinceps vero etiam, si perpendamus, quomodo expressio stabilitatis ex totius corporis consideratione orta comparata sit ad eam ex vnica sectione verticali inuenitur; non difficulter hanc ipsam determinationem transferre poterimus ad figuras nauium quascunque.

§. 456. Sit igitur ADB eiusmodi sectio nauis verticalis normaliter facta ad axem circa quem nauis inclinari ponitur; in qua sit G centrum grauitatis. AB sectio aquae in statu erecto, et O centrum magnitudinis partis submersae. Latera porro nauis Aa et Bb ad sectionem aquae AB quomodocunque sint inclinata; ponamus autem obliquitatem laterum vtriusque esse aequalem, seu angulum CAa aequalem esse deinceps posito anguli CBb : neque vero lateribus in spatiis Aa et Bb vllam inesse curuaturam. Denique etiam assumimus, hanc sectionem ADB duas medietates ADC et BDC habere inter se similes et aequales, vti in sectionibus nauium transuersalibus, ad quas hanc inquisitionem potissimum accommodari conuenit, euenire solet.

§. 457. Sit iam a viribus quibuscunque huic sectioni inclinatio inducta, qua recta ab perducta sit in superficiem aquae, quae adeo nunc erit horizontalis, atque portio aDb nunc erit aquae submersa. Ponamus autem a viribus sollicitantibus inclinationem tantum produci, neque iis centrum grauitatis affici; ita vt post inclinationem

Tab. XV.
fig. 1.

volumen aquae submersum aequale fit illi, quod in statu naturali sub aqua versatur. Erit itaque triangulum AVa = triangulo BVb , ex qua aequalitate intersectio V novae aquae sectionis ab cum praecedente AB determinabitur. Hinc igitur sequitur ob angulos ad V aequales fore AV . $aV = BV \cdot bV$; atque ob sinus angulorum CAa et CBb aequales erit etiam $AV \cdot Aa = BV \cdot Bb$, hincque $Aa : aV = Bb : bV$.

§. 458. Ponatur $AC = BC = a$ seu $AB = 2a$, sinus anguli $CAa = m$, cosinus $= n$, erit anguli CBb sinus $= m$, cosinus $= -n$. Sit porro anguli inclinationis AVa seu BVb sinus $= s$, et cosinus $\sqrt{1-s^2} = u$; atque $CV = x$, erit $AV = a + x$, et $BV = a - x$. Ex his reperitur anguli AaV sinus $= mu + ns$; et anguli BbV sinus $= mu - ns$; hincque porro $Aa = \frac{s(a+x)}{mu+ns}$; $Bb = \frac{s(a-x)}{mu-ns}$; $Va = \frac{m(a+x)}{mu+ns}$ et $Vb = \frac{m(a-x)}{mu-ns}$. Quamobrem erit trianguli AVa area $= \frac{ms(a+x)^2}{2(mu+ns)}$, et area trianguli $BVb = \frac{ms(a-x)^2}{2(mu-ns)}$; quae binae areae, cum sint aequales, erit $(a+x)^2(mu-ns) = (a-x)^2(mu+ns)$ hincque $xx = \frac{2muax - nsaa}{ns}$ et $x = \frac{mua - a\sqrt{m^2u^2 - n^2s^2}}{ns}$ seu $x = \frac{mua - a\sqrt{(mm-ss)}}{ns}$

§. 459. Prodibit ergo $a+x = \frac{a(mu+ns) - a\sqrt{(mm-ss)}}{ns}$ et $a-x = \frac{-a(mu-ns) + a\sqrt{(mm-ss)}}{ns}$; atque $Aa = \frac{a}{n} - \frac{a}{n} \sqrt{\frac{mu-ns}{mu+ns}}$, et $Bb = -\frac{a}{n} + \frac{a}{n} \sqrt{\frac{mu+ns}{mu-ns}}$, areaque vnius trianguli vel AVa vel $BVb = \frac{mmuaa - maa\sqrt{(mm-ss)}}{nns}$; cui vis, qua vtrunque triangulum ab aqua vrgetur, est aequalis. Eius vero directio vtrinque normalis est ad horizontalem ab , atque per vtriusque trianguli centrum gravitatis P et Q transit. Bifectis ergo Aa et Bb in α et ξ , erit $VP = \frac{2}{3} V\alpha$, et $VQ = \frac{2}{3} V\xi$: atque ex P et Q in ab demissis perpen-

pendiculis Pp et Qq, erit $Vp = \frac{2}{3}Va + \frac{1}{3}(au - ns)Aa$
 et $Vq = \frac{2}{3}Vb - \frac{1}{3}(ma + nu)Bb$. seu $Vp = \frac{m(u+x)}{3(mu+ns)} +$
 $\frac{u(a+x)}{3}$ et $Vq = \frac{m(a-x)}{3(mu-ns)} + \frac{u(a-x)}{3}$.

§. 460. Cum nunc fit portio aquae submersa aDb, refoleatur ea in partes has ADB + BVb - AVa. Harum prima ADB, quae repraesentat volumen naturaliter submersum V, agit vi = M ponderi navis, eiusque momentum ad nauem restituendam est = M. og, demissis ex O et G in horizontalem ab perpendiculis Gg et Oo, fiet autem og = GO. s, ita vt momentum a prima parte ortum fit = M. GO. s. Partis BVb vis reperitur, si fiat vt V : M = BVb ($\frac{ms(a-x)^2}{2(mu-ns)}$) ad quartam, quae ergo est = $\frac{M \cdot ms(a-x)^2}{2V(mu-ns)} = \frac{Maa(mmu - m\sqrt{mm-ss})}{nns V}$ alteriusque partis AVa vis est = $\frac{M \cdot ms(a+x)}{2V(mu-ns)} = \frac{Maa(mmu - m\sqrt{mm-ss})}{nns V}$. Vtriusque autem coniunctim momentum ad restitutionem tendens erit = $\frac{2Maa(mmu - m\sqrt{mm-ss})}{3nns V} \frac{(2mmua - ssua - mnsx)}{m-m-ss}$, quod loco xposito valore inuento abit in $\frac{2M \cdot msa^3(u - m\sqrt{mm-ss})}{3nn V \cdot \sqrt{mm-ss}}$ ita vt momentum totale futurum fit = $M_s(GO + \frac{2ma^3(u - m\sqrt{mm-ss})}{3nnV \sqrt{mm-ss}})$.

§. 461. Si anguli ad A et B fuerint recti, fiet $m = 1$ et $n = 0$, atque momentum virium ad inclinationem praescriptam producendam fiet = $M_s(GO + \frac{a^3(1+uu)}{3uuV})$; atque si angulus inclinationis fiat infinite parvus, vt fit s infinite paruum et $u = 1$, prodit momentum huic inclinationi producendae par = $M_s(GO + \frac{2a^3}{3V})$ quae est expressio pro stabilitate supra inuenta. Haec si comparetur cum momento, si s ponitur finitum, patebit expressionem pro s finito maiorem esse quam pro s infinite paruo; et hanc obrem vis qua nauis inclinationibus resistit

resistit, in maiori ratione crescit, quam in ratione sinuum inclinationum; adeo vt naues inclinationibus magis reluctentur quam ex stabilitate haecenus conclusimus.

§. 462. Videamus iam vtrum obliquitas laterum navis maiorem stabilitatem producat an minorem, quam si latera verticaliter constituentur. Hancobrem ponamus angulos ad A et B quam minime a rectis discrepare, ita vt anguli VAA cosinus n sit vehementer paruus, fietque $m = V(1 - mn) = 1 - \frac{nn}{2} - \frac{n^4}{8}$, et $V(mn - ss) = V(mu - mn) = u - \frac{nn}{2u} - \frac{n^4}{8u^3}$. Quibus valoribus substitutis obtinebitur momentum ad inclinationem producendam requisitum $= Ms(GO + \frac{a^2(1+uu)}{3uuV} + \frac{nn^2ss(1+uu)}{4u^4V})$. Maius igitur est hoc momentum, quam si omnino esset $n = 0$, at incrementum, cum etiam s sit valde paruus, fiet insensibile. Quod si autem obliquitas laterum navis finita ponatur, tum momentum inclinationem producens perpetuo eo erit maius, quo maior fuerit cosinus angulorum ad A et B.

§. 463. Tametsi autem hinc videatur navibus eiusmodi laterum obliquitatem cum ingenti emolumento induci posse, tamen si rem penitus scrutemur, vtilitatem inde oriendam parui atque etiam nullius momenti deprehendemus. Primo enim cum interfectio V eo magis a puncto medio C remoueatur, quo magis anguli ad A et B a rectis discrepant, oscillationes, quas navis recipiet, eo maioribus succussionibus erunt coinunctae. Deinde vero convergentia laterum navis deorsum spectans stabilitatem navis ideo diminuit, quod cum volumen aquae submersum datae magnitudinis esse debeat, profunditas carinae eo maior sit proditura respectu latitudinis AB, quo ipso stabilitas multum diminuitur. Quod si autem quis velit latitudinem

itudinem navis superiora versus tantopere augere, eo ipso stabilitati parum confulit, dum naui eandem latitudinem maiorem in aquae superficie non tribuit; quo multo maius stabilitatis incrementum lucraretur, quam per laterum diuergentiam. Si enim latera navis in A et B verticaliter descendant, tum profunditas carinae, salua eius capacitate; maxime diminuitur, hocque stabilitas plurimum augetur. Minime autem expedit latera diuergentia deorūm conficere, quia tum latitudo navis in sectione aquae praeter necessitatem contraheretur, quam perpetuo praestat quam amplissimam fieri.

§. 464. Quodsi autem in veram causam inquiramus, cur maior vis requiratur ad eandem inclinationem nauis inducendam, quo maior fuerit laterum navis obliquitas ad horizontalem AB; reperiemus huius phaenomeni rationem in eo esse positam, quod dum navis inclinatur, sectio aquae *ab* continuo crescat, a cuius quantitate, vti supra vidimus potissimum stabilitas nauium seu vis inclinationi resistendi pendet. Ex quo concludere licet, quo magis sectiones aquae crescant auctis inclinationibus navis, tum conatum nauis sese restituendi non solum augeri, sed etiam in maiori ratione augeri quam inclinationes. Contra autem intelligitur, si sectiones aquae fiant minores, dum inclinatio crescit, tum navis reluctantiam in minori ratione augeri, atque etiam nulla amplius incrementa capere; quo fiet, vt nauis omnino subuertatur. Quam primum enim vis reluctans inclinationi cessat augeri, aucta inclinatione, tum vis, a qua haec inclinatio est orta, continuo nauem magis inclinabit, donec eam prorsus subuertat.

Tab XV
fig. 2.

§. 465. Ponamus $EADB$ esse navis sectionem verticalem, in qua sit AB sectio aquae et ADB portio aquae submersa, dum navis situm erectum tenet. Inclinetur iam haec navis a viribus externis, ut aCb fiat sectio aquae. In hoc iam statu ut navis detineatur non sufficit, si momentum virium inclinantium aequale sit conatui proprio navis sese restituendi, verum etiam requiritur, ut, si navis aliquantillum plus inclinetur, conatus sese restituendi crescat: si enim pro maiori inclinatione conatus sese restituendi seu inclinationi resistendi non cresceret, sed vel eadem maneret vel adeo decrederet, tum eadem vis, quae minorem inclinationem importavit, etiam maiorem navis induceret, tandemque navem subuerteret. Ad hoc ergo evitandum necesse est navis latera ita constituere, ut aucta inclinatione sectiones aquae non sensibilibiter diminuantur.

§. 466. Haec igitur cautela per totum illud navis spatium est observanda, in quod sectiones aquae, dum navis a viribus externis inclinationes inducuntur, cadunt, ut eae nimirum non multo minores evadant, quam sectio aquae naturalis AB . Inclinationes autem, quas quaeque navis sine subversionis periculo sustinere debet, usque ad supremum navis limbum EF pertingunt, eritque adeo inclinatio per angulum FCB , qua sectio aquae FH supremam navis oram F attingit, maxima, quam navis suscipere potest; si enim inclinatio ultra augeatur, tum aqua non solum in navem irrueret ac submergeret, verum etiam ob sectionem aquae subito minorem factam, navis, etiamsi aqua non irraret, subversioni resistere non valeret.

§. 467. Si ergo, antequam inclinatio navis totalem subversionem affert, latera navis ita collocentur, ut maio-

res

res inclinationes etiam maiores vires requirant ; tum angulus FCB determinabit maximam inclinationem, quam naus sine subuersionis periculo sustinere poterit. Pendet autem quantitas huius anguli FCB cum ab eleuatione supremae naus orae EF supra aquam AB , tum etiam a situ ipsius orae F respectu rectae AB ; quo enim propius ora F ad punctum medium summitatis I , manente eleuatione CI eadem, accedit, hoc est quo magis latera naus supra aquae superficiem conuergant, tum maxima inclinatio FCB , quae in nauem cadere potest, fit quidem maior ; contra vero ob diminutam sectionem aquae FH huic inclinationi respondentem, naus huic inclinationi, etsi maiori, minus resistet, fierique poterit, vt naus adeo, antequam hanc inclinationem attingat, ob rationes ante allegatas, penitus subuertatur.

§. 468. Sin autem suprema naus margo EF latius extendatur, vt abeat in ef , et naus latera sint Ae et Bf , tum naus quidem ob maiores aquae sectiones jb , quas inclinata occupat, magis inclinationibus reluctatur, verum maximus angulus inclinationis, quam sustinere potest, fCb minor erit quam in casu praecedente ; atque quo magis latera naus superiora versus diuergant, ita vt ad eandem altitudinem supra horizontem AB ascendant, eo minor fiet angulus BCf qui maximam inclinationem praebet. Manifestum autem est, fieri posse, vt figura $EADBf$ inclinationi BCF , quia est maior, aequae vel magis resistat, quam figura $eADef$ inclinationi minori BCf ; adeo vt adhuc ambigendum sit, vtrum latera sursum diuergentia an conuergentia nauibus magis conueniant.

§. 469. Hanc quaestionem ergo decidi oportebit ex aliis circumstantiis, naues spectantibus: hucque apprimè pertinere videtur, quae supra de figura laterum dicta sunt, ut a fluctibus minimam naui inclinationem inducant. Quamobrem figura laterum AE et BF etiamnum erit commodissima, quae latera AE et BF ita habet incuruata, ut centrum habeant in centro grauitatis G . Interim tamen quoque ad figuram portionis aquae submersae ADB respiciendum est, quippe per quam sectiones aquae ab , FH quoque determinantur. Tum igitur curuatura laterum ex centro grauitatis G sumpta maxime erit admittenda, quando sectio aquae FH non multo minor euadit quam AB ; ita ut inclinatione aucta simul vis nauis sese restituendi adhuc sensibilibiter augeatur.

Cap. VI.

DE ACTIONE GVBERNACVLI.

§. 470

Quanquam gubernaculum est pars navis externa, nec a navis indole et figura pendere videtur, tamen eius actio ab intima navium natura ac operationis ratione ita pendet, ut sine his rebus cognitis, determinari nullo modo queat. Est autem gubernaculum pars navis maxime necessaria, quippe cuius ope directio cursus non solum conservatur, verum etiam pro lubitu inmutatur, adeo ut sine gubernaculo nullus cursus certus institui possit. Plurimum igitur interest, naues ita esse comparatas, ut propositus cursus gubernaculi beneficio facile teneri, atque, si opus fuerit, celeriter transmutari queat; in hocque consistit una ex primariis proprietatibus, quae in navibus postulari solent.

§. 471. Actio gubernaculi autem in productione motus rotatorii circa axem verticalem per navis centrum gravitatis transeuntem consistit. Per huiusmodi motum rotatorium enim navis, quando ab undis aliisque viribus decursu suo declinatur, statim in situm debitum reducitur, hocque pacto eius cursus, quem sequi debet, conservatur. Simili vero modo, quando cursus immutari, atque in aliam plagam institui debet, quod saepe usu venire solet, ita immutatio ope gubernaculi efficitur, navique ea directio, quam cursus instituendus requirit, conciliatur. Quamobrem antequam gubernaculi actionem examini subiiciamus,

neceſſe erit ad uſum noſtrum colligere , quae in parte ſuperiori de motu nauium rotatorio circa axem verticalem expoſuimus ; eo quod in tali motu non ſolum actio gubernaculi conſtet , ſed etiam omnes vires externae eiusmodi motum rotatorium producentes ſeſe actioni gubernaculi immiſceant.

§. 472. Motus rotatorius, quo nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem , determinatur , partim ex momento virium ſollicitantium ad iſtum axem collecto , partim ex momento inertiae , quod tota nauis reſpectu eiusdem axis praebet , ac reperitur , ſi omnes nauis particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum ab hoc axe multiplicentur , omniaque haec producta in vnam ſummam coniciantur. Quod autem ad vires attinet , quibus eiusmodi motus rotatorius in nauis produci poteſt , primum notandum eſt , a nulla vi , cuius directio eſt verticalis , motum rotatorium circa axem verticalem generari poſſe. Quotiescunque enim directio vis ſollicitantis parallela eſt axi , circa quem vel motus vel inclinatio produci poteſt , toties eius vis momentum reſpectu huius axis erit nullum ; ex eoque ideo nullus ſiue motus ſiue inclinatio naſci poterit.

§. 473. Cum igitur hinc excludendae ſint vires omnes , quae in directionibus verticalibus nauem ſollicitant , videamus , quid vires in directionibus obliquis agentes efficere valeant. Ac primo quidem huiusmodi vires ſemper reſoluere licet , in binas , quarum alterius directio ſit verticalis , alterius horizontalis ; harumque ideo ſola poſterior horizontalis ſcilicet , in computum veniet , ſi quidem in motum rotatorium circa axem verticalem inde oriundum
inqui-

inquirere velimus. Virium vero horizontalium eae quoque ineptae sunt ad motum rotatorium generandum, quarum directiones per ipsum axem verticalem transeunt. Ex quibus perspicuum est motum rotatorium in naui oriri non posse, nisi ex viribus, quarum directiones sunt horizontales, et quae per ipsum axem verticalem non transeunt.

§. 474. Quodsi ergo vis sollicitantis directio non fuerit verticalis, ea resoluetur in binas, alteram verticalem alteram horizontalem, haecque sola consideretur. Vt autem motus rotatorius cognoscatur ex ea vi horizontali oriundus, eius momentum respectu axis verticalis inuestigari oportet. Quod commodissime fiet, si per directionem eius vis concipiatur sectio nauis horizontalis, in eaque punctum, vbi ab axe verticali transfigitur, notetur. Tum enim, si ex isto puncto recta normalis ad directionem vis sollicitantis ducatur, dabit productum ex ipsa vi in rectam illam normalem ortum huius ipsius vis momentum, quod in motu rotatorio producendo consumetur.

§. 475. Repraesentet planum chartae sectionem nauis ^{Tab. XVI.} horizontalem, in qua posita sit directio MP vis nauem ^{fig. 1.} sollicitantis, quae sit = p . Axis autem verticalis, qui per centrum grauitatis nauis ductus concipitur, istam sectionem horizontalem in G traiciat. Si iam ex G in rectam MP ducatur normalis GM, erit productum $p.GM$ ipsum momentum ex vi sollicitanti p ortum, ex quo motus rotatorius nascetur; Potest vero etiam momentum huius vis p colligi ex alia quacunque recta ex G ad directionem vis MP ducta. Sit enim ex G ad MP ducta recta quaecunque GN, erit momentum = $p.GN$. sin. GNP posito sinu
toto

toto = 1: est namque GN. fin. GNP = GM. Hinc intelligitur momentum rotationem generans duplici modo posse augeri; primo enim aucta ipsa vi p momentum in eadem ratione augetur, tum vero quo magis directio distet a puncto G, momentum tanto fiet maius.

§. 476. Si ergo naus vnica vi sollicitatur hoc modo eius momentum ad motum rotatorium generandum elicitur, atque si plures vires vrgeant, ex singulis simili modo momenta deducantur; quae vel addita vel subtracta inuicem, prouti erunt vel conspirantia vel aduersantia, dabunt momentum totale, ex quo motus rotatorius ex illis omnibus viribus coniunctis oriundus determinari poterit. Sit istud momentum totale = P; atque ponatur momentum inertiae totius nauis respectu axis verticalis per centrum grauitatis ducti = S, prodibit vis accelerans motum rotatorium = $\frac{P}{S}$. Scilicet motus angularis, si quis iam fuerit generatus tempusculo dt incrementam capiet = $\frac{Pdt}{S}$ nisi resistentia aquae aduersaretur; vel posita celeritate angulari iam acquisita = n , fiet $du = \frac{Pdt}{S}$.

§. 477. Nostrum autem institutum non postulat, vt ipsum motum rotatorium, quemadmodum generetur, atque increseat, definiamus; cum hoc pendeat a resistentia aquae parumque intersit exactissime tempus nosse, quo motus rotatorius per datum angulum absoluitur. Sufficiet nempe comparatiue definiuisse, quibus casibus celeritas angularis proditura sit maior minorue. Hocque simpliciter cognoscetur ex formula $\frac{P}{S}$; quae quo fuerit maior, eo incitator erit motus rotatorius, contra veto quo minor sit fractio $\frac{P}{S}$, motus rotatorius eo fiet lentior. Quamobrem
vt

vt motus rotatorius producatur maxime velox, efficiendum est, vt expressio $\frac{P}{S}$ fiat, quam fieri potest maxima.

§. 478. Motus rotatorius igitur eo fiet celerior, quo maior reddatur valor fractionis $\frac{P}{S}$. Quare ad motum rotatorium maxime accelerandum requiritur primum vt numerator P hoc est momentum respectu axis verticalis maxime augeatur, quod fiet cum augendo ipsam vim sollicitantem, tum eius distantiam ab axe verticali. Deinde vero etiam valor fractionis $\frac{P}{S}$ crescet, si diminuatur eius denominator S, qui exprimit nauis momentum inertiae respectu axis verticalis per centrum grauitatis ducti. Hoc ergo efficietur, si in operatione nauis grauissima onera quam fieri potest proxime ad axem istum verticalem collocentur. Contrario autem modo motus rotatorius fiet exiguus, si valor fractionis $\frac{P}{S}$ maxime diminuatur.

§. 479. Si duae naues concipiantur perfecte similes, similiterque oneratae, tenebunt earum momenta inertiae S rationem quintuplicatam laterum homologorum. Quod si iam vires sollicitantes etiam fuerint similes, vt teneant rationem duplicatam laterum homologorum, quod euenit, si vires vel a vento vel ab aqua ad nauem irruente profiscantur, vbi superficies has vires excipientes hincque ipsae vires quadratis laterum homologorum fient proportionales. Momenta ergo harum virium erunt in ratione triplicata laterum homologorum; ex quo motus rotatorii in nauibus similibus a viribus similibus orti tenebunt inter se rationem reciprocam duplicatam laterum homologorum; ita vt nauis duplo longior et octuplo ponderosior receptura sit motum rotatorium quadruplo tardiozem.

§. 480. Poterit autem ipse motus rotatorius hoc est eius celeritas angularis ad quoduis temporis momentum ex principiis in libro superiori stabilitis accurate definiri: fierique hoc poterit tam resistentiae aquae ratione habita quam ea neglecta. Ponamus igitur primo nauem, dum a virium momento P circa axem verticalem rotatur nullam ab aqua perpeti resistentiam; sitque celeritas quam nauis durante motu rotatorio iam est nacta tanta, vt punctum nauis, quod ab axe illo verticali distat interuallo $= f$, habeat celeritatem debitam altitudini v hacque celeritate nunc quidem istud nauis punctum circa axem verticalem motu circulari circumferatur. His positis, si puncto temporis illud nauis punctum progrediatur per arcum $= ds$, interea motus rotatorius ita accelerabitur, vt fiat $dv = \frac{Pfds}{s}$; vnde si virium momentum P maneat constans erit integrando $v = \frac{Pfs}{s}$.

§. 481. Quodsi iam tempus, quo punctum nauis assumtum, ab axe verticali distans interuallo f , circumferatur per arcum circuli s , ponatur $= t$, erit $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds\sqrt{s}}{\sqrt{Pfs}}$ hincque integrando $t = \frac{2\sqrt{Ss}}{\sqrt{Pf}}$. Denotat hic autem $\frac{s}{f}$ angulum, quem nauis iam circa axem verticalem motu rotatorio absoluit, qui angulus si ponatur $= \alpha$, isque datae magnitudinis puta vel rectus vel dati numeri graduum accipiatur, erit tempus quo nauis motum rotatorium per istum angulum absoluit vt $\sqrt{\frac{S}{P}}$. In casu ergo, quo tam nauis quam vires sollicitantes similes accipiuntur, erunt tempora, quibus naues per aequales angulos rotantur, in ratione simplici directa laterum homologorum. Ipse autem motus ob resistentiam neglectam erit vniformiter acceleratus.

§. 482.

§. 482. Vt autem nunc, quantum resistentia aquae hunc motum rotatorium perturbet, perpendamus; ponamus aquae sectionem esse figuram $aa\ bb$, latera ab et ab habentem parallela, quae autem ad aa et bb terminetur arcibus circularibus aAa et bBb , centrum habentibus in axe verticali G , sintque huic figurae omnes sectiones horizontales navis per totam carinam similes et aequales, et carinae profunditas sit $=c$, semilattitudo $MP=NQ=b$, et semilongitudo $AG=BG=a$. Licebit enim ad calculi commoditatem figuram nauium aliquantum a veritate abhorrentem fingere, cum aberratio in nauibus similibus, quas hic potissimum contemplamur similis sit futura, ita vt in ratione, quae inter motus rotatorios nauium similibus intercedit, error nullus sit oriturus, quantumuis vera nauium figura ab hac assumpta discrepet.

Tab. XVI
fig. 2.

§. 483. Habeat navis iam motum rotatorium tantum, vt punctum navis, ab axe verticali G distans intervallo $=f$, circumferatur celeritate altitudini v debita, atque consideretur particula Mm , quae contra aquam irruet in directione Mp normali ad MG , sit $GM=z$; et $GP=x$; erit $Mm=dx=\frac{zdz}{x}$ ob $zz=bb+xx$. Altitudo iam debita celeritati, qua elementum Mm circa G rotatur, erit $=\frac{zzv}{ff}$, et cum eius directio sit Mp normalis ad MG , resistentia erit quadrato sinus anguli pMb , quod est $=\frac{xx}{zz}$, proportionalis, vnde resistentia, quam patitur particula Mm ab aqua, erit $=dx \cdot \frac{zzv}{jf} \cdot \frac{xx}{zz} = \frac{vxxdx}{jf}$. In computum ducatur tota carinae profunditas c , erit resistentia, quam carinae elementum ipsi Mm respondens patitur $=\frac{cvxxdx}{jf}$.

§. 484. Tota ergo resistentia, quam naus latus aE patitur erit, $= \frac{cvx^3}{3ff}$, facto $x = G\alpha = \sqrt{aa - bb}$; et quia latus oppositum bF simili modo in aquam impingit, erit

eius resistentia pariter $= \frac{cv(aa - bb)^{\frac{3}{2}}}{3ff}$, ita vt resistentia

naus totalis motui rotatorio reluctans futura sit $=$

$\frac{2cv(aa - bb)^{\frac{3}{2}}}{3ff}$. Huius autem resistentiae quantitas, vt

cum viribus sollicitantibus comparari possit, ad pondus est reducenda, id quod facile fit, cum resistentia hoc modo expressa aequalis sit ponderi voluminis aquae, cuius capaci-

tas est $= \frac{2cv(aa - bb)^{\frac{3}{2}}}{3ff}$. Quare cum voluminis aquae,

quod aequale est portioni naus aquae submersae V , pondus habeat aequale naus ponderi M , fiet resistentia $=$ pon-

deri $\frac{2Mv(aa - bb)^{\frac{3}{2}}}{3Vff}$.

§. 485. Quantum autem ista resistentia motum rotatorium afficiat, ex eius momento colligi poterit. Vis autem quam portiuncula Mm sustinet, quae est $= \frac{cvxx dx}{ff}$, directionem habet MP normalem ad superficiem aE , eiusque adeo momentum respectu axis verticalis G erit $= \frac{cvx^3 dx}{ff}$; vnde momentum resistentiae, quam latus aE , patitur erit $= \frac{cvx^4}{4ff} = \frac{(aa - bb)^2 cv}{4ff}$ posito $x = G\alpha = \sqrt{aa - bb}$. Quia iam tantam quoque resistentiam latus bF patitur, erit momentum totalis resistentiae ad motum rotato-

tatorium impediendum $= \frac{(aa-bb)^2 cv}{2ff}$. In quod, quia pondus introduci debet, vt fiat momento virium P homogeneum, habebitur volumine naus aquae submerso V et p'ndere naus P in subsidium vocatis momentum ex resistentia ortum $= \frac{M(aa-bb)^2 cv}{2Vff}$.

§. 486. Quodsi iam ponamus naus punctum, quod ab axe G distat interuallo $= f$, conuerti tempusculo dt per arculum circulaem ds atque celeritatem interea ita augeri, vt altitudo debita v incrementum capiat dv , propter momentum virium et resistentiae, quo naus actu vrgetur $= P - \frac{M(aa-bb)^2 v}{2Vff}$ erit $\frac{dv}{f} = \frac{P ds}{S} - \frac{M(aa-bb)^2 cv ds}{2SVff}$; ex qua aequatione celeritas rotationis ad quoduis temporis momentum poterit definiri. Quoniam autem motus rotatorius ob resistentiam mox fiet aequabilis, et $dv = 0$, statim habebimus celeritatem illam, qua naus continuo ab motus initio aequabiliter rotari perget, quae definietur per hanc aequationem $\frac{v}{ff} = \frac{2PV}{M(aa-bb)^2 c}$ ex qua ipsa celeritas angularis, quae est $= \frac{v}{f}$ prodit $= \frac{\sqrt{2PV}}{(aa-bb)\sqrt{Mc}}$.

§. 487. Concipiamus iam duas naues perfecte similes, quae etiam a viribus similibus circa axes verticales circumagantur, sit maioris profunditas carinae $= C$ minoris $= c$, quae laterum homologorum vicem sustineant. Pertineat formula inuenta pro celeritate angulari ad nauem minorem; erit P vt c^3 ; V vt c^3 ; $aa-bb$ vt cc et Mc vt c^4 ; ex quibus oriatur celeritas angularis vt $\frac{c^3}{c^4}$ seu vt $\frac{1}{c}$. Ex quo colligitur nauium similibus a viribus similibus ad motum rotatorium incitatorum celeritates angulares, quas circa axem verticalem adipiscuntur, esse in ratione simplici inuersa laterum homologorum.

§. 488. His igitur praeparatis poterimus actionem gubernaculi tam explicare quam determinare. Ac primo quidem in examen venit vis externa gubernaculum vrgens, quae ex allapſu aquae contra gubernaculi superficiem oritur: de qua vi iam ergo conſtat, eius quantitatem tenere rationem compositam ex ſimplici ſuperficie gubernaculi, in quam aqua illidit, ex ratione duplicata ſinus anguli, ſub quo fit alliſio atque in ratione duplicata celeritatis, qua aqua impingit. Harum rerum, quibus vis a gubernaculo excepta determinatur, vnica tantum, nempe angulus, ſub quo aqua gubernaculum impellit, ab arbitrato naucle-ri pendet, binae reliquae vero cum per figuram nauis, tum per motum relatiuum nauis in aqua determinantur, ita vt iis, prout occasio tulerit, vti oporteat; neque eas pro lubitu moderari liceat.

§. 489. Praecipua autem cauſa, a qua gubernaculum vim accipit idoneam ad nauem circa axem verticalem conuertendam, poſita eſt in motu aquae aduerſus gubernaculum. Talis ergo vis exiſtit in aqua quieſcente, quando nauis quomodocunq; mouetur, tum enim aqua reſpectu gubernaculi motum habebit, quo in gubernaculum incurrens illi vim inferet. Quando autem aqua ipſa mouetur, tum gubernaculum ab aqua vim ſentiet, dummodo nauis non eodem motu, quo aqua mouetur. Quodſi enim vel nauis in aqua quieſcente quieſcat, vel in aqua mota parem habeat motum ſecundum eandem directionem; gubernaculum, in quocunq; ſitu detineatur, nullam vim ab aqua ſentire poterit. Quare vt gubernaculum vim exerere queat, neceſſe eſt, vt aut nauis in aqua quieſcente moueatur, aut in aqua mota vel quieſcat, vel motu ab aquae motu diuerſo promoueatur.

§. 490.

§. 490. Siue autem sola nauis moueatur siue tam aqua quam nauis simul diuerso motu ferantur, totus motus per regulas cognitae vel in solam aquam vel in solam nauem transferri poterit; quo ipso repraesentatio non parum adiuuabitur. Ponamus ergo aquam quiescere, quia vniuersam theoriam ad hunc casum potissimum accommodari conuenit, atque nauem in aqua moueri. Hic vero statim occurrunt duo casus, qui seorsim tractari debent; primus scilicet si nauis cursu directo secundum spinæ directionem progrediatur; alter vero obtinet, si nauis motu obliquo secundum directionem a spinæ directione diuersam feratur. Ad hosque duos casus referri poterunt omnes, qui in aqua mota seu fluuio siue nauis quiescat siue moueatur locum habere possunt.

§. 491. Sit $AEBF$ sectio nauis horizontalis vel in Tab. XVI. superficie aquae vel infra eam facta, nauisque progrediatur fig. 3. cursu directo secundum directionem BA , ita ut A sit pro-
ra, B puppis. Representet vero BC gubernaculum mobile circa axem B , et videamus cuiusmodi effectus ex quouis situ gubernaculi, uti si in situ Bc detineatur, in motu nauis vel eius directione nasci debeat. Iste autem effectus ante omnia deduci debet, ex motu, quo aqua in regione posteriori BMC respectu nauis agitabitur; ex eiusque cum quantitate tum directione concludi poterit, quanta vi gubernaculum in situ quocunque Bc detentum vrgeatur. Primo quidem perspicuum est, si nauis omni latitudine $E\dot{F}$ careret, tum aquam penitus in quiete esse permansuram, vel respectu nauis motum esse habituram aequalem illi, quo nauis progreditur, at in directione contraria, nempe in regione BcC aqua motum habitura est in directione QM parallela ipsi AB et celeritate ipsi nauis celeritati aequali.

§. 492.

§. 492. Quodsi autem latitudo nauis EF in computum ducatur, mox apparebit aquam in regione BCc non in directione QM affluere posse, cum ob nauis corpus non detur spatium, vnde aqua in directione QM venire possit. Dum quidem nauis, postquam corpore suo spatium BCc occupauit, hoc spatium relinquit, id vacuum non manet, sed continuo aqua repletur. Vnde autem aqua veniat, quae continuo spatia post nauem relicta occupet et adimpleat, tam accurate definiri non potest, verisimile autem est, hanc aquam vnde quaque confluere, maxime autem eam aquam subingredi, quae circa latera nauis E et F versatur. Quia enim nauis aquam prae se propellit, haec ipsa magis locum vacuum, quo se recipiat, affectabit.

§. 493. Planiora haec fient, si nauis perfectam quietem tribuamus, contra vero ponamus vniuersam aquam instar fluuii in directione contraria aA eadem celeritate, quam ante nauis affinximus; perspicuum enim est, in hac hypotesi eadem phaenomena sequi debere, quae in antecedenti, vbi nauis in aqua quiescente motum in directione Aa adiudicauimus. Aqua igitur in directione aA ad veniens in proram impinget, atque ad latera vtrinque deflectet, ex quo in regione K mouebitur in directione KL; cum autem ad L pertigit, vbi latitudo nauis non multum variatur, naturalem sequetur directionem LP, donec latera nauis retrorsum conuergant; tum autem motum suum iterum inflectet iuxta nauis latera, vt tandem in directione obliqua PM in gubernaculum incurrat. Inflectionem autem hanc aquae iuxta nauis latera ope calculi definire haud licet, propter defectum principiorum hydraulicorum

licorum huc spectantium, ex quo acquiescere debemus conclusionibus generalibus, quas experientia ducti formare valebimus.

§. 494. Inflexus iste cursus aquae iuxta naui latera eueniet eo facilius, quo minor fuerit naui curuatura; hoc est quo minor fuerit naui latitudo EF prae longitudine AB , et quo lentius latera vbique versus B conuergant. Cum enim motus aquae infusus teneat directionem AB , hanc directionem vi propria conseruare conatur, eoque magis declinationi ab hoc cursu resistet, quo ea fuerit maior. Quia etiam, si latera naui versus puppim vehementer conuergant, nauisque prope puppim magna tribuatur latitudo, fieri potest, vt aqua in suo cursu latera naui penitus deferat, atque post nauem spatium aqua tranquilla repletum relinquat, quam perpetuo praeterfluat. Quia enim hoc casu latera naui subito inflectuntur puppimque claudunt, aqua tantopere et tam subito cursum suum inflectere non valet.

§. 495. Sic, si $AEBF$ fuerit sectio naui horizontalis in aqua facta, eaque puppim B versus subito conuergat, aqua latera naui in S et T vsque alluens cursum suum iuxta latera SB et TB inflectere non poterit, sed latera deferendo motum suum in directionibus SV et TV continuabit. Quo fiet, vt post nauem spatium $VSBT$ maneat aqua tranquilla repletum, in quo adeo gubernaculum BC nullam vim sentire poterit. Idem phaenomenon euenire oportet, si naui in directione BA progrediatur in aqua quiescente, vbi etiam post nauem portio aquae perpetuo eadem nauem comitabitur, in qua gubernaculum nullum effectum exerere poterit. Hoc probatur quotidiana experientia

rientia, qua constat naues post se plerumque secum ducere quampiam aquae portionem, quae nauem per longissima interualla sequatur; haecque aqua vocari solet aqua mortua, eo quod in nauem nullam vim exercere potest.

§ 496. Quando ergo nauem eiusmodi aquae mortuae copia sequitur, gubernaculo nullus agendi locus relinquitur, id quod maximum est vitium, quod in naues cadere potest. Quamobrem maxime cauendum est, ne naues puppim versus nimis latae construantur, lateraque ad puppim B nimis cito et subito conuergant. Hocque praeceptum constructores nauium experientia edocti satis diligenter obseruare solent, dum partem nauium sub aqua versantem puppem versus lentissime conuergentem constituunt, ut copia aquae mortuae quam maxime diminuatur. In suprema aquae superficie quidem puppi tam acuta cuspis ob alias circumstantias conciliari non potest; contra autem sub aqua nauis sectiones horizontales maxime cuspidari solent, donec in imo loco omni latitudine carent.

§. 497. Hanc igitur ob rem in suprema aquae superficie gubernaculum nullum edere potest effectum, atque suprema aquae superficies pone nauem respectu nauis stagnabit eritque aqua mortua. Sub aqua vero, vbi carina versus puppim incipit esse satis gracilis, aqua in gubernaculum incurret, et aqua mortua cessabit; hincque affluxus continuo descendendo crescet, quoad in imo loco, vbi tota nauis in spinam definit, aqua secundum ipsius spinae directionem moueatur, eandemque habeat celeritatem respectu nauis quiescentis, quam habet nauis respectu aquae quiescentis. Maximum ergo effectum gubernaculum praestabit in imo loco, ita ut eius pars superior immedia

Uate sub aqua sita propemodum nullius sit vsus. Quamobrem conuenit gubernaculo in infima parte maximam tribui latitudinem BC , quia ab ea potissimum omnis gubernaculi effectus proficiscitur.

§. 498. Quoniam, si puppis subito clauditur, aqua in spatium aliquod post nauem omnino non affluit, sed spatium SVT aqua quiescente repletum relinquit, manifestum est, si puppis magis fiat cuspidata, tum portionem aquae quiescentis diminui tandemque penitus cessare; vt in figura 3. Interim tamen etiam tum aqua non pleno cursu in spatium BCc irruet, sed tam in directione obliqua PM , quam etiam minori celeritate, quam est ea, qua aduersus proram secundum aA impingere ponitur. Quamobrem cum vtrunque effectus gubernaculi infringatur, maximi momenti hoc est praeceptum, vt naues puppim versus, in parte aquae submersa, quantum fieri potest, graciles efficiantur, et capacitas diminuatur. Quemadmodum etiam in praxi his in locis cauitas nauium omnino adimitur, solusque paries, qui lignum mortuum vocatur, relinquitur.

§. 499. His expositis videamus, quantam vim aqua iuxta puppim in gubernaculum impingens exerat. Ac primo quidem perspicuum est, si gubernaculum BC in directum cum spina nauis fuerit constitutum, tum vires, quas vtrunque ab aqua allabente sustinet, se mutuo destruere. Quia enim ponimus cursum aquae fieri in directione aA , is versus puppim vtrunque aequaliter inflectetur, ideoque eadem vi in vtramque gubernaculi BC superficiem impinget, ex quo aequilibrium oriatur necesse est. Quodsi autem gubernaculum BC in situm obliquum Bc redigatur, angulusque CBb minor fuerit quam angulus BCp , quem

aquae pC cum spina ABC facit, tum quidem etiamnum aqua in vtramque superficiem gubernaculi vim exeret, at impetus in superficie Bc ab allapsu aquae PM maior erit quam in parte opposita, hincque vis resultabit gubernaculum in directione MN vrgens, quae nauem circa axem verticalem rotare conabitur.

§. 500. Sin autem angulus CBc maior fuerit quam angulus BCp , tum aqua in parte pBc cessabit vllum effectum in gubernaculum Bc exerere, hincque gubernaculum omnem actionem aquae PM ex altera parte allabentis sustinebit, ex qua vim definiri conueniet, quae navis circa axem verticalem circumagetur. Sunt itaque hi duo casus, quibus angulus CBc vel minor est vel maior quam angulus BCp , penitus a se inuicem disuncti, neque lege continuitatis inter se connexi, ita vt vtrumque seorsim calculo expediri oporteat. Deinde etiam notandum est obliquitatem aquae allabentis seu angulum BCp per totam profunditatem variari, eumque in vna navis regione prope spinam prorsus euanescere; quae varietas calculum redderet insuperabilem. Hanc ob rem obliquitatem BCp mediam statuemus inter maximam et minimam eamque toti profunditati tribuimus.

§. 501. Ponamus igitur per totam gubernaculi altitudinem aquam incurrere vtrinque in directione PM et pC , angulique PMQ vel pCB sinum esse $= m \cdot \cosinum n$, existente, id quod semper assumimus, sinu toto $= 1$, ita vt sit $mm + nn = 1$. Ac primo quidem sit angulus CBc minor angulo BCp , quo casu aqua vtrinque in gubernaculum impetum faciet: sitque anguli CBc sinus $= s$, cosinus $= u$. His positis, angulus PMB sub quo aqua in parte PM impinget,

pinget, erit aequalis summae angulorum $CBc + pCB$. eiusque ideo sinus erit $= mu + ns$. Contra vero ex altera parte aqua pC irruet in gubernaculum sub angulo $pCB - CBc$, cuius sinus est $mu - ns$. Quum igitur alter impetus alteri sit contrarius, ex excessu, quo alter alterum superat, effectus aquae in gubernaculum colligi debet.

§. 502. Cum igitur sub istis angulis aqua vtrinque in gubernaculum impingat, sit superficies gubernaculi, quae vtrinque impetum aquae excipit $= hb$, atque M sit istius vtriusque superficiei centrum gravitatis, in quo tota vis aquae collecta est aestimanda, quippe per quod media directio impetus aquae transit, et ad superficiem est normalis. Quodsi ergo velocitas aquae in regione puppis ponatur debita altitudini v . Vis aquae ex parte PM impingentis aequivaleret ponderi voluminis aquae, quod est $= hbv(mu + ns)^2$. Ex parte opposita autem vis aequivalebit ponderi voluminis aquae, quod est $= hbv(mu - ns)^2$, quae vis, quia illi est contraria, remanebit vis ex plaga PM proveniens $= 4mns ubhv$. Quae, ut ad pondus reducatur, positus pondere navis $= M$ et volumine sub aqua versante $= V$, erit ea $= \frac{4Mmns ubhv}{V}$.

§. 503. Huius iam vis media directio erit recta MN , per centrum gravitatis M superficiei gubernaculi, quae quidem sub aqua versatur, ducta et ad superficiem Bc normalis. Hanc ob rem ab ista aquae in gubernaculum actione navis urgebitur in directione MN vi $= \frac{4Mmns ubhv}{V}$, si quidem angulus CBc fuerit minor quam angulus BCp seu $mu > ns$. Quodsi autem angulus CBc maior fuerit angulo BCp , tum ob evanescentem alteram vim $hbv(mu - ns)^2$ in calculo nascetur formula longe diversa, fietque

vis, qua naus in directione MN vrgébitur $= \frac{Mbbv(mu+ns)^2}{v}$,
haecque adeo expressio locum habebit si fuerit $mu < ns$.

§. 504. Quo autem naus hanc vim, quam aqua in gubernaculum Bc exerit, sentiat, necesse est vt gubernaculum in isto situ tanta vi detineatur, quae sufficiat ad vim aquae sustinendam. Si enim gubernaculum non teneretur, maxima vis aquae pars impenderetur ad gubernaculum circa axem B rotandum, quoad quiesceret in situ BC, hocque motus ipsius naus parum afficeretur. Quamobrem ad gubernaculum in situ Bc detinendum tanta vis a gubernatore, qui clauum tenet, est applicanda, cuius momentum respectu axis B, circa quem gubernaculum mobile existit, aequale sit momento vis aquae respectu eiusdem axis. Hoc est si ponatur axis iste B circa quem gubernaculum mobile est, verticalis, et distantia MB = k, debet esse momentum vis, quod ad gubernaculum in situ Bc retinendum requiritur, $= \frac{Mmnsubbvk}{v}$ casu quo $mu > ns$, altero vero casu quo $ns > mu$, debet illud momentum esse $= \frac{M(mu+ns)^2bbv}{v} k$.

§. 505. Gubernaculum autem dirigi atque detineri solet ope temonis, qui est vectis heterodromus mobilis circa axem B, quem axem adhuc verticalem ponimus, postea inuestigaturi, quantum obliquitas huius axis discriminis afferat: reuera enim iste axis in nauibus oblique ad horizontem constitui solet. Quodsi ergo huius vectis seu temonis brachium interius quod gubernator tenet, habeat longitudinem = f. atque vis, quam gubernator adhibere debet ad gubernaculum in situ Bc conseruandum ponatur = P, erit momentum huius vis ex natura vectis = Pf. Quare casu quo $mu > ns$ debet esse $Pf = \frac{Mmnsubbv}{v} k$, altero

tero vero casu, quo habetur $CBc > BCp$ seu $mu < ns$ oportet esse $Pf = \frac{M(mu+ns)^2bbv}{v} k$.

§, 506. Si ergo gubernaculum in situ Bc a gubernatore firmiter detineatur, vi, quam modo definiuimus, nauis ipsa sollicitabitur in directione MN , vi vel $= \frac{Mmnsbbv}{v}$ vel $= \frac{M(mu+ns)^2bbv}{v}$; illa scilicet si $mu < ns$, hac si $mu > ns$. Atque quia axem B , circa quem gubernaculum mobile existit, ponimus verticalem, erit directio media ex vi aquae orta MN horizontalis. Quodsi autem vim P , qua gubernator clauum tenet in computum ducere velimus, ambo illi casus, quibus est vel $mu > ns$ vel $mu < ns$ in vnum recident; fietque utroque casu vis, qua nauis inclinatione horizontali MN sollicitabitur $= \frac{Pf}{k}$. Atque sic ex vi a gubernatore impendenda P , ex longitudine temonis f , et ex distantia centri grauitatis gubernaculi M ab axe B quae est k , innotescit perpetuo vis, quam nauis sustinet, eiusque directio MN .

§ 507. Ab hac ergo vi, quia eius directio est horizontalis, primum motus nauis progressiuus afficietur, idque pari modo, ac si eadem vis in directione ipsi MN parallela nauis in ipso centro grauitatis esset applicata: hincque si ante cursus nauis fuerit directus secundum directionem BAa , per vim gubernaculi nauis cursus aliquantulum obliquus inducetur, haecque obliquitas pendebit cum a nauis celeritate tum a viribus nauem in directione Aa propellentibus. Praeterea si punctum M vel altius vel humilius fuerit positum quam centrum grauitatis nauis, nauis quoque inclinabitur circa axem horizontalem. Et quia punctum M potissimum infra centrum grauitatis nauis cadit, latus nauis EA deprimetur, contra vero latus FB eleuabitur pro ratione stabilitatis.

§. 508. Tandem autem ab hac vi naus circa axem verticalem per centrum grauitatis trenſeuntem conuertetur, in quo principalis gubernaculi ſcopus verſatur, et ad quem hic nobis potiffimum eſt reſpiciendum. Quoniam igitur ipſa vis eſt $= \frac{Pf}{k}$, eiusque directio horizontalis MN, ſi axis verticalis nauis hanc ſectionem horizontalem AEBF in G traicere ponatur, erit iſtius vis momentum ad nauem circa axem verticalem conuertendam $= \frac{Pf}{k}(BG + BN) \frac{BM}{BN}$; eoque prora nauis A in regionem A α detorquebitur, ita vt directio nauis, quae ante erat BA, verſus α inflectatur. Ponatur BG = a , ob ſinum CB c = s et cofinum = u erit $\frac{BM}{BN} = u$, et BN = $\frac{k}{u}$, ex quo momentum vis nauem conuertentis erit $= \frac{Pf}{k}(a + \frac{k}{u})u = \frac{Pf(au + k)}{k}$.

§. 509. Ceteris paribus igitur eſt vis gubernaculi nauem conuertens, vt vis P, quam gubernator adhibere debet ad gubernaculum in ſitu ſuo conſeruandum. Ex quo intelligitur, tum demum gubernaculum nihil valere ad nauem conuertendam, ſi nulla vi opus fuerit ad gubernaculum continendum. Euenit hoc autem ſi gubernaculum in ſitu BC fuerit conſtitutum, vbi ob $s = 0$ fit etiam vis P = 0. (§. 505); quo in loco gubernaculum in ſitu aequilibrii verſatur. At cum in hoc ſitu aqua vtrinque in gubernaculum irruat ſub angulo BC p , hic aequilibrii ſitus erit violentus, eo quod vires contrariae ſe multo deſtruunt. Quare ſi gubernaculum caſu de hoc ſitu declinetur; vel ſubinde, quod ob ſummam circumſtantiarum mutabilitatem facile euenire poteſt, vires illae contrariae non inter ſe ſint perfecte aequales, gubernaculum in ſitu BC non erit in aequilibrio abſoluto ſed vel in hanc vel illam plagam vrgebitur. §. 510.

§. 510. His igitur casibus si gubernator voluerit gubernaculum in situ directo BC conseruare, vim adhibere debet, ideoque nauis, etsi gubernaculum situm tenet directum BC, tamen conuertetur. Quamobrem, si nauis directio non debeat inflecti, gubernaculum non tam in situ directo BC erit detinendum, quam eo in situ, in quo sine vi manebit; cursusque nauis inuariatus restabit, si clauo nulla vis inferatur, quemcunque situm teneat gubernaculum. Cum igitur ob aquam vtrinque ad gubernaculum BC oblique impingentem vtraque vis non perpetuo sit aequae vehemens, vtique eueniet vt gubernaculi situs aequilibrii, a quo nauis nullam vim suffert, non perpetuo in situm directum CB incidat, sed modo in hanc modo illam regionem deflectat. Hancque ob causam gubernaculo spatium aliquod concedi debet, in quo libere fluctuare possit, si quidem nauis directionem inflecti non oporteat.

§. 511. In tali ergo libero spatio, quod gubernaculo conceditur, gubernaculum circa axem B oscillationes peraget, quas inuestigare operae praetium erit. Ad hoc ponamus gubernaculi cum temone; quippe qui simul movetur, respectu axis B momentum inertiae esse = G et quia momentum virium aquae, quae gubernaculum in situ obliquo Bc , quem minime a situ directo BC discrepare ponimus, constitutum in situm BC redigere conantur est = $\frac{4Mmns^2hbvk}{v}$, vbi est s sinus anguli CBc percurrendi, quem minimum assumimus, ideoque erit cosinus $u = 1$. Cum igitur spatium percurrendum sit vt s , erit longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus gubernaculi, = $\frac{GV}{4Mmnbhk^2v}$. His igitur oscil-

Pars II.

L 1

latio-

lationibus nisi omnis libertas concedatur, navis directionem suam conseruare non poterit.

§. 512. Hae ergo gubernaculi vibrationes celeriores erunt eoque vehementiores, quo minor fuerit in numeratore valor ipsius G , in denominatore autem quo maior fuerit valor ipsius $mnbhk v$, ob valorem $\frac{v}{+M}$ constantem. Ob denominatorem ergo, qui maximae variabilitatis est capax, primum erunt oscillationes eo vehementiores, quo propius angulus obliquitatis BCp , secundum quem aqua circa puppim mouetur, ad angulum semirectum accesserit. Deinde etiam oscillationum vehementia crescet, quo maior fuerit altitudo v , hoc est quo celerius navis in aqua progreditur. His igitur casibus nisi gubernaculum perfecte liberum relinquantur vt motum oscillatorium recipere possit, navis directionem suam conseruare non poterit, verum modo in hanc modo in illam plagam deflectetur. Hancque cautelam nautae probe obseruare solent, dum gubernaculo in turbidis potissimum tempestatibus spatium satis amplum concedere iubent, in quo libere agitur.

§. 513. Quo autem ipsam vim gyratoriam, qua navis a gubernaculo circa axem verticalem conuertetur, curatius determinemus, sit momentum inertiae totius navis respectu axis verticalis per centrum grauitatis transeuntis $= S$; erit acceleratio navis circa hunc axem orta vt $\frac{Pj(au+k)}{Sk}$. Ex qua expressione intelligitur nauem ceteris paribus eo facilius actioni gubernaculi obedire, quo minor fuerit valor momenti S ; hoc est quo propius moles navis ad istum axem verticalem admoueatur. Supra quidem vidimus oscillationum navis tranquillitatem obtineri, si omnia onera quantum fieri potest ab axibus horizontalibus
per

per centrum grauitatis ductis, maxime remoueantur: quare vt simul per onerationem nauis gubernatu facilis reddatur, maxima onerum copia ab ipſo centro grauitatis nauis quidem maxime debet remoueri; verum tamen ita, vt ab axe verticali per centrum grauitatis ducto quam minime remoueatur. Ex quo intelligitur per onerationem tam oſcillationum tranquillitatem, quam effectum gubernaculi facilem obtineri poſſe.

§. 514. Acceleratio porro autem conuerſionis nauis circa axem verticalem potiffimum pendet a quantitate momenti virium ſollicitantium quod eſt $= \frac{Pf(au+k)}{k}$, quod quo fuerit maius, eo facilius effectus gubernaculi conſequetur. Ponamus autem gubernaculum in tali ſitu Bc detineri, cuius declinatio a ſitu directo BC ſeu angulus CBc maior ſit, quam obliquitas curſus aquae BCp ; eritque $\frac{Pf}{k} = \frac{M(mu+ns)^2bbv}{v}$, ideoque momentum virium nauem conuertentium $= \frac{M(mu+ns)^2bbv(au+k)}{v}$ ſeu ob rationem $\frac{M}{v}$ conſtantiem, erit momentum hoc vt $(mu+ns)^2bbv(au+k)$. Ex qua formula primum colligitur effectum gubernaculi eo eſſe fortiorem, quo maior fuerit gubernaculi ſuperficies bb , et quo celerius aqua in gubernaculum irruat, ceteris paribus. Ad hoc ergo praefaret gubernacula ampliffima conſicere, niſi aliae rationes hoc diſſunderent.

§. 515. Quoſi iam ſuperficies gubernaculi bb iam fuerit determinata, ac celeritas aquae ſeu v non ab arbitrio noſtro pendeat, erit viſ gyrotoria vt $(mu+ns)^2(au+k)$, ex qua cognoscere licet, quantum declinatio gubernaculi ſeu angulus CBc ad nauem conuertendam conferat. Notandum autem eſt hanc formulam non valere niſi ſit mu

$\angle ns$ feu $CBc \gtrsim BCp$; At facile intelligitur valorem illius expressionis non continuo euadere maiorem, quo maior constituatur angulus CBc ; etfi enim augendo angulum CBc crescit factor $(mu + ns)^2$; tamen contra ob cosinum anguli CBc , qui est $= u$, decrefcentem tota expressio $(mu + ns)^2 (au + k)$ diminui poterit. Hincque perspicuum est angulum dari definitum CBc , pro quo expressio illa maximum induat valorem.

§. 516. Inuestigemus ergo angulum declinationis CBc , quae expressioni $(mu + ns)^2 (au + k)$ maximum valorem conciliet; ideoque eam expressionem differentiemus ponendo u et s variables fietque $(mu + ns)^2 adu + 2(au + k)(mu + ns)(mdu + nds) = 0$. Cum autem fit $uu + ss = 1$ erit $du = -\frac{sds}{u}$, vnde orietur sequens aequatio diuisione per $mu + ns$ instituta: $(mu + ns)as = 2(au + k)(nu - ms)$ feu $3masu + nass = 2nauu + 2nku - 2mks$. Quoniam vero interuallum $BM = k$ est valde paruum prae distantia $BG = a$, erit vtique proxime $3masu + nass = 2nauu$, atque posita tangente anguli $CBc = \frac{s}{u} = t$, erit $ntt + 3mt = 2n$, hincque $t = \frac{-3m + \sqrt{(9 - 4n)}}{2n}$; et secans anguli $CBc = \sqrt{(1 + tt)} = \frac{\sqrt{(9 + 6n - 4n)} - \sqrt{(9 - 6n - 4n)}}{2n}$. Vnde fit $s = \frac{t}{\sqrt{(1 + tt)}} = \frac{\sqrt{(9 + 6n - 4n)} - \sqrt{(9 - 6n - 4n)}}{6\sqrt{(1 + tt)}}$ atque $u = \frac{\sqrt{(9 + 6n - 4n)} + \sqrt{(9 - 6n - 4n)}}{6}$.

§. 517. Sin autem hos valores propius habere velimus, ita vt etiam interualli $BM = k$ etfi admodum parui respectu $BG = a$, ratio habeatur, ponatur verus ipfius anguli CBc finus valor $= s'$, eiusque cosinus $= u'$; atque fingatur $s' = s + \frac{kzs}{a}$ et $u' = u + \frac{kzs}{a}$; denotantibus s et u valores iam inuentos. His autem in aequatione proposita substitutis reperietur $z = \frac{2}{3} \cdot \frac{nu - ms}{muu - mss + 2nsu}$. Quodfi iam

iam loco s et u valores inuenti substituantur, obtinebitur fin. $CBc = \frac{\sqrt{3(1+n)(3+n)} - \sqrt{3(1-n)(3-n)}}{6} + \frac{k}{3a} \cdot \frac{2n}{\sqrt{(9-nn)}}$ cof. $CBc = \frac{\sqrt{3(1+n)(3-n)} + \sqrt{3(1-n)(3+n)}}{6} - \frac{k}{3a} \cdot \frac{\sqrt{(9-nn)} - \sqrt{(1-nn)}}{\sqrt{(9-nn)}}$.

§. 518. Quoniam autem assumimus angulum CBc maiorem esse angulo BCp , sub cuius obliquitate aqua in gubernaculum irruit; expressio anguli CBc inuenta, quo gubernaculum maxime efficax existit, locum habere non poterit, nisi sit angulus CBc maior angulo CBp , hoc est, sumendis tangentibus, nisi sit $\frac{s}{u}$ seu $t > \frac{m}{n}$. Inuenimus autem neglecta quantitate $BM = k$ prae maiore $BG = a$, esse $t = \frac{-3m + \sqrt{(9-nn)}}{2n}$; quae cum superare debeat tangentem $\frac{m}{n}$, oportebit esse $-3m + \sqrt{(9-nn)} > 2m$ seu $\sqrt{(9-nn)} > 5m$ hoc est $\sqrt{(8+mm)} > 5m$ ob $nn = 1 - m^2$, sumantur quadrata fiet $Q + mm > 25mm$ hincque $8 > 24mm$ ideoque $m < \frac{1}{3}$. Ex quo colligitur angulum obliquitatis aquae BCp minorem esse debere quam $35^\circ, 16'$, si quidem angulus CBc inuentus gubernaculo maximum effectum praebere debeat.

§. 519. Hinc manifestum est, si angulus BCp maior fuerit $35^\circ, 16'$, tum valorem inuentum pro angulo CBc non amplius gubernaculo maximum effectum esse daturum, eo quod tum hypothesis calculo aduersetur. Quodsi autem angulus BCp exacte aequetur $35^\circ, 16'$, ita vt eius sinus sit $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ seu tangens $= \frac{1}{\sqrt{2}}$; tum angulus CBc gubernaculo maximam vim tribuens accurate aequabitur angulo BCp , fietque directio gubernaculi Bc parallela directioni aquae pC in parte opposita ad puppim affluente. Sin autem angulus BCp maior euaderet, tum minor proditurus esset angulus CBc ex calculo, ideoque vtrinque gubernaculum vim aquae sentiret, dum tamen in calculo

vnam tantum gubernaculi superficiem aquae allidentem ponimus.

§. 520. Ponamus obliquitatem aquae BC*p* omnino euanescere, atque aquam secundum directionem spinae navis ad puppim impingere, vt angulum obtineamus, sub quo gubernaculum maximum effectum praestare iam pridem est inuentum. Qui enim adhuc istum angulum maximae efficaciae determinauerunt, non solum aquam directe circa puppim alluere posuerunt, verum etiam intervallum BM = *k* prae longitudine BG = *a* negligendum censuerunt. Hanc obrem in formulis pro angulo CB*c* inventis ponamus *m* = 0 et *n* = 1, prodibitque anguli CB*c* tangens $t = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}$, hincque eius sinus = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et cosinus = $\sqrt{\frac{1}{3}}$: ex quo angulus CB*c*, ad quem gubernaculum inclinatum promptissimum effectum edit, erit 54°, 44', omnino vti ab aliis iam pridem est inuentum. Crescente ergo obliquitate aquae BC*p* angulus CB*c* continuo decrefcit, donec tandem euadat 35°, 16', facto angulo BC*p* pariter = 35°, 16'.

§. 521. Maneat directio aquae *p*C spinae navis parallela seu *m* = 0 et *n* = 1, verum intervalli BM = *k* rationem quoque habeamus in definiendo angulo CB*c* gubernaculo citissimum effectum conciliante. Habebimus ergo hanc aequationem quaesito nostro satis facientem: $ass = 2auu + 2ku$, seu $a = 3auu + 2ku$; ideoque $uu = \frac{-2ku}{3a} + \frac{1}{3}$. Hinc fit $u = \frac{-k}{3a} + \sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{kk}{3aa}\right)} = \frac{-k + \sqrt{3aa + kk}}{3a}$. Sit iam *k* multo minor quam *a*, eritque proxime cosinus anguli CB*c* = $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{k}{3a} + \frac{kk}{6a^2\sqrt{3}}$. Sit $\frac{k}{a} = \frac{1}{25}$ vt fere fieri solet, prodibit cosinus anguli CB*c* = 0, 5609239, atque

que ideo ipse angulus CBc arit $= 55^\circ, 53'$, et consequenter maior, quam si interuallum $BM = k$ prae longitudine $BG = a$ neglexissemus.

§ 522. Vt nunc de ipsa celeritate, qua naus a gubernaculo conuertitur quicquam definiamus, supra §. 486. vidimus in nauibus, quarum corpora sint similia, denotante c latus homologum puta profunditatem carinae, si momentum vis conuertentis fuerit $= P$, fore celeritatem angularem genitam vt $\frac{\sqrt{P}v}{cc\sqrt{Mc}}$. At nostro casu momentum gubernaculi est $= \frac{M(mu+ns)^2bbv(au+k)}{v}$, seu neglecto k prae a $= \frac{Ma(mu+ns)^2bbv}{v}$. Hoc ergo valore loco P substituto prodibit celeritas nauis angularis vt $\frac{\sqrt{bbu(mu+ns)^2v}}{cc}$ ob a ipsi c proportionalem, seu posita gubernaculi declinatione eadem erit celeritas angularis vt $\frac{\sqrt{bbv}}{cc}$. In nauibus ergo, quarum corpora praeter gubernacula sunt similia pro simili gubernaculorum declinatione erunt celeritates angulares in ratione composita ex directa velocitatis nauis et subduplicata superficiei gubernaculi; atque ex inuerfa duplicata laterum homologorum.

§. 523. Si naues habeant quoque gubernacula similia, vt sit bb vti cc , tum celeritas angularis a gubernaculo oriunda erit vt $\frac{v}{c}$ hoc est directe vt celeritas nauis, et inuerse vt latera homologa: ex quo maiores naues tardius conuertentur quam minores idque in ratione laterum homologorum. At in maioribus nauibus gubernacula minora confici solent, quam similitudo requireret; ac fere tota gubernaculi superficies bb statui solet lateri homologo c proportionalis: in hac ergo consuetudine celeritates angulares diuersarum nauium erunt vti $\frac{v}{c\sqrt{c}}$, hoc est directe

vti

vti celeritates ipsae nauium , et reciproce tenebunt rationem sesquiplatam laterum homologorum ; nauis dcirco quadruplo longior et 64 vicibus grauior octies tardius conuertetur a gubernaculo ceteris paribus.

§. 524. Vt autem diuersae naues ceterum similes aequali celeritate angulari gubernaculi ope conuerti possent , gubernacula adhuc maiora confici deberent , quam pro similitudinis ratione. In diuersis scilicet nauibus superficies gubernaculi constitui deberet quadrato quadrato laterum homologorum proportionalis , ita vt esset bb vti c^4 . Verum tum ob motum angularem eundem ipse motus conuersionis in nauibus maioribus , qui in ratione longitudinis crescit , nimium fieret vehemens atque impetuofus , vt tantae molis naues eiusmodi concitatum motum sustinere nequeant. Quam ob causam iure nequidem postulari potest , vt naues maiores eodem tempore sese in gyrum agi patiantur quam minores ; hincque etiam multo minoribus gubernaculis , quam iste effectus requireret , instrui solent , ita vt etiam minora constitui soleant , quam similitudinis ratio requirit.

§. 525. Cur autem gubernacula in maioribus nauibus adhuc minora quam pro similitudinis ratione conficere consueuerint ; causa non tam facile assignari potest , praecipue cum promptitudo gubernaculi in omnibus nauibus summo studio desiderari soleat. Respondent vero ad hoc artis nauticae periti , tanta gubernacula , quanta similitudo requirit , in magnis nauibus cum nimis difficulter contineri , tum etiam tanti roboris pro ceteris circumstantiis fabricari non posse , vt viribus aquae sustinendis paria essent. Praecipua vero ratio in hoc posita esse videtur , quod vsus ,
varique

variiue casus quibus naues exponuntur, a nauibus maioribus non tam promptam gyrationem postulent, quam a minoribus; ita vt consuetae magnitudinis gubernacula etiam in maximis nauibus sufficere queant.

§. 526. Supra vidimus, si temonis, quo gubernaculum regitur et continetur, longitudo fuerit $= f$, fore vim a nauclero adhibendam, vt gubernaculum in dato obliquitatis situ conseruet, vti $\frac{bbk^2}{f}$, seu celeritate posita eadem vti $\frac{bbk}{f}$. Quodsi ergo gubernaculum sit ad similitudinem in nauibus diuersae magnitudinis confectum, vt sint b et k itemque f vt latera homologa c , erit vis a gubernatore adhibenda tamen in duplicata ratione laterum homologorum; atque in nauis duplo longiori quadruplo maior vis requireretur, ad gubernaculum in dato situ continendum. Sin autem gubernacula in maioribus nauibus adhuc maiora, quam pro similitudinis ratione conficiantur, vt motus angularis prodeat idem qui in minoribus, quia tum esse debent bb vt c^2 et k vt c^3 ob longitudinem gubernaculi vti c , prodiret vis a gubernatore impendenda vt $\frac{c^2}{f}$. Quare si f capiatur vt c foret vis gubernatoris in ratione sextuplicata laterum homologorum, quae omnino admitti non potest.

§. 527. In hoc autem statu maxime cauendum est, ne gubernaculum abruptatur, cuius robur ruptioni resistens est in crassitie gubernaculi ratione duplicata. Posita ergo crassitie gubernaculi $= s$ erit eius robur vt css ; denotante c longitudinem seu latitudinem gubernaculi: momentum autem vis aquae, quae gubernaculum abruptere conatur, est vt bbk , ex quo crassities s constitui deberet pro-

portionalis ipsi $\sqrt{\frac{bbk}{c}}$. Ponatur altitudo nauis, quae simul latus homologum exprimat, $= c$, et latitudo gubernaculi $= t$ erit $bb = ct$ et $k = \frac{1}{2}t$, vnde fiet s vt t . Si ergo gubernaculum ad similitudinem nauium fabricatur, vt fit t vti c , oporteret crassitiem gubernaculi s quoque esse vti c , ideoque tantam, quantam similitudo requirit. Quamobrem si crassities sumatur lateribus homologis proportionalis, tum posset latitudo etiam constitui lateribus homologis proportionalis.

§. 528. Quodsi ergo in nauibus diuersae molis similibus etiam gubernacula tam ratione crassitiei quam latitudinis fiant similia, tum quidem aequae ruptioni resisterent; at motus angularis ideo non fieret aequalis, verum proportionalis existeret inuerse lateribus homologis, eoque tardior euaderet, quo maiores essent naues. Sin autem motus angularis desideretur idem in omnibus nauibus, tum $bb = ct$ debet esse vt c^4 ideoque latitudo t deberet esse vt c^2 cui simul crassities s fieret proportionalis. In nauis ergo duplo longiore tam crassities quam latitudo constitui deberet octuplo maior, quae ratio in maximis nauibus tantopere augetur, vt gubernaculi crassities tandem totam nauis latitudinem adaequaret. Quod cum minime admitti queat, manifestum est effici omnino non posse, vt naues maiores aequae celeriter ac minores ope gubernaculi circumagi queant.

§. 529. Neque vero reliquae circumstantiae permittunt, vt crassities gubernaculi in ratione laterum homologorum crescat; namque crassities gubernaculi excedere nequit crassitiem ligni mortui, cui adaptatur, quia alias resistentiam pareret motui nauis admodum noxiam, verum
aliae

aliae rationes impediunt ; quominus crassities ligni mortui similitudinem nauium sequatur , quippe quae in nauibus maioribus minor statuitur , quam similitudinis lex postulat. Quam ob causam in nauibus maioribus tam crassities quam latitudo gubernaculi in minori quam similitudinis ratione crescere debebit , ex quo eius effectus minor fiat necesse est. Vnde celeritas angularis in nauibus maioribus adhuc minor existet , quam ratio inuersa laterum homologorum requirit ; hoc est in naui duplo longiori plus quam duplo erit tardior. Ex quibus abunde perspicitur , quo maiores fuerint naues , eo minus eas effectum gubernaculi sentire posse , quam naues minores cetera simili modo constructas , quod phaenomenon experientia manifesto declarat.

§. 530. Ex his igitur quantitas gubernaculi secundum omnes dimensiones perfecte determinatur. Primum enim eius longitudo seu altitudo aequalis est profunditati ad quam nauis aquae immergitur : eminet quidem insuper extra aquam ad temonem vsque , haec autem pars in computum non ingreditur. Deinde crassities gubernaculi aequalis constitui debet crassitiei parietis nauis , cui adaptatur ; maior enim ob rationes allegatas esse nequit , minorem autem confici non conuenit , cum quod aqua in id non libere allaberetur , tum vero potissimum , quia latitudinem minui oporteret , quam tamen maximam esse expedit. Debet autem latitudo summi crassitiei proportionalis , ita vt si in vna naui ratio inter latitudinem et crassitiam per experimenta fuerit determinata , eadem ratio in omnibus nauibus locum habeat. Interim gubernaculo in infima parte maior latitudo tribuitur , quam in superiori , eo quod hic foret inutilis , et gubernationem difficiliorem redderet.

§. 531. Exposita hac gubernaculi determinatione atque efficacia in motu nauis directo, inuestigandus est eius effectus, quem in cursu obliquo exerit; quo nauis non secundum axis longitudinalis directionem progreditur, sed ab ea parumper declinat; qui cursus, si nauis velorum ope aduersus ventum propellitur, maxime est frequens. Haec vero declinatio vulgo angulum 15° excedere non solet, nisi forte vndarum impetus a latere venientium hanc declinationem maiorem reddit. Eiusmodi igitur motu obliquo aqua non in directione spinæ ad gubernaculum allicit, sed in directione fere contraria ei, quam nauis tenet. Atque hoc casu latera nauis aquam ex ea regione in quam nauis declinat, minus istam directionem perturbant, quam in motu directo, contra autem in altera regione perturbatio fit eo maior.

Tab. XIII.
fig. 1.

§. 532. Ponamus igitur nauem in aqua cursu obliquo ferri in directione GP , seu quod eodem redit, aquam contra nauem quiescentem $AEBf$ impingere in directione PG . Ducantur rectæ Qe et Rf latera nauis stringentes in e et f , ac parallelæ directioni PG erit eAf portio superficiei nauis impulsam aquæ sustinens. Quamobrem ut nauis in quiete persistere queat, necesse est, ut a vi aequali et contraria ei, qua aqua impingit, sollicitetur. Cum autem vis aquæ non solum nauem propellere, sed etiam circa axem verticalem conuertere conetur, nisi eius media directio per hunc ipsum axem verticalem G in centro gravitatis G traiectum transeat, vis quoque nauem in quiete conseruans istam aquæ vim respectu vtriusque effectus destruere debet. Haecque similiter se habent, si nauis in aqua quiescente secundum directionem obliquam GP progredia-

grediatur; retineamus autem ideam navis quiescentis in aqua mota.

§ 533. Urgeatur itaque navis ab eiusmodi vi, ut in perfecta quiete conferuetur; atque consideremus gubernaculum BC in situ directo detentum. A parte igitur *f*, in quam aquae cursus obliquus vergit, aqua in gubernaculum BC irruet secundum directionem *pC* fere parallelam directioni *Rf* seu *PG*, neque angulus *BCp* multum excedet angulum *AGP*, quoniam directio laterum navis *fB*, quam cursus aquae versus puppim sequitur, multo minus a directione *Rf* deflectit, quam in cursu directo fieri solet. Quodsi ergo haec vis gubernaculum agitans sola adesset, tum ea gubernaculum BC versus plagam *d'* conuerteret, donec eius directio parallela fieret directioni *pC*. Sin autem gubernaculum BC in situ hoc directo firmiter detineretur, tum ab ista vi aquae resularet momentum totam nauim circa axem verticalem per eius centrum grauitatis *G* transeuntem conuertens, quo prora *A* versus *r* gyraretur, nauisque ad cursum directum impelleretur.

§ 534. Respiciamus nunc autem ad motum aquae ex altera parte *e* ad gubernaculum allabentis. Ac primo quidem perspicuum est, propter nimiam laterum navis *eB* a cursu aquae deflexionem, motum aquae haec latera sequi non posse. Relinquetur ergo prope gubernaculum in *B* copia aquae stagnantis: et, si haec aqua gubernaculum BC stringat, eius vis erit valde exigua, cum propter obliquitatem, tum etiam ob tarditatem. Ex quibus colligitur, aquam ex parte *eL* allabentem multo fore debiliorem, quam quae ex parte opposita *f* impingit, ideo-

que gubernaculum hoc casu sibi relictum in situ directo BC non persistet, sed declinabit in situm Bc , in quo vires utrinque urgentes sese in aequilibrio teneant. Quo minor itaque fuerit vis aquae ex parte e venientis, eo propius situs aequilibræ Bc ad parallelismum cum directione pC accedet: denotet autem eLd fluxum aquae a parte e puppim versus currentis.

§. 535. Quando igitur vires nauem sollicitantes in aequilibrio fuerint cum vi aquae in partem anticam eAf irruentis, navis in quiete manere nequit, nisi gubernaculum in situ obliquo Bc detineatur, ubi vires id sollicitantes vel sunt nullae, vel se inuicem destruunt. In hoc scilicet situ ad gubernaculum detinendum nulla omnino opus erit vi, hincque sponte in eo permanebit. Perpetuo enim obseruandum est, vim gubernaculi ad nauem conuertendam proportionalem esse illi vi, quae ad gubernaculum in situ conseruandum requiritur; quae si fuerit nulla, ita ut gubernaculum sponte in situ suo persistat, nulla in naui rotatio oriri potest. Sit igitur Bc situs aequilibræ gubernaculi pro cursus obliquitate PG proposita, in quo gubernaculum relinquendum est, si quidem navis cursum suum inuariatum conseruare debeat, translatis scilicet istis ad nauem in aqua quiescente oblique motam.

§. 536. Cum igitur sit Bc gubernaculi situs aequilibræ, si proram A versus r conuertere velimus, gubernaculum in eandem plagam versus D est conuertendum: atque hac conuersione actio satis efficax oriri debet. Ponamus enim gubernaculum in situ BD detineri, ac primo quidem constat ex regione L nullam affore vim in gubernaculum agentem, quae proinde vim ex altera parte

te p allidentem imminuat. Hinc autem vis aquae in directione pM affluentis minime impeditur, cum in hac parte non solum nulla sit aqua mortua sed etiam fluuius Rf pleno cursu in gubernaculum irruat. Leuiori igitur opera in eiusmodi cursu obliquo naus per Ar conuertitur, quam in cursu directo, vbi tam aqua mortua prope puppim, quam cursus aquae ob laterum nauis conuergentiam multum declinatus ac debilitatus effectum gubernaculi lentio-rem reddit.

§. 537. Vicissim autem perspicuum est, si gubernaculum in oppositum situm puta in Bd dirigatur, tum eius effectum multo fore debiliorem, ac non nunquam prorsus nullum. Quoniam enim aqua ex parte pC fluens gubernaculum non stringit, eo, quod situs Bc directioni pC iam fere est parallelus, tamen vis aquae eLd , siquidem in gubernaculum impingit, vehementer erit exigua, quoniam in regione B aqua maximam partem est tranquilla, et, si aqua eLd vllum habet cursum, eum admodum lentum esse oportebit. Quo magis enim cursus aquae a cursu naturali Qe deflectit, eo erit tardior, atque ad gubernaculum agitandum debilior. Quin etiam euenire potest, vt gubernaculum quantumuis in regionem Bd inclinetur, nullam omnino ab aqua vim sustineat, sed in aqua tranquilla versetur. Hanc ob rem igitur in cursu obliquo nauis difficulter in regionem Aq vertetur; hoc est cursus obliquitas ope gubernaculi non tam facile augetur, quam diminuitur.

§. 538. Quando igitur nauis in fluuio oblique posita abripitur, ad quem casum ratiocinium potissimum accommodauimus, tum nauis quidem hanc obliquitatem AGP constanter sine gubernaculi actione conseruabit, si media directio

directio impetus aquae in partem eAf facti per axem verticalem per centrum grauitatis nauis G ductum transeat: etiam si interim ad ripam versus q sitam appellatur. At vero nauis facillime hanc obliquitatem vel augendo vel diminuendo amittet, ita vt ad eius restitutionem gubernaculo sit opus. Ex praecedentibus autem manifestum est, si obliquitas casu maior fuerit facta, tum gubernaculi ope eam facillime minorem reddi, atque in pristinum situm restitui posse. Sin autem casu nauis propius ad situm directum sese applicuerit, tum difficulter ea ab hoc situ remouebitur, ac versus q declinabitur, vt pristinam obliquitatem recuperet. Aliter vero res se habet, si media impetus aquae directio non per axem verticalem centrum grauitatis G traicientem transeat.

§. 539. Si enim media directo impetus aquae propius ad proram A per sectionem verticalem nauis secundum longitudinem AB factam transeat, tum ipsa aquae vis conabitur nauem versus q conuertere, quae ergo vis, nisi sit nimis magna, ope gubernaculi in situm BD directi reprimi poterit. Sin autem media directio impetus aquae in partem eAf allabentis pone centrum grauitatis puppim versus planum diametrale nauis, traiciat, tum eius vis tendet ad nauem versus Ar conuentendam, qui adeo effectus ope gubernaculi multo minus compefci poterit. Hoc igitur casu nauis mox ad situm directum redigetur, e quo difficulter gubernaculo ad pristinam obliquitatem declinabitur. Si nauis praeterea viribus externis ad motum sollicitetur, tum in hoc iudicio insuper ratio est habenda mediae directionis harum virium atque ipsius motus nauis iam impressi; qua de re consuli possunt, quae

quae in superiori libro de motu nauium propulsarum tradita sunt.

§. 540. Maxime autem eiusmodi cursus obliquus institui solet, si naues aduersus ventum velorum ope propelli debent, eiusmodi enim cursus naui induci nequit, nisi simul nauis oblique scilicet secundum directionem GP progrediatur. Ponamus ergo ventum ex plaga VG spirare, et nauem in directione GP progredi, ita vt impetus seu resistentia aquae in partem *eAf* exeratur, cuius mediam directionem primum per ipsum axem G transire ponamus. Quodsi ergo vis venti a velis exceptae media directio per eundem axem transeat, omnis nauis conuersio a gubernaculo pendeat. Facile igitur nauis in plagam *Ar* conuertetur, hoc est cursus a vento remouetur; difficillime autem in directionem *Aq* aduersus ventum applicatur. Haecque pariter locum habent, si mediae directiones tam virium propellentium, quam resistentiae aquae per alium quemcunque axem verticalem simul transeunt, tum enim earum momentum ad nauem conuertendam euanescit, totumque conuersionis negotium gubernaculo relinquitur.

§. 541. Ponamus iam mediam directionem virium propellentium ad proram A propius incidere, quam mediam directionem resistentiae aquae. Propter aequalitatem igitur harum virium, quae in motu vniformi locum obtinet, nauis in directione *Ar* conuertetur, qui effectus, quamuis sit exiguus, per gubernaculum impediri nequit: oporteret enim gubernaculum in situm BL declinari, in quo eius effectus est vehementer debilis. Euenit hoc incommodum si vela anteriora praeualeant posterioribus, hocque casu nauis continuo magis a directione venti VG repellitur, aucto

angulo VGA ; neque gubernaculi ope ista depulsio a vento impediri poterit. Hoc ergo incommodum aliter tolli non poterit, nisi velis posterioribus maiorem vim tribuendo, ut viriam a vento exceptarum media directio propius versus puppim transferatur.

§. 542. Tantopere ergo vel vela posteriora augeantur vel anteriora diminuantur, ut media directio vis venti magis puppim versus vergat, quam media directio resistentiae aquae. Orietur itaque hinc momentum tendens ad nauem in directione Aq ad ventum conuertendam: quae vis, nisi sit nimis magna ope gubernaculi destrui poterit, dum id in situ BD detinetur. Quodsi autem ab undis aliove accidente prora A , a vento puta, r versus detorqueatur; quoniam gubernaculum per se ineptum est ad hanc remotionem tollendam, id per ipsam vim venti fiet, dummodo gubernaculum in situ aequilibrü Bc relinquatur. Tantum igitur abest, ut ista velorum dispositio, qua posteriora anterioribus praeualent, damnum afferat, ut per eam potius inertiae gubernaculi, seu difficultati nauem ad versus ventum dirigendi maxime conuenienter occurratur.

§. 543. Incommodum hoc gubernaculi in cursu obliquo, pariter ac eius remedium probe cognitum est nauis; qui bene cauent, ne velis anterioribus nimiam venti vim concedant. Experientia enim ipsos docuit, si velis anterioribus plus iusto vtantur, nauem a vento depelli, neque gubernaculum sufficere ad nauem in debita directione continendam. Eousque igitur vela puppis multiplicant, seu prae his vela prorae contrahunt, donec vim obtineant nauem aduersus ventum dirigentem, quae si casu nauis a vento detrudatur, ipsa par sit naui in debitum
si-

situm restituendae ; deficiente hoc casu gubernaculi ministerio. Neque tamen nimis vela posteriora velis anterioribus praeualere debent , ne vis nauem aduersus ventum vertens tantopere augeatur , vt a gubernaculo eius actio impediri nequeat. Expediet autem hanc praeualentiam quam minimam statui , quae tantum sufficiat ad gubernaculi defectum emendandum.

§. 544. Quanquam haec tenus axem , circa quem gubernaculum conuertitur , verticalem assumimus , tamen facile perspicitur , eadem valere , tam quae de actione gubernaculi in cursu directo proposuimus , quam in cursu obliquo , siquidem axis ille situs non enormiter a situ verticali discrepat. Atque si vllum deprehendatur discrimen , id totum in quantitate actionis gubernaculi ad datum angulum declinati versabitur ; hocque nomine alius quoque angulus declinationis resultabit , sub quo gubernaculum promissimum exeret effectum. Quamobrem ne hanc partem praetermittamus , in effectum , quem gubernaculum mobile circa axem ad horizontem inclinatum producit diligentius inquiremus ; atque in hoc negotio , quo facilius absolui possit , cursum nauis directum assumemus , simulque aquam in directione spinae nauis contra gubernaculum irruere ponemus.

§. 545. Repraesentet igitur planum chartae sectionem nauis verticalem secundum spinam factam , sitque recta AC horizontalis a prora ad puppim ducta , que simul exhibeat directionem aquae in gubernaculum allidentis. Sit recta BD axis ille obliquus , circa quem gubernaculum BHID mobile existat , faciens cum horizontali AC angulum ACB superne obtusum , infra autem ACD

Tab. XVII.
fig. 2.

acutum ; Sit porro gubernaculum BHID in eodem plano verticali situm , ita vt hoc statu sit in situ aequilibræ vt-
rinque ab aqua nullam vim sentiens ; ex qua momentum
ad nauem conuertendam nascatur. Eiusmodi autem situs
inclinatus gubernaculo in nauibus actu tribui solet , pro-
pterea quod superior nauium pars multum in puppi ultra
spînam prominet , ex quo necesse est , vt axis BD deor-
sum ad proram vergat , atque exterior gubernaculi mar-
go HI fere fiat verticalis , quoniam gubernaculum inferius
latius est quam superius. Quando autem in cursu pro-
nauis magis demergitur quam puppis , inclinatio illa axis
BD fit minor.

§. 546. Conuertatur iam gubernaculum BHID ex
situ aequilibræ in situm *Bbid* , atque si ante termini gu-
bernaculi BH et DI fuerunt horizontales , nunc erunt *Bb*
et *Di* ad horizontem inclinati , dum extremitates *b* et *i*
ascenderunt. Cum igitur temo , quo gubernaculum dirigi-
tur , directionem HB productam sequatur , eius manubrium
in naui descendit , dum gubernaculum conuertitur , ex quo
necesse est , vt super pauimento fornicato moueatur , cuius
medium altius sit , quam latera. Quoniam vero propter
alias rationes pauimentum nauis in puppi tam versus pro-
ram quam versus latera efficitur decliue , vt motus te-
monis postulat , veri simile videtur , ob hanc potissimum
rationem axem gubernaculi ad horizontem inclinari , quo
motus temonis decliuitatem superioris nauis superficiæ sequi
possit. Debet ergo ista suprema superficies , super qua
temo gyatur , esse superficies conî , cuius axis sit BD.

§. 547. Ad angulum , per quem gubernaculum ex
situ aequilibræ est conuersum , metiendum ducantur ex
puncto

puncto quocunque axis C in vtroque plano BHID et B*hi*D rectae CG et C*g* ad axem BD normales, comprehendent eae angulum GC*g* declinationi gubernaculi B*hi*D a statu aequilibrii aequalem. Cum enim recta GC sit normalis ad BD, motu rotatorio punctum G in *g* transferatur atque inclinatio duorum planorum mensuratur angulo, quem duae rectae in vtroque plano ad inter sectionem communem normaliter ductae inter se constituunt. Si igitur ex puncto G ducatur recta horizontalis GMN ipsi AC parallela, erunt lineae AC, GC, et GN in eodem plano verticali; fietque angulus CGM, aequalis angulo quo axis BD a situ verticali distat, cuius anguli igitur sinus erit = $\frac{GM}{CM}$, et cosinus = $\frac{CG}{CM}$ posito sinu toto = 1; vel anguli ACB seu ACD sinus erit = $\frac{CG}{CM}$.

§. 548. Est vero porro GC*g* planum ad axem BD normale et G*g* arcus circuli centro C descriptus, ex quo erit C*g* = CG. Deinde est etiam planum GC*g* in vtrumque gubernaculi situm BHL D et B*hi*D normale, quia normale est ad rectam BC vtrique plano communem. Quodsi ergo in hoc plano GC*g* ex G in C*g* ducatur perpendicularum GL erit haec GL normalis in planum B*hi*D; simul vero $\frac{GL}{CG}$ exprimet sinum anguli GC*g*, quo gubernaculum ex situ suo aequilibrii est remotum. Cum nunc recta GN sit parallela directioni aquae in gubernaculum incurrentis, angulus sub quo aqua in gubernaculum B*hi*D incidit, aequalis erit angulo quem recta MG cum plano B*hi*D constituit; qui angulus aequalis erit angulo CML, ducta ex L ad M recta LM. Cum enim GL sit normalis ad planum B*hi*D angulus GML exprimet inclinationem rectae GM ad planum B*hi*D.

§. 549. Quoniam recta LM in plano *BbiD* existit erit quoque GL ad ML perpendicularis, ideoque triangulum GLM rectangulum ad L. Hinc anguli GML, sub quo aqua in gubernaculum *BbiD* incurrit, sinus erit $= \frac{LG}{GH}$, cuius quadrato tota vis, quam aqua in gubernaculum exerit est proportionalis. Cum autem fit $\frac{LG}{GM} = \frac{LG}{CG} \cdot \frac{CG}{GM}$, aequabitur ille sinus producto ex finibus angulorum GCg et ACD, quorum ille declinationem gubernaculi a statu aequilibrii, hic vero inclinationem axis BD ad horizontem denotat. Vtique igitur minor est effectus gubernaculi circa axem obliquum mobilis, quam circa axem verticalem, idque in ratione sinus totius ad sinum anguli ACD. Ex quo colligitur axem BD a situ verticali admodum parum declinare debere; parua autem inclinatio parum diminuit effectum, quia angulorum a recto non multum discrepantium sinus a sinu toto sensibilibiter non differt.

§. 550. Si ergo sinum anguli ACB, quo axis gubernaculi ad horizontem inclinatur ponatur $= r$, et sinus anguli GCg per quem gubernaculum de situ aequilibrii est traductum, sit $= s$, erit sinus anguli, sub quo aqua in gubernaculum *BbiD* irruit $= rs$: ex quo vis aquae irruentis erit vt $rrss$: scilicet si superficies gubernaculi aquam excipiens ponatur $= bb$, et altitudo debita celeritati aquae $= v$, aequabitur vis aquae ponderi voluminis aquae $= bbrssv$. Cum autem volumen aquae V aequiponderet ponderi navis M, erit vis ista aquae $= \frac{Mbbrrssv}{V}$ cuius media directio transit per centrum grauitatis gubernaculi, atque ad eius superficiem est normalis. Sumamus punctum L pro centro grauitatis superficiei gubernaculi, quia recta

LG

LG est normalis ad istam superficiem, exprimet ea mediam directionem vis aquae gubernaculum vrgentis.

§. 551. Demittatur ex L in CG perpendiculum LP, quod cum futurum sit normale in planum verticale BHID erit ipsum horizontale. Resoluatur ergo vis $\frac{Mbbrrssv}{v}$ in laterales secundum directiones LP et GP, erit vis in directione horizontali LP, si quidem in puncto G applicetur $= \frac{LP}{GL} \cdot \frac{Mbbrrssv}{v} = \frac{Mbbrrssv\sqrt{(1-ss)}}{v}$. ob $\frac{LP}{GL} = \text{cosinui anguli LCG}$. Sit CL = k, erit CG = $\frac{k}{\sqrt{(1-ss)}}$; ac, si distantia puncti C ab axe verticali per centrum grauitatis nauis transeunte ponatur = a, erit distantia puncti G ab eodem axe = $a + \frac{kr}{\sqrt{(1-ss)}}$; vnde momentum vis gubernaculi ad nauem convertendam erit = $\frac{Mbbrrssv\sqrt{(1-ss)}}{v} (a + \frac{kr}{\sqrt{(1-ss)}})$; quod itaque eo minus est, quo angulus ACD magis a recto discrepat atque si angulus ACD fuerit semirectus, momentum hoc duplo fit minus. Haecque igitur ad effectum gubernaculi circa axem obliquum mobilis cognoscendum sufficiunt.



Cap. VII.

DE ACTIONE REMORVM.

§. 552.

In libro superiori, atque etiam in huius praecedentibus capitibus satis superque ostendimus, quantum effectum datae vires nauem sollicitantes tam ratione motus progressiui, quam rotatorii circa axem siue horizontalem siue verticalem per centrum grauitatis ductum producere debeant. Vires autem naui immediate applicatas esse assumimus, ita vt ex earum magnitudine et directione effectus, quem in naui producant, determinari queat. Quanquam vero remi in ipsis nauibus applicantur, tamen quanta vis eorum agitatione resultet ad nauem propellendam, minime liquet; neque enim vis remigum, neque ea vis, quam hypomochlium sustinet, ad nauem propellendam tantummodo impenditur. Quo igitur veram vim, quae ex remigatione oritur ad nauem mouendam, inuestigemus, a casibus simplicioribus ordiri debemus, qui tandem ad casum remigationis satis complicatum manuducant.

§. 553. Praecipua vis remorum autem a resistentia aquae, quam, dum agitantur, sentiunt, proficiscitur; si enim aqua ipsorum motui non reluctaretur, vel si remi in aere agitantur, tum perspicuum est nullam vel insensibilem vim esse orituram ad nauem propellendam. Sin autem aqua maius obstaculum agitationi remorum offerret, nullum est dubium, quin nauis celerius propellatur. Casus iste posterior locum habet, si remi non aquae sed obstaculo inuincibili innitantur, veluti ripae, vel fundo
maris

maris seu fluuii, vbi experientia testatur hoc modo naues citius moueri, quam si remi per aquam stringantur. Quocirca antequam effectum remorum contra obstaculum mobile cuius modi est aqua, definiamus, conueniet in effectum inquirere, quem remi contra obicem immobilem innitentes producere valeant; hoc enim modo nauem mouendi, quoties occasio permittit, nautae vtuntur, ex quo per se etiam euolui meretur.

§. 554. Ponamus igitur in ripa vel fundo maris fixum esse palum PQ, cui vel funes alligando vel perticas vncoſue applicando naues ad motum cieri queant. Si scilicet funis SR palo sit alligatus, isque in R ab hominibus in naui trahatur, nauis vtique ad palum accedet in directione AS. Idem accidet si pertica vnco instructa palo infigatur, similique vi in directione AR trahatur; subit enim pertica hoc casu vicem funis, atque vsurpatur, cum nauis iam tam prope ad palum accesserit, vt vnco apprehendi queat, funium autem vsus ad longiora interualla extenditur, quos lintris ope praemitti paloſque alligari vel etiam ancora firmari oportet: hocque modo naues in portibus, fluuiis, et vbicunque occasio postulat, hominum viribus protrahi solent. Homines scilicet funem apprehensum omni qua valent vi versus puppim B ducunt, sicque nauem ad palum PQ admouent, hac ergo operatione cursus a prora ad puppim toties est repetendus, quoad nauis ad locum PQ fuerit perducta.

§. 555: Ad effectum istius hominum vis, qua funem SAR versus puppim protrahunt, inuestigandum, probe notari oportet, vim hominum trahentium esse maiorem, si homines quiescunt, quam si progrediuntur; hoc enim

enim posteriori casu portio illius vis, quam homines impendunt, in ipsorum cursu consumitur. Homo namque progredi vel currere nequit, quin ad hoc vim insumat, et si tanta celeritate, qua potest, currit, nullam omnino vim ad quicquam trahendum vel trudendum impendere potest. Ponamus maximam celeritatem, quam homo libere currens sustinere potest, debitam esse altitudini α , qua si currat nullam vim in tractionem vel trusionem impendere queat. Sit autem vis, qua quiescens trahere valet, aequalis ponderi p ; veri simile est eundem hominem celeritate altitudini v debita progredientem trahere posse $v_i = p(1 - \frac{v}{\alpha})$: haec saltem hypothesis a veritate tam parum aberrabit, ut error nullius in praxi sit momenti.

§. 556. Cum homo intervallo vnus horae circiter milliare germanicum vnum currens absolueret, habebit hoc cursu celeritatem, quanta lapsu grauis ex vno pede Rhenano acquiritur; ita ut futurum sit $\alpha = 1$ pedi. Homo porro quiescens trahendo horizontaliter ingens pondus sustinere potest: quoniam vero in opere continuo in desinenter eandem vim exerere debet, loco vis p non nimis magnum pondus assumere licet; ad summum ergo pro p pondus 50 librarum accipiemus, quod autem iam nimis est magnum, si homo laborum continuo perpeti debeat, conueniet ergo, si opus sine interruptione durare debeat, pro p non maius pondus quam 30 vel 40 librarum substitui: quo in negotio autem diligenter perpendendum est, vtrum homines sint robusti, ac labori aduerti, an debiles. Interim perpetuo tutius est vires hominum nimis paruas existimare.

§ 557. His de viribus hominum aestimandis proposito, ponamus in nauis ACDB funem SAR in S fixum a ψ hominibus protrahi, quorum singuli quiescentes horizontaliter trahendo pondus p sustinere valeant. Principio igitur quo omnes trahere incipiunt eorum vis aequiualebit ponderi ψp . Ponamus autem nauem iam esse motum aequabilem consecutam, cuius celeritas debita sit altitudini v ; eadem ergo celeritate operarii versus puppim migrabunt, eritque adeo ipsorum vis ad nauem protrahendam non amplius ψp sed $\psi p (1 - \frac{v}{\alpha})$; huic igitur vi aequalis erit resistentia quam nauis in isto motu offendit: quae cum sit quadrato celeritatis hoc est ipsi altitudini v proportionalis, ponatur ea $= Rv$, eritque itaque $Rv = \psi p - \frac{\psi pv}{\alpha}$, vnde nascitur $v = \frac{\alpha \psi p}{R\alpha + \psi p}$, quae est altitudo debita celeritati, qua nauis a ψ hominibus tracta promovetur.

§. 558. Ponamus nauem tantam sufferre resistentiam, quantam pateretur superficies plana bb in aqua directe promota; eritque Rv aequale ponderi voluminis aquae bbv , atque si pondus nauis ponatur $= M$ et volumen carinae $= V$, erit vis resistentia $Rv = \frac{Mbbv}{V}$, ideoque $R = \frac{Mbb}{V}$. Hoc valore substituto inuenietur $v = \frac{Va\psi p}{Mbb\alpha + V\psi p}$; cuius radix quadrata exhibebit celeritatem qua nauis progreditur. Cum α sit altitudo vnus pedis, altitudo v in pedibus exprimat; eritque $250 \sqrt{1000} v$ spatium, quod nauis vno minuto secundo conficiet in partibus millesimis pedis expressum. Vno minuto primo ergo nauis conficiet spatium $15 \sqrt{1000} v$ pedum Rhenanorum. Per milliare ergo germanicum quod continet 24000 pedes nauis protrahetur tempore $\frac{1600}{\sqrt{1900} v}$ minutorum primorum.

§. 559. Vt hunc motum exemplo illustremus fit pondus nauis $M = 640000$ librarum erit $V = 10000$ pedum cubicorum. Sumatur $hb = 100$ pedum quadratorum, positisque $\alpha = 1$ pedi, et $p = 40$ librarum, fiet $v = \frac{\psi}{160 + \psi}$ pedum, atque nauis vno minuto primo trahetur per spatium $15 \sqrt{\frac{1000\psi}{160 + \psi}}$ pedum. Sit numerus hominum trahentium $\psi = 10$, atque nauis vno minuto primo protrahetur per spatium $= 15 \sqrt{\frac{1000}{17}} = 115$ ped. proxime. Decem igitur homines impendent tres horas cum semisse ad nauem per spatium vnus miliaris germanici protrahendam. Quadraginta autem homines eandem nauem vno minuto secundo protrahent per spatium $= 15 \sqrt{200}$ pedum, 212 pedum, et vnum milliare germanicum conficient tempore vnus horae cum 53 minutis.

§. 560. Ex hoc exemplo apparet, in nauibus grandioribus fore $\frac{Mbb\alpha}{Vp}$ numerum admodum magnum, quodsi ergo numerus hominum trahentium ψ respectu huius numeri sit valde paruus, tum proxime erit $v = \frac{V\psi p}{Mbb}$. Celeritas ergo nauis, si numerus operariorum ψ fuerit valde paruus respectu numeri $\frac{Mbb\alpha}{Vp}$, tenebit rationem subduplicatam numeri operariorum, ita vt quadruplo plures operarii nauem tantum duplo celerius promouere valeant. Quodsi autem numerus operariorum ψ propius ad numerum $\frac{Mbb\alpha}{V}$ accedat, vel ipsum etiam superet, tum in minori proportione celeritas nauis augebitur quam duplicata operariorum. Si enim numerus operariorum in infinitum vsque augeatur, fiet tantum $v = \alpha$ seu vnus pedis, atque nauis aequè celeriter progredietur, ac homo vacuus nihil gerens migrare valet. Perspicuum enim est nauis maiorem celeritatem a hominibus trahenti-

bus

bus induci non posse, quam est ea, qua nullum onus vrgentes liberi ambulare valent.

§. 561. Haec ita se habent, si operarii funem SR simpliciter nuda manu prehendentes protrahant; verum quandoque ad hoc opus machinis vtuntur, quibus quantum proficiatur, inquiramus. Ponamus igitur in naui constitutum esse axem in peritrochio mobilem circa axem C, quo circumactō funis Sa circa cylindrum a C conuoluatur, nausque versus S propellatur. Vires autem hominum applicentur axi in data distantia AC, dum machinam circa axem horizontalem C mobilem ope alius funis AR quem trahunt, circumagunt. Vel quod perinde est, si axis machinae C verticaliter fuerit constitutus, eiusmodi machina in grandioribus nauibus vsurpari solet ad ancoras eleuandas, nauem mouebunt, dum machinam ope vectium CA in A prehensorum in gyrum agunt. Vterque enim modus eodem redit, quoniam operarii celeritatem vectis in A sequi, ac proinde eadem celeritate ambulare debent.

§. 562. Si igitur, cum naus iam ope huius machinae aψ operariis agitatae motum aequabilem in directione aS fuerit nacta, celeritas naus ponatur debita altitudini v, erit vti vidimus resistentia aquae superanda = $\frac{mbbv}{y}$, tanta igitur vi funem Sa tendi oportet, quare si ratio radorum AC : aC ponatur = m:n, vis funem AR trahens debet esse = $\frac{mnbv}{\sqrt{m}}$; et quoniam punctum a circumuoluitur celeritate, naus celeritati aequali Vv, celeritas puncti A, qua operarii incedere debent erit = $\frac{m\sqrt{v}}{n}$, seu celeritas operariorum debita erit altitudini $\frac{m\sqrt{v}}{nn}$. Hinc eo-

rum vis erit $= \psi p \left(1 - \frac{m \mu v}{n n \alpha}\right)$ quae id circo aequalis esse debet vi $\frac{M n b h v}{V m}$, quae ad tensionem funis AR requiritur. Ex quo habebitur aequatio $\frac{M n b h v}{V m} = \psi p - \frac{m \mu \psi p v}{n n \alpha}$, quae praebebit $v = \frac{V m n n \alpha \psi p}{M n^2 a b h + V m^2 \psi p}$.

§. 563. Ex hac expressione intelligitur rationem inter $m:n$ nimis magnam [aeque esse damnosam celeri navis promotioni, ac rationem nimis parvam; siue enim sit $\frac{m}{n} = 0$, siue $\frac{m}{n} = \infty$, utroque casu celeritas navis evanescit. Ex quo perspicuum est dari rationem inter m et n finitam, quae naui maximam celeritatem inducat. Ad eam inueniendam ponamus $\frac{m}{n} = z$, atque oportebit hanc expressionem $\frac{V \alpha \psi p z}{M a b h + V \psi p z^3}$ maximam fieri, id quod euenit, si sumatur $z^3 = \frac{M a b h}{2 V \psi p}$ siue $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\frac{M a b h}{2 V \psi p}}$. Qui valor in expressione ipsius v substitutus dat $v = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{4 V^2 \alpha \psi^2 p^2}{M^2 h}}$, unde erit celeritas ipsa $V \cdot v = \sqrt[3]{\frac{2 V \psi p V \alpha}{3 M b h}}$, ex qua formula spatium, per quod naus dato tempore protrahetur, assignari potest.

§. 564. Si volumen V in pedibus cubicis exprimat erit $M = 64 V$ librarum: unde prodit $v = \frac{m n n \alpha \psi p}{64 n^3 a b h + m^3 \psi p}$. Sumatur pro p pondus 32 librarum, et cum sit α vnius pedis, exprimat superficies $h h$ in pedibus quadratis, eritque $v = \frac{m n n \psi}{2 n^3 m b h + m^3 \psi}$ pedum. Quamobrem naus vno minuto primo protrahetur per spatium $15 \sqrt[3]{\frac{1000 m n \psi}{2 n^3 b h + m^3 \psi}}$ pedum; in qua expressione tantum tres insunt quantitates a circumstantiis pendentes, nempe numerus hominum ψ ; ratio inter radios machinae seu ergatae $AC : aC = m : n$; ac planum $h h$, quod in aqua, directe motum, parem

parem cum naui suffert celeritatem, Erit ergo hb minor quam sectio carinae transuersa, quoniam conuergentia laterum resistentia diminuitur. Satis prope ergo valor hb aestimando colligi poterit, qui in nostra expressione secundum pedes quadratos determinari debet.

§. 565. Quod ad quantitates ψ et hb attinet, perspicitur celeritatem nauis ab aucto numero operariorum ψ augeri, contra vero ab aucta resistentia seu valore hb diminui. Ratio autem $m:n$ uti vidimus celeritatem aequae augere ac diminuere valet, nauis enim promptissime pro-

trahetur, si statuatur $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\frac{hb}{\psi}}$, substitutis valoribus, quos modo assumimus, veritati satis consentaneis. Ista autem ratione inter m et n obseruata celeritas nauis debita erit

altitudini $\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\psi\psi}{b^2}}$ ped. atque ipsa celeritas ista maxima erit $= \sqrt[3]{\frac{\psi}{3hb\sqrt{3}}}$, siue nauis hoc modo vnus minuti primi spatii

promouebitur per $15 \sqrt[3]{333} \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\psi\psi}{b^2}}$ pedes seu per $273 \frac{861}{1000} \sqrt[3]{\frac{\psi}{hb}}$ pedes, si quidem superficies hb in pedibus quadratis exprimatur.

§. 566. Cum sit $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\frac{hb}{\psi}}$, intelligitur si numeris hominum operantium ψ aequalis fuerit numero pedum quadratorum in plano hb contentorum, tum ob $\frac{m}{n} = 1$ nauem sine ergatae ministerio celerrime protractum iri; hocque casu operarii cum maximo lucro vires suas impendunt, si funem Sa immediateprehendant ac protrahant. Reliquis casibus expediet machina, seu ergata uti: Si enim, quod semper vsu venire solet, numerus hominum ψ minor fuerit quam hb , tum prodit $m > n$,
ita

ita vt his casibus ergata commodissime vti liceat ; cuius ope promptissimus adeo exeretur effectus, si statuatur $CA : Ca = \sqrt[3]{bb} : \sqrt[3]{\psi}$. Atque si ista dispositio maxime lucrosa obferuetur, erit pro diuerso operariorum numero eandem nauem trahentium celeritas nauis in ratione subtriplicata numeri operariorum.

§. 567. Si nulla machina adhibeatur seu sit $\frac{m}{n} = 1$, erit $v = \frac{\psi}{2bb + \psi}$, sin autem ergata maxime idonea quam

descripsimus vsurpetur, erit $v = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\psi\psi}{bb}}$ quae expressio semper maior est quam illa, nisi sit $\psi = bb$. Illo autem casu nauis vno minuto primo per spatium $15 \sqrt[3]{\frac{1000\psi}{2bb + \psi}}$ pedum, hoc vero per spatium $273 \frac{861}{1000} \sqrt[3]{\frac{\psi}{bb}}$ pedum promouetur. Vt discrimen clarius percipiatur, ponamus esse $bb = 100$. ped. quadr. atque numerum operariorum $\psi = 10$; nauis igitur sine machina protrahetur per spatium 103. pedum. Sin autem ergata maxime idonea adhibeatur in qua sit $CA : Ca = \sqrt[5]{10} : 1 = 21544 ; 10000$, tum nauis vno minuto primo protrahetur per spatium 127. pedum. Ope machinae igitur nauis vno minuto per spatium 24. pedibus maius, et vna hora per spatium 1440. pedibus maius protrahetur quam sine machina, quod discrimen satis est notabile.

Tab. XVII.
fig. 3.

§. 568. Quae hic de promotione nauis, dum funis SR ab hominibus in R versus puppim B protrahitur, dicta sunt, eadem quoque valent, si loco funis pertica vnco instructa adhibeatur; dum enim vnco palo PQ infixio pertica trahitur, nauis pariter ad palum admouebitur, ac
si

si funis fuisset adhibitus. Quodsi autem pertica RS contra palum applicata in directione RS protrudatur, tum nauis a palo remouebitur, idque eadem celeritate ac si aequali ope funis ad palum admota esset. Cum enim palus omni motui resistat, vis qua pertica in directione RS truditur eundem praestabit effectum, ac si nauis pari vi in directione SR propelleretur. Atque si numerus hominum perticam trudentium sit $= \psi$, atque bb sit planum motu directo eandem resistantiam, quam nauis patiens, idque in pedibus quadratis exprimatur, erit celeritas, qua nauis in directione AR a palo remouebitur, debita altitudini $\frac{\psi}{abb+\psi}$ pedum.

§. 569. Quando nautae ad fundum aquae pertingere possunt, perticam RS ipsi in S oblique infigunt, et contra R huic perticae innitendo nauem in directione ba promouent. Quanta enim vi homo in naui constitutus perticae RS incumbit, eamque contra fundum S vrget, tanta vi ipse homo in directione Rr repellitur. Quatenus autem ab hac vi sursum in directione Rt eleuatur, iste effectus in solum hominem redundat, neque nauis alium effectum hinc sentit, nisi quod eius pondus ea hominis parte, quam pertica sustinet, minuatur. Altera autem vis in directione horizontali Ru tota ad nauem propellendam impenditur, siquidem homo contra pavementum nauis innitendo pedibus hanc vim in nauem transferat. Ad hanc vim determinandam sit vis, qua homo virgae RS incumbit, $=$ ponderi p , atque anguli REa , quo inclinatio perticae ad horizontem indicatur, sinus sit $= m$ cofinus $= n$; hinc per resolutionem fit vis in directione $Rt = mp$, qua pondus hominis ipsiusque nauis subleuatur,

Tab. XVII.
fig. 5.

Pars II.

P p

altera

altera autem vis Ru qua naus promouetur erit $= np$.

§. 570. Vim autem, qua homo perticae in directione RS inniti valet, hoc modo colligere poterimus. Sit pondus hominis proprium $= q$, ac manifestum est, si pertica haberet situm verticalem, tum hominem toto hoc pondere q perticae incumbere posse; perticae ergo inclinatae RS ponderis tantum sui parte mq inniti poterit. At praeter pondus proprium homo pollet vi horizontaliter vel trahendi vel trudendi, quae, si sit in quiete, ponatur $= p$, pro quo pondere ante 30 vel 40 libras assumimus, si autem progrediatur celeritate altitudini v debita, erit ea vis $= p(1 - \frac{v}{\alpha})$ denotante $\sqrt{\alpha}$ maximam celeritatem, qua homo vacuus currere valet, ubi α est altitudo vnus circiter pedis. Quoniam vero hac vi in perticam oblique agit, eius portionem $np(1 - \frac{v}{\alpha})$ in directione RS impendit. Vtraque ergo vi homo perticam in directione RS vrgebit vi $= mq + np(1 - \frac{v}{\alpha})$; ac tanta vi homo in directione Rr vrgebitur, si quidem v sit altitudo debita celeritati, qua homo progreditur.

§ 571. Quia autem homo incumbens perticae RS tanta vi, eadem celeritate, qua naus progreditur, ambulare debet, ponamus v esse altitudinem celeritati naus iam acquisitae debitam; qua vniformiter iam procedat; atque superficies naus tantam patiatur resistentiam, quantum superficies plana bb eadem celeritate directe in aqua mota; erit ergo vis ad nauem promouendam requisita $= \frac{mbbv}{v}$. Naus autem in directione horizontali Ru propellitur vi $= mnq + nnp(1 - \frac{v}{\alpha})$; ex quo habebitur ista aequatio

quatio $\frac{Mbbv}{V} = mnq + nnp - \frac{nnpv}{\alpha}$; quae ergo dat $v = \frac{V\alpha(mnq + nnp)}{Mbb\alpha + Vnnp}$. Cum α sit vnus pedis, si bb in pedibus quadratis exprimamus, ponamusque $p = 32$ libr. et $q = 128$ libr. (conueniet enim pondera nimis parua accipere) fiet $v = \frac{4mn + nn}{2bb + nn}$ pedibus, atque $15 \sqrt{\frac{1000(4mn + nn)}{2bb + nn}}$ dabit numerum pedum vno minuto percurforum.

§. 572. Si plures homines simili modo perticis in-
nitantur tum nauem vtique celerius propellent; ponamus
numerum hominum esse $= \psi$, atque omnes perticis ae-
qualiter ad horizontem inclinatis incumbere; prodibit ce-
leritas nauis vniformis debita altitudini $v = \frac{(mn + nn)\psi}{2bb + nn\psi}$ ped.
Quoniam maximus valor ipsius nn est $= 1$, patet nume-
rum $nn\psi$ semper fore valde paruum respectu numeri
 $2bb$; ex quo erit proxime $v = \frac{(4mn + nn)\psi}{2bb}$: ex cuius con-
sideratione intelligitur, dari certum quendam angulum REa ,
sub quo vis hominum maximam celeritatem nauis inducat.
Fit enim ob $nn + mm = 1$ haec formula $4mn + nn$
maximum si sumatur $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$, quae dat angulum REa
 $= 37^\circ, 59'$; eritque $m = \frac{\sqrt{17}-1}{\sqrt{(34-2\sqrt{17})}}$ et $n = \frac{4}{\sqrt{(34-2\sqrt{17})}}$; vn-
de oritur $v = \frac{(\sqrt{17}+1)}{4bb} = 1, 2008 \cdot \frac{\psi}{bb}$, ita vt hoc modo
nauis vno minuto propelli debeat per spatium $536, 82$
 $\sqrt{\frac{\psi}{bb}}$ pedum. Celerius igitur hoc pacto nauis propellitur
quam per tractionem funis horizontalis, quippe qua sub
iisdem conditionibus nauis propellitur per spatium $335,$
 $40 \sqrt{\frac{\psi}{bb}}$ pedum.

§. 573. Haecenus autem non attendimus vires hemi-
num verticales et horizontales ita inter se comparatas esse
oportere, vt per eas perticae eadem obliquitas conferue-

tur ; cum enim pertica circa S sit mobilis , nisi virium momenta respectu S se destruant , ipsa pertica circa S mouebitur , quo fieret , vt minor pars ad motum nauis impenderetur. Hancobrem debebit esse $nq = mp$; quoniam igitur q ipsum hominis pondus excedere nequit , quod tantum 128 librarum assumimus ; atque vis horizontalis p vltra 40 aut 50 libras accipi nequit , necesse est vt tam $\frac{mp}{n}$ non excedat q , quam $\frac{nq}{m}$ non excedat p . Scilicet si angulus REa fuerit semirectus et $m = n$, fit $q = p$; hoc ergo casu maior ponderis hominis pars , quam quae aequalis est vi p impendi nequit ; eritque adeo tam q quam p tantum 40 circiter librarum. His obseruatis ob $nq = mp$ fiet $mq + np = \frac{p^2}{n}$; hincque oritur $v = \frac{v\alpha p}{\sqrt{mb\alpha + vnp}}$, ita vt obliquitas perticae motum nauis eatenus tantum acceleret , quatenus in denominatore terminus \sqrt{vnp} ob $nn < 1$ minor redditur.

Tab. XVII.
fig. 3.

§. 574. Proficiscitur vtique iste effectus , quo nauis tam ope funis tracti , quam perticae trusae propellitur , a reactione , quae actioni perpetuo est aequalis. Quanta enim vi funis SR in S fixus trahitur , in directione SR , tanta vi ipse funis retrahit in directione RS , hacque vi nauis , quia est mobilis versus palam PQ vrgetur. Similique modo si RS fuerit virga seu pertica rigida , quae in S applicata trudatur secundum directionem RS , tum eadem tanta vi in directione contraria SR repellet , nauemque a palo remouebit. Quantumuis autem hoc principium reactionis sit certum , tamen genuina ac propria vis nauem immediate mouens in actione pedum hominis trahentis seu trudentis , est sita. Dum enim homo manibus
funem

funem in R prehensum versus puppim B trahit, tum pedibus proram versus renitur, quae vis cum immediate nauis fit applicata, eam propellit. Manifestum autem est, vtrouis modo actio consideretur, eandem vim resultare nauem mouentem, ita vt alter modus alterum confirmet, atque effectum actionis, quem determinauimus, magis corroboret.

§. 575. Accedamus iam propius ad institutum huius Tab. XVII.
fig. 6. capitis quo actionem remorum in aqua vibratorum inuestigare proposuimus: et ne mobilitas aquae nimiam initio pariat difficultatem, remum ROS non aquae sed obici firmo MN inniti ponamus. Repraesentetur igitur remus linea recta RS quae primum mobilis fit circa punctum fixum S, tum vero etiam hypomochlium O in ora nauis sit positum, circa quod, etsi est mobile, ipsa nauis conuerti potest; ita vt primo nauis cum remo motum communem circa S; deinde vero sola nauis motum proprium circa O recipere queat. Trahat remex in R remum in directione RP manibus vi quapiam, atque manifestum est, remigem aequali vi pedibus nauem in directione contraria PR repellere debere. Hoc igitur casu remus in directione RP certa quadam vi ea scilicet quam remex exercet, sollicitabitur. Simul vero nauis in directione contraria PR eadem vi repelletur: quantus igitur effectus ab his duabus viribus ad motum nauis resultet, inuestigari oportet.

§. 576. Perpicuum iam primum est, si nauis cum remo vnum corpus inflexile constitueret, ita vt circa O nullus nauis motus oriri queat, quod eueniret si remi pars OR in nauis firmiter affigeretur, hoc casu inquam

perspicuum est, quantacunque vis a remige impendatur, nullum omnino motum oriri posse. Alius enim motus tum locum habere nequit praeter rotatorium circa punctum fixum S ; at respectu huius puncti S momenta duarum illarum virium, inter se aequalium et contrariarum, se penitus destruant, ita vt ab illis nullus motus circa S oriri queat. Quodsi autem remum tantum loco suo fixum ponamus, ita vt alius motus oriri nequeat, nisi rotatorius naus circa hypomochlium O , tum vis remigis manu remum in directione RP trahentis, ob remum immobilem, nullum omnino effectum producet, vis autem contraria, qua pedibus renititur, nauem circa O secundum plagam AEB conuertet, qui motus cognoscetur ex momento vis PR respectu puncti fixi O . Hoc ergo casu naus, cuius prora in A , regredietur potius quam progredietur.

§. 577. Dum autem hoc casu naus circa punctum fixum O conuertitur in plagam AEO , necesse est vt punctum O vim sustineat, quae id prorsum trudere conetur, vti euenit in omni motu rotatorio circa axem fixum. Hancobrem si remo mobilitas circa S iterum concedatur, ita vt punctum O fiat mobile, tum illa vis effectum suum actu exeret, punctumque O vna cum nauis circa S in directione RP circumaget. Inducetur ergo hoc pacto nauis duplex motus, primum nempe rotatorius circa hypomochium O in plagam AEB ; ac deinde insuper motus circa punctum fixum S in plagam contrariam BEA , quo duplici motu naus omnino promouebitur. Cum igitur iste motus ex duplici motu angulari fit compositus, binique sint axes in S et O circa quos motus existere queat, inuestigatio motus nauis hinc oriundi altioris est
inda-

indaginis, neque ope principiorum hactenus ad motum nauium a datis viribus ortum determinandum adhibitorum definiri poterit: ex quo maiori cura huic inquisitioni erit incumbendum.

§. 578. Sit ergo virga rigida RS mobilis circa axem fixum S , quem perpendicularem ad planum figuræ concipiamus, cum hac autem virga in O ita connectum fit corpus AB , ut id circa axem ad planum figuræ pariter normalem, qui per O transeat, libere gyrrari queat: perspicuum enim est casum nauis, quem finximus, huc redire. Iam antequam vires, quibus corpus actu sollicitatur, atque ad motum incitatur, perpendamus, inquiramus generatim in motum, qui in corpus cadere queat. Ac primo quidem virga RS alium motum præter angularem circa axem S recipere nequit, perueniat itaque angulo RSr confecto in situm Sor , si igitur corpus AB non effet mobile circa O , motum virgæ perfectissime sequi deberet, ita ut totum corpus aequali motu angulari circa axem S feratur: puncta scilicet O , R , V , quæ hoc casu æque ad corpus ac virgam pertinent transferentur in o , r , v , ita ut sit $So = SO$; $Sr = SR$; et $Sv = SV$.

§. 579. Tribuamus nunc corpori AB mobilitatem circa axem O , qui, quia virgæ motum necessario sequitur, priori motu translatus est in o . Gyretur ergo interea, dum virga RS motu angulari RSr in situm proximum RSr peruenit, corpus AB angulo quocunque circa axem o ; ita ut linea ov , quatenus ad corpus refertur, confecto angulo ovV circa axem o perueniat in situm oV . Hæcque itaque recta oV alicubi fecabit rectam SR productam

Tab. XVIII.
fig. 1.

ductam in puncto V , hocque punctum V , quatenus ad corpus AB refertur, situm suum prorsus non mutabit; etsi enim motu angulari circa axem S transfertur in v , tamen motu angulari corporis circa axem O iterum in pristinum locum V restituitur. Cum igitur in hoc motu generali, qui omnes motus possibiles in se complectitur punctum corporis V quiescat, punctumque O in o transferatur, perspicuum est corporis AB motum eundem omnino fore, ac si corpus circa axem fixum V motu angulari OV_o ferretur interea, dum virga RS motu angulari RSr circa axem fixum S promouetur.

§. 580. Quoniam igitur corpus AB circa axem fixum V motu angulari OV_o transfertur, videamus quanta vi opus sit ad motum hunc in corpore AB generandum. Dum autem corporis punctum O spatium Oo percurrit, assignari poterit spatium, quod quaevis corporis particula interea absolueret debet; atque hinc vis acceleratrix ex eaque porro vis motrix ad quamvis particulam movendam determinatur. Erit scilicet vis acceleratrix cuiusvis particulae proportionalis spatio percurrendo seu ipsi distantiae ab axe V , eiusque directio normalis erit ad hanc distantiam. Vis acceleratrix autem in massam cuiusque particulae ducta dabit vim motricem. Quodsi ergo singulae istae vires colligantur resultabit vis ipsis omnibus aequalens, cuius tam quantitas quam directio debet determinari; quae inuestigatio etsi ex principiis staticis potest expediri, tamen ea succinctius absoluetur ex iis, quae supra de motu angulari cuiusvis corporis circa axem fixum tradidimus.

§. 581. Quod primum ad directionem istius vis ad motum angularem circa axem fixum V producendum requisitae attinet, ea perpetuo eadem apprehenditur, siue motus sit incitator siue remissior. Ad eam definiendam considerari debet corporis centrum grauitatis, quod sit in G , ex quo ad axem V ducatur normalis GV , eritque directio illius vis quaesita normalis ad hanc rectam VG productam. Sit massa seu pondus totius corporis $AB = M$, eiusque momentum inertiae respectu axis per centrum grauitatis G ducti $= Mhb$: quo cognito sumatur in VG producta $GT = \frac{hb}{vG}$; eritque T punctum applicationis vis illius quaesitae; ideoque si ducatur TQ normalis ad VT , erit TQ directio vis, quae in corpore AB motum angularem circa axem V producere valet. Quantitas autem huius vis ex effectu debet colligi, qui cum sit etiamnunc incognitus, ponamus vim istam in directione TQ sollicitantem $= Q$.

§. 582. Cum autem quantitas huius motus angularis a viribus, quibus corpus actu sollicitatur pendeat, necesse est, vt vis ista Q in directione TQ sollicitans aequiualeat viribus corpus actu sollicitantibus; Quamobrem si loco huius vis Q corpori applicata concipiatur vis aequalis at in contrariam plagam sollicitans, ista vis cum viribus corpus actu sollicitantibus in aequilibrio consistet, seu corpus in perfecta quiete conseruabit; vnde tam quantitas huius vis Q , quam positio axis V , a qua punctum T pendet, determinabitur. Assumo hic autem virgam RS inertiae expertem, ita vt ad eam circa axem S mouendam nulla vi opus sit: si enim inertia remi RS quoque in computum duci debeat, quod deinceps faciemus, etiam vis ad

Pars II.

Qq

eum

eum in situm *Sr* promouendum requisita considerari debet, cuius opposita simul cum ea, quae vi *Q* opponitur effectum virium actu sollicitantium destruet.

§. 583. Quoniam igitur duplex motus rotatorius possibilis est, nempe circa axes *S* et *O*, necesse est vt momenta virium actu sollicitantium respectu horum axium aequalia sint momentis ex vi $TQ=Q$ oriundis respectu eorundem axium. At vis $TQ=Q$ momentum respectu axis *O* est $=Q \cdot OQ \cdot \sin. A \cdot OQT = \frac{Q \cdot OQ \cdot HV}{GV}$; atque momentum respectu axis *S* est $=Q \cdot QS \cdot \sin. A \cdot TQS = \frac{Q \cdot QS \cdot HV}{GV}$. Illud momentum ergo tendet ad corpus *AB* circa axem *O* in sensum *AVB* conuertendum, hoc vero momentum impendetur ad corpus cum remo circa *S* in sensum *Vv* rotandum. Vterque autem effectus reducitur ad rotationem corporis circa axem imaginarium *V*: atque cognita vi *Q* et puncto *V*, motus corporis perinde ex regulis datis definitur, ac si axis *V* esset fixus. Et si enim hic axis reuera non est fixus, tamen vis *Q* corpus ita mouebit, vt punctum *V* in quiete perseveret. Ideoque corpus ab hac vi pari modo mouebitur, quo moueretur, si omnino esset liberum.

§. 584. Sit iam vis, quam remex exercet ad remum *RS* in directione *RP* protrahendum $=p$: atque remex vi aequali et contraria nauem *AB* pedibus seu ea corporis parte, qua nauis inhaeret, retrougebit, vi scilicet *p* in directione *PR*. Harum virium posterior tantum impendetur ad nauem circa axem *O* rotandam: pro axe autem *S* ambae simul effectum suum exerent. Cum autem hae duae vires sint aequales et oppositae, se mutuo destruent, ita vt respectu axis *S* momentum inde oriatur nullum.

nullum. Quamobrem momentum ex vi Q respectu huius axis ortum debet nihilo aequari, vnde fit $\frac{Q \cdot Q \cdot S \cdot HV}{GV} = 0$. Ex vi autem p nauem in directione PR vrgente oritur momentum respectu axis $O = p \cdot RO$ tendens in sensum AVB, vnde ista resultat aequatio $p \cdot RO = \frac{Q \cdot OQ \cdot HV}{GV}$ ex quibus duabus aequationibus tam punctum V quam vis ipsa Q cognoscetur.

§. 585. Ex priori aequatione intelligitur vel Q, vel QS, vel HV esse oportere = 0, at secunda docet nec Q nec HV nihilo aequales esse posse; eritque igitur QS = 0; atque recta TQ ad rectam VGT normaliter ducta per ipsum punctum S transibit. Hinc porro erit OQ = SO; ideoque $p \cdot RO = \frac{Q \cdot SO \cdot HV}{GV}$. Quia duae habentur incognitae, quantitas vis Q nimirum, et positio puncti V, ponamus HV = z; erit VG = $\sqrt{z^2 + GH^2}$ et GT = $\frac{hb}{\sqrt{z^2 + GH^2}}$; ergo VT = $\frac{z^2 + hb + GH^2}{\sqrt{z^2 + GH^2}}$; hincque VQ = $\frac{zz + hb + GH^2}{z} = VS = z + SH$: ex qua aequatione elicitur HV = z = $\frac{hb + GH^2}{SH}$ indeque GV = $\frac{\sqrt{(b^2 + z \cdot b^2 \cdot GH^2 + (GH^2 + SH^2) \cdot GH^2)}}{SH}$. His valoribus inventis vis Q ita definietur vt fit $Q = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GV}{HV}$, vnde totus effectus, quem vis remigis producit, absolute potest definiri.

§. 586. Vis remigis ergo eundem in naui producet effectum, ac si, remota axium consideratione, sola nauis sollicitaretur vi = $\frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GV}{HV}$ in directione SL, ita vt producta RS in N angulus LSN aequalis sit angulo HGV. Quare si haec vis SL resoluat in laterales SM et SN, quarum illa fit ad directionem remi RS normalis, haec vero in directionem remi incidat, fiet vis SM = $\frac{p \cdot RO}{SO}$,

Q q 2

et

et vis $SN = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH}{HV} = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + CH^2}$. Illa iam vis SM est ipsa illa vis, qua remus contra obicem S apprimitur indeque propter reactionem repellitur; quoniam est vis SM ad vim RP vti RO ad SO , vti natura vectis hypomochlio O incumbentis postulat. Altera autem vis SN retrahet nauem versus S ; ex quo intelligitur, nisi ea adesset, per vim remigis nauem AB ab obice S retractum iri, vel si remus in S firmiter inhaereat, hypomochlium O de loco suo mutatum iri, nisi punctum remi O nauis sit firmiter affixum.

§. 587. Ponamus autem nunc remum inertia ac pondere praeditum, ita vt is sine detrimento virium circa S moueri nequeat. Sit pondus remi $= K$, eius centrum gravitatis in I , atque momentum inertiae $= Kkk$. Sumatur $IK = \frac{kk}{SI}$, ita vt K sit centrum oscillationis remi axi suspensionis S conueniens; ac requiretur vis quaedam R remo in K normaliter puta in directione KF applicanda, quae in ipso motum angularem circa axem S producat. Momentum ergo huius vis erit $= R \cdot KS$, quod diuisum per momentum inertiae respectu axis S nempe per $K(kk + SI^2)$ dabit vim acceleratricem remi angularem $= \frac{R \cdot KS}{K(kk + SI^2)}$. Vis autem acceleratrix angularis nauis circa axem V erit $= \frac{Q \cdot TV}{M C b b + G V^2}$, quae vires angulares cum sint in ratione angularum OSo et OVo simul describendorum, seu vt VO ad SO dabunt hanc aequationem $\frac{R \cdot KS \cdot SO}{K(kk + SI^2)} = \frac{Q \cdot TV \cdot VO}{M(b^2 + G V^2)}$ siue $\frac{R \cdot SO}{K \cdot SI} = \frac{Q \cdot VO}{M \cdot G V}$ ob $IK = \frac{kk}{SI}$ et $ST = \frac{bb}{G V}$.

§. 588. Quoniam ex hac vi remo applicata nullum nascitur momentum ad axem O relatum; manebit superior aequatio pro isto axe quae erat $p \cdot RO = \frac{Q \cdot OQ \cdot HV}{G V}$.

At

At respectu axis S, pro quo a vi remigis nullum momentum resultat, momenta virium assumtarum Q et R se mutuo destrudere debent, quae cum in figura ad eandem partem vergant, erit R. $KS + \frac{Q \cdot OS \cdot HV}{GV} = 0$. Cum autem in aequatione paragraphi praeced: sit $Q : R = \frac{SO}{K \cdot SI} : \frac{VO}{M \cdot GV}$ erit $\frac{KS \cdot VO}{M \cdot GV} + \frac{QS \cdot SO \cdot HV}{K \cdot SI \cdot GV} = 0$, seu $K \cdot SI \cdot KS \cdot VO - M \cdot QS \cdot SO \cdot HV = 0$. Sit vt ante $HV = z$; erit $VO = z + HO$; $VQ = \frac{zz + bb + CH^2}{z}$; et $QS = z + SH - VQ = \frac{z \cdot SH - bb - CH^2}{z}$ quibus substitutis emergit ista aequatio $K \cdot SI \cdot KS (z + HO) + M \cdot SO (z \cdot SH - bb - GH^2) = 0$, quae praebet $z = HV = \frac{M \cdot SO (bb + CH^2) - K \cdot SI \cdot KS \cdot HO}{K \cdot SI \cdot KS + M \cdot SO \cdot SH}$; vnde erit $Q : R = \frac{SO}{K \cdot SI} : \frac{z + HO}{M \cdot (z + HG^2)} = (K \cdot SI \cdot KS + M \cdot SO \cdot SH) \sqrt{zz + HG^2} : K \cdot SI (bb + HG^2 + SH \cdot HO)$.

§. 589. Ex valore ipsius $HV = z$ inuento reperietur $QS = \frac{-K \cdot SI \cdot KS (bb + CH^2 + SH \cdot HO)}{M \cdot SO (bb + CH^2) - K \cdot SI \cdot KS \cdot HO}$; quae expressio, si fuerit affirmatiua, punctum Q citra S cadet, vti figura repraesentat, hincque cognoscitur locus applicationis vis Q navem ad motum sollicitantis. Resoluetur haec vis, vt ante fecimus in laterales, ac prodibit vis $QW = \frac{Q \cdot HV}{GV} = \frac{p \cdot RO}{OQ}$. At est $OQ = OS - SQ = \frac{M \cdot SO^2 (bb + CH^2) + K \cdot SI \cdot KS (bb + CH^2 + HO^2)}{M \cdot SO (bb + CH^2) - K \cdot SI \cdot KS \cdot HO}$ vnde vis $QW = \frac{p \cdot M \cdot RO \cdot SO (bb + CH^2) - p \cdot K \cdot RO \cdot SI \cdot KS \cdot HO}{M \cdot SO^2 (bb + CH^2) + K \cdot SI \cdot KS (bb + CH^2 + HO^2)}$ et vis $QN = \frac{p \cdot M \cdot RO \cdot SO \cdot GH \cdot SH + p \cdot K \cdot RO \cdot GH \cdot SI \cdot KS}{M \cdot SO^2 (bb + CH^2) + K \cdot SI \cdot KS (bb + CH^2 + HO^2)}$.

§. 590. Ex his formulis intelligitur, si pondus remi K valde sit paruum respectu ponderis navis M, tum terminos, in quibus inest K satis tuto negligi posse: atque etiamsi plures remi adhibeantur, tamen omnium simul sumtorum pondus adeo prae pondere navis M quasi infinite paruum spectari potest. Hancobrem sine sensibili

errore formulis prius inuentis vti poterimus, nauisque motus is erit, qui producitur a duabus viribus SM et SN in puncto S applicatis, quarum huius directio SN in directionem remi incidit, illius vero ad hanc est normalis, erit autem vis SM = $\frac{p \cdot RO}{SO}$ et vis SN = $\frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$. Quae vires cum in nauem aequae agant, ac si esset libera faltem minimo temporis puncto, duplicem motum in naui generabunt, primo nempe motum progressiuum, quo centrum grauitatis in directione ipsi SL parallela promovetur; ac deinde motum rotatorium circa axem verticalem per centrum grauitatis G transeuntem, quo naus in sensum AVB conuertetur.

§. 591. Si ex altera nauis parte alius remus similiter contra obicem firmum applicetur, atque aequali vi a remige vrgeatur, manifestum est, nauem in directione spinae BA esse progressuram. Acceleratio enim secundum hanc directionem duplicabitur, verum acceleratio in latera vtrinque destruetur. Sit anguli GYH, quem remus cum spina nauis constituit, sinus = m , cosinus = n ; ex vi SM = $\frac{p \cdot RO}{SO}$ oriatur vis nauem in directione spinae GA propellens = $\frac{m \cdot p \cdot RO}{SO}$; et vis in directione GE ad spinam normali = $\frac{n \cdot p \cdot RO}{SO}$; praeterea vero inde oritur momentum nauem in sensum AVB conuertens = $\frac{p \cdot RO \cdot SH}{SO}$. Simili modo ex vi SN = $\frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$ prodit vis nauem in directione GA propellens = $\frac{n \cdot p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$ in directione GE vis = $\frac{m \cdot p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$. Denique indidem nascitur momentum nauem in sensum BVA conuertere conans = $\frac{p \cdot RO \cdot GH}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$.

§. 592. Quodsi autem ex altera nauis parte aequalis remus aequaliter contra obicem immobilem fuerit applicatus,

tus, ita vt ambo cum obicibus S firmiter sint affixi, tum etiam super hypomochliis in O reperi omnino nequeant manifestum est, in naui nullum omnino motum produci posse; margines enim nautis vel propius ad se inuicem compeli, vel diduci deberent. Quare vt motus existere queat, remos vel in obicibus S non firmiter affixos esse oportet, vel spatium ipsis est concedendum per quod remi super hypomochlia O reperi queant. Ad hoc autem vti vidimus impendetur vis illa SN; ita vt haec vis iam non amplius in computum duci debeat. Ex quo a duobus istiusmodi remis nauis in directione GA propelletur vi $\frac{2mp \cdot RO}{SO}$. Vires ad latera autem GE tendentes pariter ac momenta motum rotatorium generantia vtrinque se defruent.

§ 593. Acquisierit iam nauis a duobus huiusmodi remis sollicitata motum in directione spinae BA, sitque eius celeritas debita altitudini v . Progrediatur hac celeritate temporis elemento centrum grauitatis G per spatium $Gg = dx$; atque interea hypomochlium seu punctum remi O transferetur in o , vt fit $Oo = \frac{GH \cdot dx}{CY} = m dx$; ex quo punctum R circa S conficiet spatium $Rr = \frac{m \cdot SR \cdot dx}{OS}$; circa O igitur motu relatiuo in naui absoluet spatium $\frac{m \cdot RO \cdot dx}{SO}$, ideoque circa O angulum $\frac{m dx}{SO}$ absoluet: quo angulo angulus GYO diminuetur. Cum igitur huius anguli diminuti finis fit $= m + dm$ et cosinus $= n + dn$ fiet $dm = -\frac{mndx}{SO}$ et $dn = \frac{mndx}{SO}$; vnde erit $\frac{dn}{nm} = \frac{dx}{SO} = \frac{dn}{1-nn}$, et integrando $\frac{x}{SO} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+n}{1-n} + C$. erit ergo $\frac{1+n}{1-n} = e^{\frac{2(x-c)}{SO}}$ et $n = \frac{e^{\frac{2(x-c)}{SO}} - 1}{e^{\frac{2(x-c)}{SO}} + 1}$; et $m =$

$$m = \frac{(x-c):SO}{e^{2(x-c):SO} + 1}. \quad \text{Motus ergo initio, vbi erat } x = 0,$$

fitus remi respectu nauis ita erat comparatus vt esset $m =$

$$\frac{c:SO}{1+e^{2c:SO}} \quad \text{et} \quad n = \frac{1-e^{2c:SO}}{1+e^{2c:SO}}.$$

Tab. XVIII.
fig. 2.

§. 594. Ponamus nauem AB initio, vbi remi RS et r s agitari coeperunt situm tenuisse, quem figura repraesentat; euanescente spatio x . Sit anguli BYS finus $= \mu$ cosinus $= \nu$, fiet $\nu = \frac{1-e^{2c:SO}}{1+e^{2c:SO}}$, hincque $e = \frac{1-\nu}{1+\nu} = \frac{\mu}{1+\nu}$ ita vt fit $e^{c:SO} = \frac{\mu}{1+\nu}$. Cum igitur prora nauis A absoluerit spatium AX $= x$, positio remorum constanter ad obices S et s applicatorum respectu nauis ita immutabitur vt fit $m = \frac{x:SO}{e^{(1+\nu)+(-\nu)}} = \frac{2\mu e^{x:SO}}{2x:SO}$ et $n = \frac{e^{2x:SO}(1-\nu) - (1-\nu)}{e^{(1+\nu)+(-\nu)}}$ vade quouis loco obliquitas remorum cognoscitur, donec tandem fiat tanta, vt amplius agere nequeat. Ponamus remos sub simili obliquitate cessare, qua coeperant; cessabunt ergo si fiat $m = \mu$ et $n = -\nu$. Hinc erit $(1-\nu)^2 = e^{2x:SO} (1+\nu)^2$; ideoque $e^{x:SO} = \frac{1-\nu}{1+\nu}$ et $x = SO \ln \frac{1-\nu}{1+\nu}$. Deberet autem vtique esse $x = 2\nu \cdot SO$, cuius erroris causa in hoc versatur, quod quantitatem SO tanquam constantem assumimus, quae reuera variatur, si punctum S maneat fixum.

§. 595. Sit igitur $SO = y$; erit $dy:Oo = YH:GH$

fig. 1. $= n:m$ hincque $dy = n dx$. Cum igitur fit $dm = \frac{-m dx}{SO}$

fig. 2. $= \frac{-m dy}{y}$ fiet $m = \frac{c}{y}$. Sit motus initio $SO = a$; fiet $\mu = \frac{c}{a}$, ideoque $C = \mu a$, ita vt prodeat $m = \frac{\mu a}{y}$ et $n = \sqrt{yy -$

$\frac{\sqrt{(yy-\mu^2aa)}}{y}$). Habetur ergo $\frac{ydy}{\sqrt{(yy-\mu^2a^2)}} = dx$, et $x = \sqrt{(yy-\mu^2a^2)}$ C, + quoniam si $x = 0$ fit $y = a$, erit $x = \sqrt{(yy-\mu^2a^2)} + Va$; quia cofinus anguli BYO feu ν est negativus. Quo circa erit $SO = y = \sqrt{(aa-2vax+xx)}$; hincque $m = \frac{\mu a}{\sqrt{(aa-2vax+xx)}}$ et $n = \frac{va+x}{\sqrt{(aa-2vax+xx)}}$. Remus ergo agere cessabit, quando fit $m = \mu$ et $n = -\nu$, hoc est percurso spatio $x = 2va$ vti rei natura postulat. Ceterum prior valor $x = al \frac{1-\nu}{1+\nu}$ ab hoc parum differt, si quidem obliquitas remi fuerit valde parua.

§. 596. Cum igitur vis remorum ad nauem mouendam inuenta effret $= \frac{2mp \cdot RO}{SO}$; si ponatur tota remi RS longitudo $RS = c$, erit $RO = c - y = c - \sqrt{(aa-2vax+xx)}$ ob $SO = \sqrt{(aa-2vax+xx)}$ durante motu, quoniam remos in S fixos super margine nauis repere affumimus. Hinc erit vis illa $= \frac{2\mu ap(c-\sqrt{(aa-2vax+xx)})}{aa-2vax+xx}$, si quidem remiges constanter eandem vim p exerant. At quoniam si remus ipse respectu nauis mouetur, remex, nisi se ipsum moueat, remum agitare nequit, minorem vim remex in remum exeret, quam si quiesceret. Cum igitur remi punctum R in nauis circa O feratur per spatium $= \frac{m \cdot RO dx}{SO}$ dum nauis celeritate \sqrt{v} percurrit spatium dx , erit celeritas remigis debita altitudini $= \frac{m \cdot RO^2 \cdot v}{SO^2} = \frac{\mu \mu a a v (c - \sqrt{(aa-2vax+xx)})^2}{(aa-2vax+xx)^2}$.

§. 597. Si ergo p denotet vim remigis quiescentis atque α fit altitudo debita celeritati, qua motus nullam amplius vim exerere potest, vis remigis praesenti statu aestimanda est $= p \left(1 - \frac{\mu \mu a a v (c - \sqrt{(aa-2vax+xx)})^2}{\alpha (aa-2vax+xx)^2} \right)$, quae in superiori expressione loco p debet substitui. Offendat iam nauis in motu suo tantam resistentiam, quantam super-

ficies plana = ff aequali celeritate directe mota; erit resistentia = $\frac{Mffv}{V}$; ex his resultabit nauis acceleratio $Mdv = \frac{2\mu a p dx (c - \sqrt{(aa - 2vax + xx)})}{aa - 2vax + xx} - \frac{2\mu^3 a^3 p v dx (c - \sqrt{(aa - 2vax + xx)})^3}{a(a^2 - 2vax + xx)^3} - \frac{Mffv dx}{V}$.

Quodsi autem variationem partis remi SO tanquam infinite paruum spectemus vt sit $V(aa - 2vax + xx) = a$ erit $Mdv = \frac{2\mu p dx (c-a)}{a} - \frac{2\mu^3 p v dx (c-a)^3}{a^3} - \frac{Mffv dx}{V}$.

§. 598. Quo ista hypothesis, qua longitudinem SO = a constantem assumimus, propius ad veritatem accedat, obliquitatem remi BYS ab angulo recto tam parum discrepantem accipi oportet, vt sit $\mu = 1$. Cui hypothesei fatifit, si remi continuo contra novos obices immobiles applicentur. Quoniam vero, dum remi ad novos obices applicantur, non agunt, bina remorum paria considerentur, ita vt dum vnum par nauem propellit, alterum par motum sese ad novos obices applicandi conficiat. Quatuor itaque huiusmodi remi alternatim agentes nauem non magis sollicitabunt, quam si duo continuo agerent; hincque quatuor remigum hoc pacto nitentium effectus in hoc consistet, vt sit $Mdv = \frac{2b^2 p dx}{a} - \frac{2b^3 p v dx}{a^3} - \frac{Mffv dx}{V}$ posito breuitatis gratia RO = $c - a = b$, existente SO = a . Sic igitur ob vires continuo aequabiliter durantes motus nauis quasi vniformiter continuabitur.

§. 599. Hoc pacto, etiamsi nauis motum a quiete inceperit, mox ad motus vniformitatem perueniet; ita vt fiat $dv = 0$. Erit ergo celeritatis, quae a quatuor istiusmodi remis naui inducetur, altitudo debita $v = \frac{2Va^2 b a p}{2Vb^3 p + Ma^2 ffa}$. Ad quam quantitatem cognoscendam notari oportet esse p circiter 40 libr. sumamus autem tantum $p = 32$ libr. $a =$ vni pedi; et si longitudines in pedibus rhenanis ex-

pri-

primantur fore $M = 64$ V librarum : ex quibus fiet $v = \frac{a^2 b}{b^3 + a^3 ff}$ ped. Hinc si a , b , et f , in pedibus rhenanis exprimantur, ex iis quae supra tradita sunt, patet, nauem a quatuor remigibus hoc modo propulsam tempore vnus minuti primi confecturam esse spatium $15 \sqrt{\frac{1000 a^2 b}{b^3 + a^3 ff}}$ pedum.

§. 600. Casus iste, quo remos obicibus immobilibus applicari ponimus, locum obtineret, si aqua remis omnino non cederet, sed, quasi esset congelatiata, vbique obstacula inuincibilia obiiceret; ita tamen vt ipsa nauis in motu suo consuetam resistantiam offendat. Quodsi ergo aqua remis nequicquam cederet, tum quatuor remiges, quorum quisque quiescens vi 32 librarum remum vrgere valeat, nauem tanta celeritate promouebunt, vt vno minuto primo percurrat spatium $15 \sqrt{\frac{1000 a^2 b}{b^3 + a^3 ff}}$ pedum, si quidem remiges per aequalia temporis interualla alternatim remos vrgent, et nouis obstaculis applicent. Sin autem moram duplo longiorem inter sollicitationes remorum interponant, vti fere in remigatione fieri solet, tum effectus repertus non quatuor sed sex remigibus debetur. Hincque duodecim remiges vno minuto nauem propellent per spatium $15 \sqrt{\frac{2000 a^2 b}{2b^3 + a^3 ff}}$; et generatim 6 ψ remiges per spatium $15 \sqrt{\frac{1000 \psi a^2 b}{b^3 \psi + a^3 ff}}$ pedum.

§. 601. Sit P vis immaterialis, quae nauem directe in directione AX trahendo aequae celeriter promoueat, ac 6 ψ remiges, eritque $M dv = P dx - \frac{Mff v dx}{v}$; ideoque motu ad vniiformitatem composito $v = \frac{PV}{Mff} = \frac{P}{64 ff}$ ped. si vis P in libris, et superficies ff in pedibus quadratis exprimatur. At a 6 ψ remigibus oritur $v = \frac{a^2 b \psi}{b^3 \psi + a^3 ff}$, unde

de erit $P = \frac{64a^2bff\psi}{b^3\psi + a^3ff}$ librarum. Vnus ergo remex censendus est ad nauis propulsiōem conferre vim $= \frac{32a^2bff}{3b^3\psi + 3a^3ff}$ librarum. Quo plures ergo remiges adhibentur eo minor vis a singulis ad nauem propellendam nascitur. Sin autem superficies ff tanta fuerit vt terminus $b^3\psi$ prae a^3ff euanescat, tum vis vnus remigis aestimanda erit $\frac{32b}{3a}$ librarum; alias autem adhuc erit minor.

§. 602. Quod ad celeritatem nauis a 6ψ remigibus ipsi impressam, qua vno minuto primo absoluit spatium $= 15 \sqrt{\frac{1000\psi a^2 b}{\psi b^3 + a^3 ff}}$ pedum; primo apparet celeritatem vtique augeri multiplicato remigum numero; attamen in minore ratione celeritas crescit, quam subduplicata numeri remigum. Deinde quia ff exhibet resistentiam nauis absolutam, perspicuum est celeritatem fere esse in ratione reciproca subduplicata resistentiae, quamdiu terminus ψb^3 valde est paruus respectu termini a^3ff ; at nisi hoc fuerit celeritas in minore ratione crescit; ita vt diminutio resistentiae celeritatem in minore quam subduplicata ratione augeat. Tum vero celeritas nauis plurimum pendet a ratione $a : b$ seu $SO : RO$, neque vero longitudo remi ipsa quicquam ad celeritatem confert; ex quo remos tam breues fieri expedit, quam circumstantiae ceterae permittunt, quo minor virium portio ad ipsos mouendos impendatur.

§. 603. Si ponamus $\frac{SO}{RO} = \frac{a}{b} = z$, erit altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{\psi z z}{\psi + ff z^3}$, vnde intelligitur nimis magnum valorem pro z celeritatem aeque diminuere, ac nimis paruū. Dabitur ergo valor definitus pro z substituendus, qui naui maximam celeritatem conciliet; quique continetur in hac aequatione $2\psi = ff z^3$, ita vt sit $z = \frac{a}{b}$

$= \frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$. Quare si haec ratio inter partes remi RO et SO constituitur, naus celerrime promouebitur, atque vno minuto primo conficiet $15 \sqrt[3]{\frac{1000aa}{3bb}}$ pedes = 273, 86. $\frac{a}{b}$ ped. Quando igitur $2\psi < ff$, tum remi pars SO minor capi debet quam pars RO, sin $2\psi = ff$ fiet $SO = RO$, atque si numerus remigum tantopere augetur, vt fiat $2\psi > ff$, tum remi pars SO superare debet partem RO quo magis scilicet numerus remigum augetur, eo maior statui debet ratio inter $SO:RO$ idque in ratione subtriplicata.

§. 604. Cum igitur sumta $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$, naus a 6ψ remigibus celerrime promoueat et vno minuto primo spatium 273, 86. $\sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$ pedum absoluat, erit eius celeritas vt $\sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$ hoc est celeritas erit in ratione subtriplicata directa numeri remigum et subtriplicata inuerfa resistentiae absolutae ff . Quamobrem quo naui eidem duplo maior celeritas imprimatur numerus remigum octuplo maior statui debet, manente eadem resistentia; simul vero ratio $\frac{SO}{RO}$ duplo maior est capienda. Per diminutionem porro resistentiae celeritas naus quoque augetur; vt autem ex hoc capite celeritas duplo maior reddatur oporteret resistentiam octuplo fieri minorem; tanta autem diminutio non est in nostra potestate. Si profunditas carinae fit C pedum, latitudo carinae, vti supra ostendimus maior esse debet quam $2C$; sit ea vt stabilitas respectu axis longitudinalis eo maior euadat, = $3C$, erit sectio carinae transuersa maxima circiter = $2CC$, atque si resistentia multum diminuatur, fiet propemodum $ff = CC$.

§. 605. Si igitur $\frac{SO}{RO} = \frac{a}{b}$ eam habeat rationem quam nauis celerrimus motus postulat, ex hac sola ratione celeritas nauis absoluta definietur: percurreret enim nauis vno minuto primo 273, 86. $\frac{a}{b}$ pedes; atque vna hora 16431, 6. $\frac{a}{b}$ ped. Quare cum milliare germanicum contineat 23627 ped, seu vt nauis vna hora milliare germanicum absoluere queat, debet esse $\frac{a}{b} = \frac{23627}{16431} = \frac{10}{7}$ proxime. Hinc fiet $\frac{2\psi}{ff} = \frac{1000}{343}$, et $2\psi = \frac{1000}{343} \cdot ff$, hincque numerus remigum ad hoc requisitorum $6\psi = \frac{3000}{343} ff = 8\frac{3}{4}ff$. Quodsi ergo profunditas carinae fit vnus pedis, remiges 9 vna hora milliare germanicum conficient; sin profunditas carinae f sit duorum pedum, remiges 35 requirentur ad vnum milliare vna hora absoluendum. Et, si fit $ff = 16$, vt fere in triremibus euenire solet, remiges 140 valebunt nauem vna hora per milliare germanicum promouere: remiges autem 18 eandem nauem vna hora per semiffem vnus miliaris propellent.

§. 606. In instituto igitur nostro hoc iam sumus consecuti, vt motum nauis ab actione remorum oriundum determinare valeamus, si aqua remis obstaculum immobile obiiceret, quod eueniret, si vel aqua vtrinque circa nauem esset congelata, vel series palorum vtrinque firmiter esset constituta, quibus remi applicari queant. Quae hypothesis etsi a veritate abhorret, tamen ad motum nauium a vibratione remorum in aqua ortum determinandum maxime est accommodata atque viam dilucide sternit; dum enim aqua motui remorum cedit, effectum accessione oriundum facillime cognoscemus, si ante effectum remota penitus cessione inuestigauerimus. Ceterum hypo-

thesis

thesis, quam hactenus tractauimus, etiam in se spectata non omni caret vtilitate; sæpenumero enim euenit, vt remos contra obices firmos applicare liceat; hisque ideo casibus quantus naui motus imprimatur, operae pretium erat inuestigare: ne vllus nauium propellendarum modus esset praetermissus.

§. 607 His igitur praeparatis progrediamur ad effectum remorum more solito in aqua vibratorum determinandum, qui etsi in motu nauis impressio consumitur, tamen initio nauem a vi quacunque externa in eodem situ firmiter detineri ponamus. Contineatur itaque nauis AB constanter in quiete, ita vt vis a remis orta ipsi nullum motum inducere valeat; sitque COD remus mobilis circa hypomochlium in nauis fixum O , qui a remige in nauis sedente ac secundum directionem CR ad remum continuo normalem ita vibretur, vt extremitates C et D circa O arcus circulares CR et DS describant. Versetur autem portio quaedam remi DE in aqua, cuius planities in situ verticali contra aquam impellatur atque cum vis aquae normaliter agat ad superficiem remi, erit directio vis aquae a remo exceptae horizontalis, quae vtique ad nauem promouendam maxime est accommodata. Assumimus autem superficiem remi, qua aquam stringit, planam, ita vt per lineam rectam COD repraesentari queat.

§. 608. Perductus sit remus iam in situm ROS , ibique sit eius motus, quo in situm proximum rO_s promouetur tantus, vt celeritas puncti R per spatium Rr debita sit altitudini u , ex qua cuiusuis remi puncti celeritas cognoscetur. Nempe si dicatur $OS = a$, $OR = b$; et interuallum quodcunque $OX = x$, erit celeritas puncti

$S =$

Tab. XVIII.
fig. 3.

$S = \frac{x\sqrt{u}}{b}$, et celeritas puncti $X = \frac{x\sqrt{u}}{b}$. Quo autem investigatio haec latius pateat, atque ad nauem motam facile traduci queat, aquam non quiescentem sed motam ponemus, ita vt in directione HX spinae nauis AB parallela fluat celeritate debita altitudini v ; tantam enim celeritatem aqua habere censenda est, si nauis in directione spinae BA progrediatur celeritate altitudini v debita. Quodsi autem aqua euanescente v quiesceret, remi particula $Xx = dx$ contra aquam directe impingeret celeritate $\frac{x\sqrt{u}}{b}$, ex qua vis resistentiae aquae determinari deberet.

§. 609. Quoniam vero aqua ipsa mouetur in directione HX celeritate \sqrt{v} , atque remi elementum Xx in directione KN normali ad OX celeritate $\frac{x\sqrt{u}}{b}$, quaeri debet celeritas aquae relativa, qua in remum impingit. Ad hoc capiatur XM ad XN vt \sqrt{v} ad $\frac{x\sqrt{u}}{b}$, et compleatur parallelogrammum $XNLM$: cuius diagonalis LX exhibebit tam directionem quam celeritatem, qua aqua in remi particulam Xx irruet. Si enim remus tanquam quiescens consideretur, eiusque motus in aquam transferatur: tum si aqua nullum haberet motum proprium, particula aquae L moueri censenda esset in directione LM normali ad remum, celeritate $\frac{x\sqrt{u}}{b}$, ob motum autem proprium eadem aquae particula L progredietur in directione LN parallela ipsi AB celeritate \sqrt{v} . Quare utroque motu particula L describet diagonalem LX , et remi elementum Xx percutiet secundum hanc directionem celeritate quae erit ad \sqrt{v} vel $\frac{x\sqrt{u}}{b}$ vti est LX ad LN vel LM .

§. 610. Sit anguli BYO quem directio remi RS cum directione spinae nauis AB constituit sinus $= m$,
 cofinus

cosinus = n posito sinu toto = 1 , erit anguli LNX
 finus = n cosinus = m . Hinc cum sit $NX = \frac{x\sqrt{u}}{b}$
 et $NL = \sqrt{v}$ reperietur $LX^2 = v + \frac{xxu}{bb} - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b}$,
 quae exprimet quadratum celeritatis, qua aqua in remi
 elementum Xx incurrit. Incurrit autem sub angulo LXO,
 cuius sinus aequatur cosinui anguli LXN. At anguli L
 XN finus est = $\frac{n \cdot LN}{LX} = \frac{n\sqrt{v}}{\sqrt{(v - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b} + \frac{xxu}{bb})}}$; eiusque er-
 go cosinus seu sinus anguli incidentiae L X O =
 $\frac{\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v}}{\sqrt{(v - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b} + \frac{xxu}{bb})}}$. Cum igitur vis aquae impellentis est

vt quadratum celeritatis, atque vt quadratum finus anguli
 incidentiae coniunctim, erit ea vt $(\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$; quae quan-
 titas ducta in remi elementum in quod agit, dabit volu-
 men aquae; cuius pondus aequatur vi aquae impingentis.

§. 631. Ponatur latitudo remi in loco X, qua a-
 quam percutit = y , erit elementum remi illam vim sen-
 tiens = ydx ; unde vis, quam hoc remi elementum ab
 aqua suffert, aequalebit ponderi aquae, cuius volumen
 est = $ydx(\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$. Huiusque vis directio ad re-
 mum est normalis. Notari autem oportet, vbique esse
 debere $\frac{x\sqrt{u}}{b} > m\sqrt{v}$, alioquin enim remus non parte an-
 teriori aquam percuteret, sed aqua in parte postica in
 ipsum irrueret. Quoniam vero alicubi angulus BYO exi-
 stit rectus, ideoque $m = 1$, necesse est vt sit $\frac{x\sqrt{u}}{b} > \sqrt{v}$;
 hincque $x > \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. Initium ergo remi X quo aquae
 immergi incipit magis ab O remotum esse oportet, quam
 intervallo $\frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$; si quidem directio RS sit horizontalis;
 sin autem RS, vti necessario euenit, ad horizontalem

fit inclinata, tum iste terminus $\frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ insuper in ratione co-
finus anguli inclinationis remi ad finem totum augeri debet.

Tab. XVIII.
fig. 4.

§. 612. Consideremus remum hoc modo agitatum
seorsim, fitque EEFF eius planities verticalis, qua aquam
percutit, ponatur $OC = f$; $CD = b$; $EE = g$, $OX = x$,
et $YY = y$, erit vis, quam elementum $YyyY$ ab aqua
sustinet $= y dx (\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$, existente $OC = f > \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$.
Quoniam iam omnium harum virium directiones sunt in-
ter se parallelae, ad planum nempe EF normales, vis ip-
sis omnibus aequivalens aequabitur summae omnium. Po-
namus, vt hanc summam inuenire queamus, EF esse li-
neas rectas, atque $FF = k$, erit $k - g : b = y - g : x - f$,
hincque $y = g + \frac{(k-g)(x-f)}{b} = g - \frac{f(k-g)}{b} + \frac{x(k-g)}{b}$. Quod du-
ctum in $dx (\frac{xxu}{bb} - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b} + mmv)$ et integratum dabit
 $\frac{(gb-fk+fg)}{b} (\frac{x^3u}{3bb} - \frac{mxx\sqrt{uv}}{b} + mmx) + \frac{(k-g)}{b} (\frac{x^4u}{4bb} - \frac{2mx^3\sqrt{uv}}{3b} +$
 $\frac{m^2vxx}{2}) - \frac{(gb-fk+fg)}{b} (\frac{f^3u}{3bb} - \frac{mff\sqrt{uv}}{b} + m^2fv) - \frac{(k-g)}{b} (\frac{f^4u}{4bb} - \frac{2mf^3\sqrt{uv}}{3b}$
 $+ \frac{m^2ffv}{2})$. Ponatur iam $x = f + b$ ac prodibit vis totalis.

§. 613. Ne expressio tantopere proluxa prodeat, po-
namus $k = g$, ita vt figura remi EEFF fit parallelogram-
mum rectangulum, eritque vis a remo excepta $= gb$
 $((ff + g + \frac{1}{3}bb) \frac{u}{bb} - m(2f + b) \frac{\sqrt{vu}}{b} + mmv)$. Quoniam
vero necesse est, vt fit $f > \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, ponatur $f = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}} + i$,
atque reperietur vis illa remi $= \frac{gbu}{bb} (ii + ib + \frac{1}{3}bb)$.
Ad cuius mediam directionem inueniendam, quae fit in
S, quaeratur momentum respectu O, quod erit $= fyx dx$
 $(\frac{xxu}{bb} - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b} + mmv)$; cuius integrale ob $y = g$ est $=$
 $\frac{gx^4u}{4bb} - \frac{2mgx^3\sqrt{uv}}{3b} + \frac{mmgx^2v}{2}$ ac pro toto remo $= gb((f^3 + \frac{3}{2}f^2$
 $b + fbh + \frac{1}{4}b^2) \frac{u}{bb} - \frac{2m}{b} (ff + fb + \frac{1}{3}bb) \sqrt{vu} + mmv(f + \frac{1}{2}b))$
 $= gb$

$$= gb((ii + ib + \frac{1}{3}bb) \frac{m\sqrt{vu}}{b} + (i^2 + \frac{3}{2}i^2b + ibb + \frac{1}{4}b^2) \frac{u}{bb})$$

$$\text{vnde fit OS} = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}} + \frac{i^2 + \frac{3}{2}i^2b + ibb + \frac{1}{4}b^2}{ii + ib + \frac{1}{3}bb} = f + \frac{\frac{1}{2}i^2b + \frac{2}{3}ibb + \frac{1}{4}b^2}{ii + ib + \frac{1}{3}bb}$$

§. 614. Ponamus remum eousque nempe in C aquae immergi, vt fit $OC = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, atque erit $i = 0$; vis igitur a remo excepta aequabitur ponderi aquae, cuius volumen est $= \frac{gb^2u}{3bb}$, huiusque vis media directio erit in puncto S sumto $OS = f + \frac{3}{4}b$, seu $CS = \frac{3}{4}CD$. Quamobrem si tota remi vltra hypomochlium O longitudo OD ponatur $= a$, et remi latitudo fit $= g$, tum erit $f = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ et $b = a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. Hinc erit vis remi RS in aqua vibrati $= \frac{gu}{3bb}(a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3$; seu si pondus huic vi aequale desideretur erit $id = \frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3$ denotante M pondus nauis, et V volumen partis eius in aqua versantis; quae vis remum in directione ad ipsum normali ST vrgebit, sumta $OS = \frac{3}{4}a + \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. Debet autem ante omnia esse $a > \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, alioquin secundum hypothefin nulla eius pars aquam vibraret.

Tab. XVIII.
fig. 3.

§. 615. Sit iam vis, quam remex quiescens ad remum trahendum exercere valet $= p$, erit vis, qua remum RS iam motum sollicitabit $= p(1 - \frac{u}{\alpha})$, existente α altitudine vnus pedis circiter, vti supra notauimus, et p pondere, pro quo 32 libras accepimus. Quod si nunc remex remum motu vniformi trahat, ad quam vniformitatem remum mox a principio perducet, nisi pondus remi fit valde magnum, fiet $pb(1 - \frac{u}{\alpha}) = \frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3 (\frac{3}{4}a + \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})$. Quamobrem si angulus BYO fuerit rectus, vel ab eo non multum discrepet, vti in motu remorum vulgo fieri solet, erit $pb(1 - \frac{u}{\alpha}) = \frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}})(\frac{3}{4}a + \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}})$

$\frac{b\sqrt{v}}{4\sqrt{u}}$) : ex qua aequatione si valor ipsius u eruatur, atque in $\frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^2$ substituatur, prodibit vis, quam remus ab aqua in directione ST sustinet.

Fig. 5. §. 616. Quoniam vero hic remi pars, quae in aqua vibratur, in se non est determinata, sed tam ex ipsius remi, quam aquae celeritate determinatur, in praxi eiusmodi mensura obseruari difficulter poterit. Quamobrem ut propius ad praxin investigationem nostram accommodemus, simulque calculo consulamus, in quo rem vero proxime expediuisse sufficit; concipiamus ergo remum palae formam ODFF cuius planities DFF aquam findat, sit eius centrum gratuitatis, seu potius media directio vis aquae in puncto S, quod in planities puncto medio satis tuto accipere licet, siquidem longitudo DF prae OS sit valde parua. Ponatur OS = a , sitque latitudo remi FF = g et longitudo DF = b , erit iam ex praecedentibus vero proxime vis, quam iste remus vibratus ab aqua sustinet = $gb(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$, seu pondus huic vi aequiualeens est = $\frac{Mgb}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$; quae vis in puncto S normaliter ad planitiem DFF erit applicata.

Fig. 3. §. 617. Posita igitur portiois remi aquam findentis longitudine = b , et latitudine = g , remus ROS in S urgetur in directione ST vi = $\frac{Mgb}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$ cuius momentum respectu hypomochlii O erit = $\frac{Magb}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$. Huic ergo momento aequale esse debet momentum vis remigis, quod est = $pb(1 - \frac{u}{\alpha})$, ita ut habeatur ista aequatio $pb(1 - \frac{u}{\alpha}) = \frac{Magb}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$, ex qua si valor ipsius u eruatur, innotescet vera vis, quam remex exercet. Si igitur obliquitas remi tam fuerit parua ut
 finus

finis m finui toti aequalis aestimari queat, tum erit $p\dot{b}$
 $(1 - \frac{u}{\alpha}) = \frac{Mg\dot{b}}{V} (\frac{a\sqrt{u}}{b} - Vv)^2$; et vis ST quam remus
 sustinet erit $= \frac{Mg\dot{b}}{V} (\frac{a\sqrt{u}}{b} - Vv)^2$ vel $= \frac{p\dot{b}}{a} (1 - \frac{u}{\alpha})$.

§. 618. Si igitur naui statuat mobilis ab hac vi
 ST actu mouebitur, simul vero conuertetur circa axem
 verticalem per centrum grauitatis transeuntem. Quod si
 autem in altera naui parte alius remus aequali vi vibre-
 tur, tum vires nauem rotantes se mutuo destruent, atque
 vis nauem in directione spinae BA propellens duplicabitur
 ita vt ea futura sit $= \frac{2p\dot{b}}{a} (1 - \frac{u}{\alpha})$. Haec autem vis non
 continuo aget, cum remiges tempore opus habeant, cum
 ad remum ex aqua post finitam vibrationem extrahendum tum
 iterum in aquam immittendum, ita vt triens tantum tem-
 poris totius fere ad nauem promouendam impendatur. Hanc-
 obrem sex remigum more solito operantium effectus huc
 redibit, vt naui constanter vi $= \frac{2p\dot{b}}{a} (1 - \frac{u}{\alpha})$ propella-
 tur: atque si 6ψ remiges operi ad moueantur, erit vis
 ab illis exerta $= \frac{2\psi p\dot{b}}{a} (1 - \frac{u}{\alpha})$.

§. 619. Ponamus iam resistentiam, quam naui mo-
 tu suo directo in aqua suffert, tantam esse, quantam su-
 perfacies plana ff , directe in aqua mota aequali celeritate
 patitur; atque sit motus naui iam ad aequabilitatem per-
 ductus, ita vt celeritas ipsius debita sit altitudini v . Habe-
 mus ergo casum supra tractatum, quo aquam contra na-
 vem quiescentem celeritate Vv aduenire posuimus; scili-
 cet remi in naui hac celeritate mota in aqua stagnante
 eundem praestabunt effectum, ac si naui quiesceret, et
 aqua celeritate Vv in directione HX afflueret. Resisten-
 tia ergo quam naui ista celeritate secundum directionem

BA mota patitur erit $\frac{Mffv}{V}$, cui, quia motus aequalis ponitur, aequalis esse debet vis remorum, quorum numerus sit 6ψ , quae est $\frac{2\psi pb}{a} (1 - \frac{u}{\alpha})$, ita vt habeatur ista aequatio $\frac{Mffv}{V} = \frac{2\psi pb}{a} (1 - \frac{u}{\alpha})$.

§. 620. Ad motum naus igitur a 6ψ remigum opere ortum definiendum habemus has duas aequationes $\frac{Mffv}{V} = \frac{2\psi pb}{a} (1 - \frac{u}{\alpha})$ et $pb (1 - \frac{u}{\alpha}) = \frac{Magb}{V} (\frac{avv}{b} - Vv)^2$; quae vt ad simpliciores formas redigantur, Ponamus longitudes in pedibus rhenanis exhiberi, et cum sit $\alpha = 1$, $M = 64 V$ libr. et $p = 32$ libr. obtinebimus has aequationes $ffv = \frac{\psi b}{a} (1 - u)$ et $b (1 - u) = 2agb (\frac{avv}{b} - Vv)^2$; ex quarum posteriori oritur $\frac{avv}{b} - Vv = V \frac{b(1-u)}{2agb}$ et $Vv = \frac{avv}{b} - V \frac{b(1-u)}{2agb} = V \frac{\psi b(1-u)}{aff}$. Erit ergo $\frac{aav}{bb} = \frac{b(1-u)}{a} (V \frac{1}{2gb} + V \frac{\psi}{ff})^2$. Sit $\frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = z$ erit $z^3 u = (1 - u) (V \frac{1}{2gb} + V \frac{\psi}{ff})^2$ hincque $u = \frac{(V \frac{1}{2gb} + V \frac{\psi}{ff})^2}{z^3 + (V \frac{1}{2gb} + V \frac{\psi}{ff})^2}$ et $1 - u =$

$$\frac{z^3}{z^3 + (V \frac{1}{2gb} + V \frac{\psi}{ff})^2} \text{ et consequenter } v = \frac{\psi z z : ff}{z^3 + (V \frac{1}{2gb} + V \frac{\psi}{ff})^2}.$$

§. 621. In hac expressione designat gb planitiem remi, qua aqua finditur; intelligitur ergo quo maior fuerit ista planities eo maiorem prodituram esse naus celeritatem; et, si amplitudo ista remi fiat infinita, tum prodit $v = \frac{\psi z z}{ff z^3 + \psi}$, quae est ea ipsa expressio, quam invenimus posito obstaculo, cui remus applicatur, immobili. Hoc ipsum natura rei postulat, nam facta amplitudine remi infinita, resistentia aquae erit infinita, ideoque obici immobili aequiualebit. Minor ergo remi superficies nauis minorem inducet celeritatem; ex quo videatur maxime

expedire remos quam ampliffimos confici. Verumtamen aliae rationes nimiam remi amplitudinem diffuadent; quoniam quo amplior remi extremitas efficitur, eo fortiorem ac grauiorem remum facere oportet, quo fit, vt difficilius vibretur indeque propulfio nauis debilitetur.

§. 622. Tantam igitur remis amplitudinem tribui oportet, quantam reliquae circumftantiae permittunt; has autem fi confulamus, deprehendemus remo ab vno homine agitando maiorem commode amplitudinem tribui non poffe, quam vnus pedis quadrati, ita vt futurum fit $gb = 1$ et $\sqrt{\frac{1}{2gb}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071$ proxime. Si materia fimul leuior ac fortior reperiatur, vt remus minus grauis eandem vim fuftinere queat, tum vtique confultum erit maiorem amplitudinem conficere; qua in re experientia aptiffimam fuppeditabit decifionem: dummodo hoc praeceptum teneatur, vt remi circa extremitatem, qua aquam vrgent, tam fiant ampli quam fieri potest; vt fcilicet non folum fatis fint firmi fed etiam ab vno homine facile tractari poffint. Si plures homines vni remo deftinentur, tum pari modo ex eorum vi tam firmitas remi, quam pondus et amplitudo determinabuntur.

§. 623. Sit $\sqrt{\frac{1}{2gb}} = \gamma$, et $\sqrt{\frac{v}{ff}} = \delta$, erit vt oftendimus $\gamma = 0,7071$ quam proxime; retinebimus autem valorem generalem γ ; vt conclufiones latius pateant: erit ergo $v = \frac{\delta\delta z z}{z^3 + (\gamma + \delta)^2}$ ped. Maxima ergo ab eodem remigum numero, et eadem remorum amplitudine, nauis celeritas imprimetur, fi fuerit $z^3 = 2(\gamma + \delta)^2$, et $z = \frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{2(\gamma + \delta)^2}$. Definitur ergo hac aequatione ratio maxime idonea inter partes remi SO et RO, ad nauem

nauem celerrime promouendam. Si $\gamma = 0$, prodit casus supra tractatus, ubi remos obstaculis immobilibus applicari posuimus; praesenti igitur casu, dum aqua remo cedit ratio SO ad RO maior oritur, ideoque pars remi exterior SO respectu partis interioris RO maior statui debet, quam in praecedente hypothese erat definita; et quo minor remo amplitudo tribuitur ob auctum valorem γ , ratio $\frac{SO}{RO}$ augetur.

§. 624. Quoniam est $\gamma = 0$, $7071 = \sqrt[3]{2}$, erit $2\gamma\gamma = 1$, hincque $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(1 + 2\delta\sqrt{2} + 2\delta\delta)}$; quae fractio cum sit unitate maior, indicat perpetuo in remis partem exteriorem SO superare debere partem intra nauem sitam RO; quantumuis exiguus sit remigum numerus ψ . Aucto autem remigum numero ψ , ratio SO ad RO magis augeri debet. Si ergo pro quouis pede quadrato, quem superficies ff resistentiam absolutam exhibens continet, sex remiges constituentur, ut sit $\psi = ff$, fiet $\delta = 1$ eritque $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2})} = 1,79963 = \frac{9}{5}$ proxime. Hoc ergo casu debet esse SO:RO = 9:5. Si numerus remigum ab hac regula paulisper discrepet, ut sit $\psi = ff(1 \pm \theta)$ existente θ fractione quam minima, erit $\delta = \sqrt[3]{(1 \pm \theta)} = 1 \pm \frac{\theta}{3}$ et $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2} \pm (2 + \sqrt{2})\theta)} = \frac{9}{5} \pm \frac{2\theta}{5}$; seu erit SO:RO = $9 \pm 2\theta : 5$ proxime, si fuerit numerus remigum = $6(1 \pm \theta)ff$.

§. 625. Hinc definiiri potest absolute maxima celeritas, quam datus remigum numerus, remis secundum praecpta data institutis; nauis imprimere valet. Cum enim
fit

fit $v = \frac{\delta\delta z z}{z^3 + (\gamma + \delta)^2}$, et $z = \sqrt[3]{2(\gamma + \delta)^2}$, fiet $v = \frac{2\delta\delta}{\sqrt[3]{2(\gamma + \delta)^2}}$
 $= \frac{2\delta\delta \cdot RO}{350}$ ped. Hinc naus vno minuto primo propelle-
 tur per spatium 387, $3\delta\sqrt{\frac{RO}{50}}$ pedum, hoc est per spa-
 tium $\frac{345\delta}{\sqrt{\gamma + \delta}}$ pedum. Si igitur sit numerus remigum 6ψ
 $= 6ff$, ita vt sit $\delta = 1$, et ob $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$, naus tempore
 vnus minuti propelletur per spatium 387, $3\sqrt{\frac{5}{2}} = 288\frac{3}{4}$
 pedum. Vna igitur hora naus percurreret spatium 17323
 pedum, quod spatium aliquanto bessum vnus milliaris
 germanici superat. Si esset $\gamma = 0$, atque remi obstacu-
 lis inuincibilibus applicentur, tum casu $\psi = ff$ naus vna
 hora spatium 20700 pedes absolueret.

§ 626. Ex his porro numerus remigum determinari
 poterit, qui nauem dato tempore per datum spatium pro-
 mouere valeant. Oporteat scilicet nauem tempore vnus
 horae per spatium n pedum propelli; ac fiet $n = \frac{20700\delta}{\sqrt{\gamma + \delta}}$
 $= \frac{20700\delta}{\sqrt{\delta + \sqrt{\frac{1}{2}}}}$ ob $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$, sit $n = 20700 m$. fiet $\delta^3 = m^3\delta$
 $+ m^3\sqrt{\frac{1}{2}} = m^3\delta + m^3 \cdot 0, 7071$. Quodsi spatium vna
 hora absoluendum sit vnum milliare, fiet $m = 1$, 1414
 eritque adeo $\delta^3 = 1, 48701\delta + 1, 05148$; vnde repe-
 ritur $\delta = 1, 4822 = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$. Habebitur ergo $\psi = 2$,
 1967 ff, et remigum requisitorum numerus erit $= 13$,
 18 ff. Vt autem naus vna hora tantum 20700 pedes
 conficiat, ex aequatione $\delta^3 = \delta + 0, 7071$ oritur δ
 $= 1, 2531 = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$, hincque $\psi = 1$, 57 ff, numerus
 ergo remigum ad hoc iter absoluendum requisitus est 6ψ
 $= 9$, 42 ff.

§. 627. Ponamus numerum remigum $6\psi = nff$ erit

$\delta = \sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \sqrt{\frac{n}{6}}$; et $\frac{RO}{SO} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{4n}{3}} + \frac{n}{3}}$; nauisque vna hora propelletur per spatium $23238 \sqrt{\frac{n}{6}} \cdot \frac{RO}{SO} = \frac{9487\sqrt{n}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{n}{3}}}}$ pedum, substituendis ergo loco n successiue numeris definitis erit

numerus Remigum	Ratio RO : SO	nauis vna hora pro- pellitur per spatium.
ff	1000 : 1355	8150 ped.
2 ff	1000 : 1488	10995 ped.
3 ff	1000 : 1587	13042 ped.
4 ff	1000 : 1668	14690 ped.
5 ff	1000 : 1738	16092 ped.
6 ff	1000 : 1800	17323 ped.
7 ff	1000 : 1855	18426 ped.
8 ff	1000 : 1907	19432 ped.
9 ff	1000 : 1954	20358 ped.
10 ff	1000 : 1998	21217 ped.
11 ff	1000 : 2040	22022 ped.
12 ff	1000 : 2080	22786 ped.

§. 628. Quoniam igitur remis ad celerrimum nauis motum instructis nauis a 6ψ remigibus imprimatur celeritas debita altitudini $v = \frac{2\delta\delta}{\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$, videamus quanta vis requiratur, quae nauem directe secundum BA trahens ipsi eandem celeritatem inducat. Sit vis haec quam quaerimus = P librarum: fiet $P = \frac{Mfv}{v} = 64ffv$ libr. si f et v in pedibus exprimantur, erit ergo $v = \frac{P}{64ff}$, quae ipsi

ipfi $\frac{2\delta\delta}{\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ aequalis posita dabit $P = \frac{129\delta\delta ff}{\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$; tantam ergo vim 6ψ remiges exerunt; vis igitur vnus remigis valebit $\frac{64\delta\delta ff}{9\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ libr. = $\frac{64}{9\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ libr. propter $\frac{\psi}{ff} = \delta\delta$.

Cum iam fit $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}$, erit vis vnus remigis = $\frac{64 \cdot RO}{9 \cdot SO}$ libr. Si igitur fit $RO = SO$, vis vnus remigis valebit $7\frac{1}{9}$ libr; at si $SO = 2RO$ valebit tantum semifsem $3\frac{5}{9}$ libr.

§. 629. Ex his intelligitur vires singulorum remigum, quatenus tendunt ad nauem propellendam, sine respectu ad nauem habito determinari non posse, etsi remiges aequales vires ad remos vrgendos impendant. Vidimus autem cum semper debeat esse $SO > RO$, maximam vim vnus remigis ad nauem propellendam non vltra 7 libras extendi posse, quiae autem si nauis celerius progrediatur adhuc multo fit minor. Scilicet si nauis vna hora integrum milliare germanicum absoluat, tum ob $\frac{SO}{RO} = 2, 1246$, vnus remigis vis valebit $3\frac{1}{3}$ libr; ita vt de 32 libris, quas remex quisque ad remum impendit, tantum $3\frac{1}{3}$ librae ad nauem propellendam impendantur. Celeritate igitur nauis cognita, ex tabula praecedente innotescit ratio inter SO ad RO ; hincque definietur vis vnus remigis ad nauem propellendam: si quidem remi modo maxime lucroso sint instructi.

§. 630. Quemadmodum haec ex principiis indubitatis deduximus, ac litteris vniuersalibus tales tribuimus valores, qui a praxi parum discrepant, sic etiam conclusiones, quas inde sumus consecuti, experientiae satis sunt consentaneae. Quod vt clarius appareat, exemplum ab experientia petiitum secundum theoriam curatius euoluamus. Perhibetur autem eiusmodi exemplum in Comment. Acad.

Scient. Parisinae A. 1702, quo Vir Celeb. Daniel Bernoulli-
 vus est in Hydrodynamica; triremis scilicet Galera dicta
 a 260 Remigibus propulsa singulis minutis secundis $7\frac{1}{2}$
 pedes absoluebat: tenebat autem in remis pars exterior SO
 ad partem internam RO rationem duplam, atque om-
 nium remorum planities, quibus aqua findebatur, aesti-
 mabatur 130 pedum quadratorum. Resistentia triremis
 non assignatur, videtur autem ea tanta assumi posse, quan-
 tum patiatur superficies 20 ped. quadratorum aequali ce-
 leritate directe in aqua mota.

§. 631. Primum discrimen statim in eo versatur, quod
 in hoc exemplo singulis remigibus tantum semissis pedis
 quadrati, quo aquam percutiunt, tribuatur; dedimus autem
 haecenus unicuique remo planitiem vnius pedis quadrati;
 quare hoc casu erit $gb = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{v:gb} = \gamma = 1$. Mirum
 autem non est, hic minorem planitiem vni remigi re-
 spondere, quoniam plures remiges vni remo erant admoti,
 atque planities remorum non in eadem ratione augeri po-
 test, si enim casu duorum remigum vni remo admoto-
 rum velimus superficiem remi duplicare, pondus remi in
 ratione $2\sqrt{2} : 1$ augeri deberet; ex quo duo homines
 multo maiorem difficultatem offenderent ad hunc remum
 mouendum, quam vnus homo ad remum simplicem.
 Etsi ergo, si quisque remex remum vibrat, assumi potest
 $gb = 1$, in casu praesente tamen valor ipsius gb erit $= \frac{1}{2}$.

§. 632. Quoniam numerus remigum est 260, fiet
 $\psi = 43\frac{1}{3}$; hinc erit ob $ff = 20$ circiter, $\frac{\psi}{ff} = 2$,
 1666 etc. haec autem quantitas, quia pendet a vi cuius-
 que remigis, quae valde est variabilis, et modo intendi
 modo remitti potest, non tam exacte definiri potest, sed

ſi remiges maiorem vim intendant, augetur, contraque diminuitur. In caſu præſente videntur remiges omnibus viribus labori incubuiſſe, quia ſingulis minutis 24 vibrati-ones abſoluiſſe perhibentur, ita vt quantitas $\frac{\psi}{ff}$ maiorem valorem habuiſſe videatur. Sumamus ergo $\frac{\psi}{ff} = 2, 56$ vt fit $\sqrt{\frac{\psi}{ff}} = 1, 6$; et $\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}} = 2, 6$. Porro ratio partium cuiusque remi SO : RO erat dupla ideoque $\frac{a}{b} = z = 2$, hincque ex §. 620, reſultat altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{10, 24}{14, 76}$ ped. qua ergo nauis ſingulis minutis primis abſoluet 395 ped. hincque ſingulis minutis ſecundis 6, $\frac{7}{12}$ ped.

§. 633. Experientia autem docuit iſtam nauem ſingulis minutis confeciſſe $7\frac{1}{5}$ pedes, quamobrem neceſſe eſt vt vel remiges multo maiorem vim exercuerint, quam quidem aſſumſimus, vel reſiſtentia nauis minor fuerit quam quae plano 20 ped. quadr. deſignari queat. Maiorem ergo fuiſſe oportet valorem $\frac{\psi}{ff}$, quam poſuimus, quamobrem eius valorem a poſteriori inueſtigemus. Sit ergo $\sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \delta$ erit $v = \frac{4\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}$; cui vno minuto ſecundo reſpondet ſpatium $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{400\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}}$ ped; quod cum eſſe debeat $7\frac{1}{5}$ ped. erit $\frac{z6}{5} = \sqrt{\frac{250\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}}$, ex qua fit $\delta = 1, 7964$ hincque $\frac{\psi}{ff} = 3, 2367$. Ita vt fuerit vel ff tantum 13, 39 ped. quadr. vel remiges maiorem vim quam 32 libr. impenderint vel vtrumque.

§. 634. Cognito iam per experientiam valore $\delta = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$, inquiramus, quantum ratio $\frac{SO}{RO} = z$, quae erat = 2 discrepet ab ea, quae naui maximam celeritatem ceteris paribus imprimere valet. Scilicet cum fit $v = \frac{\delta\delta z z}{z^3 + (z+\delta)^2}$

fiet haec expressio maxima, si fuerit $z^3 = 2(1 + \delta)^2 = 15$, 638, quae praebet $z = 2$, $5 = \frac{SO}{RO}$. Quare si remorum pars exterior ad interiorem habuisset rationem vt 2, 5 ad 1 seu vt 5 : 2, tum iidem remiges nauem adhuc celerius, idque cellerrime, quantum eadem vi licet, promouissent. Hoc enim casu foret $v = \frac{20220}{23457}$ ped. qua celeritate minuto secundo absoluuntur pedes 7, 3416. minuto primo autem 440, 496, et hora vna 26429, 76 ped. Ratione autem $\frac{SO}{RO} = 2$ nauis vno minuto secundo fecit 7, 2 ped. vno minuto primo 432 ped. et vnius horae spatio 25920 ped.

§. 635. Exemplo hoc non solum theoria, quam de actione remorum exposuimus, confirmatur, verum etiam ipsa praxis huius theoriae ope ad maiorem perfectionis gradum euehi poterit. Per experientiam quidem iam satis prope ii casus, quibus maximum minimumue locum habet, sunt eruti, atque etiam in exemplo allato ratio $SO : RO = 2 : 1$ non tantopere a vera et maxime lucrosa 5 : 2 differt, quam videatur: dum enim plures remiges vni remo erunt admoti, omnes non in eodem puncto remum sollicitare possunt, ex quo pars remi interior RO minor aestimari debet, quam reuera est, qua diminutione ratio $SO : RO$ a ratione 5 : 2 parum discrepabit. Neque tamen sola praxis sine subsidio theoriae verum cuiusque maximi minimiue gradum supeditare valet; hincque theoria perpetuo praxi quantumuis iam excultae insigne adiumentum ac lucrum afferet.

§. 636. Quoniam igitur in agitatione remorum consueta tam exigua portio virium, quas remiges exerunt, ad nauis promotionem impenditur; eo quod duas temporis, qua

qua vnaquaeque agitatio absoluitur, partes in eleuatione remorum eorumque noua applicatione consumunt, vnamque tantum partem remos in aqua vibrant. Quo fit vt etiam in hoc temporis articulo non solum multum de vi sua perdant, antequam remum ad motum aequabilem perducant, sed etiam maximam partem remum oblique percutiant, quoniam vtrumque effectum remi vehementer debilitant. Primum igitur duae tertiae partes totius vis a remigibus exertae inutiliter pereunt; ac deinde quauis agitatione motus de nouo generari debet; neque enim motus in praecedente agitatione genitus, quicquam ad sequentem confert, quin potius motus ante productus totus destrui debet, quod sine virium dispendio fieri nequit. Ex quo mirum non est de 32 libris, quas cuique remigi tribuimus tantum $3\frac{1}{3}$ libras ad nauis propulsionem redundare.

§. 637. Incommodum hoc practici quoque iam pridem senserunt, et hancobrem alium remigandi modum proposuerunt, quo remi in rotam dispositi motu continuo in gyrum agantur. Qui modus vtique, si commode ad praxin accommodari possit insigni gauderet praerogatiua Tab. XVIII.
fig. 6. prae modo solito. Primo enim omnis vis, quae continuo ad rotam circumagendam impenditur, perpetuo remos contra aquam impellit, neque vilo tempore vis omnino inutiliter collocatur. Deinde motus rotae semel impressus non solum non destrui debet, sed etiam non parum confert ad vniformitatem conseruandam; ita vt nulla virium portio inutiliter impendatur, nisi quae ad frictionem superandam requiritur. Quo igitur intelligatur, quantum emolumentum ab huiusmodi machina sit expectandum, effectum ab ea oriundum calculi ope determinabimus; si-
mul

mulque inuestigabimus, quomodo ea ad institutum maxime idonea sit instruenda.

§. 638. Ad vtrumque igitur naus latus constituta sit rota mobilis circa axem horizontalem O , cuius radii OA , OB , OC , etc. sint totidem remi cylindro O tam firmiter affixi, quantum vis ab ipsis sustinenda postulat. Vnus quisque ergo radius erit remus, cuius superficies, qua aquam percutit, cum axe horizontali in eodem plano est sita. Sit IK superficies aquae cui remorum partes $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, $E\varepsilon$, $F\zeta$ immergantur, atque circum agatur rota in sensum $ABCDE$, vt palae remorum submersae in aquam impingant. A vi igitur aquae naus secundum directionem KI promouebitur; vires enim, quam singulae palae sustinent, eundem in naui propellenda effectum exerent, ac si in directionibus parallelis in centro grauitatis naus essent applicatae.

§. 639. Ponamus nauem motum vniformem iam esse adeptam, quo in directione K progrediatur celeritate altitudini v debita; quem motum si in aquam transferamus, perinde erit, ac si naus quiesceret, atque aqua in directione IK celeritate eidem altitudini v debita incurreret. Sit quoque celeritas, qua rota in plagam $ABCD$ conuertitur, aequabilis et altitudo debita celeritati, qua extremitates radiorum A , B , C , etc. circumaguntur, sit $=u$. Longitudo radiorum OA ponatur $=a$, et latitudo palae aquam findentium sit $=g$. Teneat pala OD situm verticalem, sitque eius pars δD aquae submersa $=b$, ita vt huius palae superficies aquam percutiens sit $=gb$; erit pars radii extra aquam cminens $O\delta = a - b$. Consideretur iam alia quaecunque pala OC cum verticali OD
an-

angulum constituens COD, cuius sinus fit = m , cosinus = n , posito sinu toto = r , erit $\frac{O\delta}{O\gamma} = n$, et $O\gamma = \frac{a-b}{n}$ hincque pars aquam findens γC erit = $a - \frac{a-b}{n} = \frac{b-(1-n)a}{n}$, quae motu angulari circa O in aquam impingit.

§. 640. Consideremus huius palae elementum quodcunque X, in aqua versans, cuius ab axe O distantia sit $OX = x$. Hoc ergo punctum in directione ad OC normali XN mouebitur celeritate = $\frac{x\sqrt{u}}{a}$; tantaque celeritate aqua in hanc palam incurreret in directione NX, si aqua non haberet motum proprium. At cum ob motum navis aqua moueatur in directione HX celeritate Vv ; sumto $XN = \frac{x\sqrt{u}}{a}$, capiatur $XM = Vv$, et compleatur parallelogrammum XMLN, cuius diagonalis LX tam directionem quam celeritatem, qua aqua in X incurrit, representabit. Erit autem vis aquae incurrentis, vt quadratum celeritatis XL^2 et quadratum sinus anguli incidentiae LXC coniunctim, ex quo vis aquae erit vt XL^2 (sin. LXC)². Est vero sin. LXC = cof. LXN, et (sin. LXC)² = $1 - (\text{sin. LXN})^2$ et propter sin. LXN = $\frac{LN \text{ sin. LNX}}{XL}$, erit (sin. LXC)² = $1 - \frac{LN^2 (\text{sin. LNX})^2}{XL^2}$.

§. 641. Cum iam sit anguli XNL sinus = m , et cosinus = n , erit $XL^2 = v + \frac{xxn}{aa} - \frac{2nx\sqrt{vu}}{a}$; et LN^2 (sin. LNX)² = mmv ; hincque oritur vis aquae in elementum X vt $(\frac{x\sqrt{u}}{a} - nVv)^2$, quae si ducatur in elementum gdx dabit volumen aquae = $gdx (\frac{x\sqrt{u}}{a} - nVv)^2$, cuius pondus aequale est vi aquae impingentis. Directio huius vis normalis est ad superficiem palae, ex eaque ergo oritur vis nauem horizontaliter promouens = $ngdx (\frac{x\sqrt{u}}{a} - nVv)^2$

Pars II.

V v

nVv

$n\sqrt{v})^2 = ng dx \left(\frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{uv}}{a} + nnv \right)$, quae integrata
 dat $\frac{ngx^3u}{3aa} - \frac{nngxx\sqrt{uv}}{a} + n^3g xv - \frac{g(a-b)^3u}{3naa} + \frac{g(a-b)^2\sqrt{uv}}{a} -$
 $nng(a-b)v$. Ponatur $x=a$, ac prodibit vis a tota pa-
 la $C\gamma$ ad nauem promouendam orta $= \frac{nga^3u}{3} - nnga\sqrt{uv}$
 $+ n^3gav - \frac{g(a-b)^3u}{3naa} + \frac{g(a-b)^2\sqrt{uv}}{a} - nng(a-b)v$.

§. 642. Praeterea vero vis aquae circumactionem
 rotae impedit, qui effectus propterea vi hominum com-
 pensari debet. Determinanda haec ex momento, quod
 ista vis respectu axis O praebet, quod est $= gxdx \left(\frac{xxu}{aa} \right.$
 $- \frac{2nx\sqrt{uv}}{a} + nnv)$. Huius integrale est $= \frac{gx^4u}{4aa} - \frac{2nngx^3\sqrt{uv}}{3a}$
 $+ \frac{nngxxv}{2} - \frac{g(a-b)^4u}{4n^4aa} + \frac{2g(a-b)^3\sqrt{uv}}{3n^2a} - \frac{g(a-b)^2v}{2}$. Ponamus x
 $= a$, vt prodeat totum momentum a pala $C\gamma$ ortum
 circumactioni rotae resistens $= \frac{ga^4u}{4} - \frac{2nga^3\sqrt{uv}}{3} + \frac{nnga^2v}{2} -$
 $\frac{g(a-b)^4u}{4n^4aa} + \frac{2g(a-b)^3\sqrt{uv}}{3na} - \frac{g(a-b)^2v}{2}$. Hic autem vbique no-
 tandum est esse debere $\frac{x\sqrt{u}}{a} \gtrsim n\sqrt{v}$; oportet ergo esse
 $\frac{(a-b)\sqrt{u}}{na} \gtrsim n\sqrt{v}$ seu $a-b \gtrsim \frac{nna\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. In situ ergo verticali;
 OD debet esse $a-b \gtrsim \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ seu $\frac{O\delta}{OD} \gtrsim \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$; quod, si euenerit
 in omni situ obliquo simul erit $\frac{x\sqrt{u}}{a} \gtrsim n\sqrt{v}$.

§. 643. Ponamus iam rotam duodecim radiis esse
 instructam, vti figura repraesentat, ac pro binis radiis
 OC et OE verticali OD proximis erit $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pro se-
 quentibus OB et OF erit $n = \frac{1}{2}$. Numerus igitur pala-
 rum aquam simul percutientium pendebit ab eleuatione a-
 xis O supra aquae superficiem; quae tanta esse debet, vt
 fit $\frac{O\delta}{OD} \gtrsim \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$: sumamus ergo $O\delta = a-b = \frac{1}{2}a$, vt fit
 $b = \frac{1}{2}a$, atque si radius OD sit verticalis, praeter eum
 duo tantum remi proximi OC et OE in aqua versabun-
 tur. Etsi autem motu rotae quatuor radii in aquam por-
 riguntur,

riguntur, tamen quia tum oblique mouentur, vis eorum tuto aequalis aestimari potest vi trium, quorum medius est verticalis; ita vt rota perpetuo eandem vim exercere fit censenda.

§. 644. Pro radio igitur verticali OD est $n = 1$, ex eoque ad nauem propellendam vis nascitur $\frac{7gau}{24} - \frac{2ga\sqrt{uv}}{4} + \frac{gav}{2}$. Pro radio vero OC est $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ex eoque nascitur vis ad nauem propellendam $= \frac{gau}{3} (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}) - \frac{2ga\sqrt{uv}}{2} + \frac{gav}{3} (3\sqrt{3} - 3)$, quae cum eadem sit pro radio OE nauis a tribus radiis OC, OD et OE atque adeo a tota rota propelletur vi $= \frac{gau}{3} (\frac{13}{24} + \sqrt{3}) - \frac{2ga\sqrt{uv}}{4} + gav (\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4})$ quae sumtis in fractionibus decimalibus valoribus proximis abit in $0,757905.gau - 1,75.ga\sqrt{uv} + 1,049037.gav$. Haec igitur vis nauem propellens aequalis esse debet resistentiae, quam nauis in aqua patitur, quae vt supra assumimus fit $= ffv$, ita vt iam habeatur vna aequatio $ffv = 0,757905.gau - 1,75.ga\sqrt{uv} + 1,049037.gav$, qua ratio inter v et u continetur, vt fit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + \sqrt{(1,31942.\frac{ff}{ga} - 0,05126)}$.

§. 645. Momentum iam vis aquae a radio verticali OD ortum est $= \frac{15gau}{64} - \frac{7gaa\sqrt{uv}}{12} + \frac{3gaa\sqrt{v}}{8}$: at momentum a radio OC vel OD ortum ob $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erit $= \frac{2gaa\sqrt{u}}{9} - \frac{gaa\sqrt{uv}}{9} (3\sqrt{3} - 1) + \frac{gaa\sqrt{v}}{4}$, cuius duplum ad praecedens momentum totale, quo rota ab aqua impeditur $= \frac{391}{378} ga^2u - gaa\sqrt{uv}(\frac{13}{26} + \frac{2\sqrt{3}}{3}) + \frac{7gaa\sqrt{v}}{8}$; seu in fractionibus decimalibus $0,67882.gaa\sqrt{u} - 1,51581.gaa\sqrt{uv} + 0,875.gaa\sqrt{v}$, quod ductum in $\frac{M}{V}$ dabit momentum ponderis, cui

V 2

aequa-

aequale esse debet momentum virium rotam circumagentium. Denotat autem M pondus totius nauis, et V volumen carinae, ita vt si V in pedibus cubicis et M in libris exprimatur fit $\frac{M}{V} = 64$.

§. 646. Ex relatione autem inter u et v supra inventa reperitur $\frac{u}{v} = 1,28160 + 1,31942 \cdot \frac{ff}{ga} + 2,3090$
 $V(1,31942, \frac{ff}{ga} - 0,05126)$, ex qua si valores loco u
 et Vu in momento nunc inuento substituantur, prodibit
 hoc momentum $= \frac{Mgaav}{V} (0,89565 \cdot \frac{ff}{ga} + 0,05158 V$
 $(1,31942 \cdot \frac{ff}{ga} - 0,05126))$. Quae formulae, si ff fue-
 rit multo maius quam ga ob terminum $0,05126$ valde
 paruum multo fieri possunt simpliciores; fiet nimirum $\frac{vu}{v}$
 $= 1,1545 + 1,14866 \cdot \frac{f}{\sqrt{ga}}$ et $\frac{u}{v} = 1,28160 + 2,$
 $65225 \cdot \frac{f}{\sqrt{ga}} + 1,31942 \cdot \frac{ff}{ga}$; hincque porro momentum
 a vi aquae ortum et motui rotae contrarium erit $= \frac{Mgaav}{V}$
 $(0,05925 \cdot \frac{f}{\sqrt{ga}} + 0,89565 \cdot \frac{ff}{ga})$.

§. 647. Ponamus iam rotam hanc ope eiusmodi ergatae circumagi, vt dum ergata semel conuertitur, rota faciat n reuolutiones. Sit longitudo vectium quibus ergata circum agitur $= b$, atque numerus hominum ergatam voluentium ponatur $= \theta$, qui numerus ante erat $\theta \psi$. Celeritas igitur hominum se habebit ad celeritatem rotae in extremitate D , quae est $= Vu$, in ratione composita ex ratione $1: n$ et ratione $b: a$, ex quo celeritas hominum erit $= \frac{b\psi u}{na}$, et altitudo huic celeritati debita $= \frac{bbu}{na^2}$. Hinc si vis, quam quisque homo quiescens valeat exerere ponatur $= p$, erit vis qua tanta celeritate progrediens exercere valet $= p(1 - \frac{bbu}{na^2\alpha})$ denotante α altitudinem vnus
 pedis

pedis momentum ergo omnium hominum ad ergatam circumagendam erit $= \theta pb \left(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha} \right)$, quod ad axem rotæ translatum fit $= \frac{\theta pb}{n} \left(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha} \right)$.

§. 648. Quoniam vero ad vtramque nauis partem vnâ eiusmodi rotam collocamus, vis aquæ tam absoluta, qua nauis propellitur, quam momentum inde ortum duplicari debet. Duplum igitur vis illius absolutæ supra (644) æquare debuissimus ipsi $\frac{ff}{2} v$, vel ipsam vim huius semissi $\frac{1}{2} ff v$, vnde scribendo $\frac{ff}{2}$ loco ff , orietur $\frac{v}{v} = 1, 1545 + \sqrt{1, 31942. \frac{ff}{2ga} - 0, 05126} = 1, 1545 + 1, 14866. \frac{f}{\sqrt{2ga}}$ quam proxime, et $\frac{v}{v} = 1, 2816 + 2, 65225. \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1, 31942. \frac{ff}{2ga}$. Momentum vero quod vtraque rota ab aqua coniunctim suffert erit $= \frac{2Mgaav}{V} \left(0, 05925. \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0, 89565. \frac{ff}{2ga} \right)$, cui æquale esse deberet momentum virium sollicitantium, si nulla esset frictio superanda.

§. 649. Cum igitur frictio in machina tantopere composita sit admodum notabilis, eo quod tam axis rotæ quam axis ergatæ frictionem patientur, momentum impedimentorum augeri debet. Addamus ergo ad momentum illud ab aqua ortum frictionem cuius momentum ad axem rotæ relatum, ab vtraque rota fit $= 2Fa$, atque si aggregatum momento virium sollicitantium æquale ponamus, habebimus hanc æquationem. $\frac{2Mgaav}{V} \left(0, 05925. \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0, 89565. \frac{ff}{2ga} \right) = \frac{\theta pb}{n} - \frac{\theta pb^3v}{n^3a^2\alpha} \left(1, 2816 + 2, 65225. \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1, 31942. \frac{ff}{2ga} \right)$ ex qua obtinetur altitudo celeritati nauis debita $v = \left(\frac{\theta pb}{n} - 2Fa \right) \frac{2Mgaav}{V}$

$\frac{2Mgaa}{V} (0,05925 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565 \cdot \frac{ff}{2ga}) + \frac{\theta pb^3}{n^3 a^2 \alpha} (1,2816 + 2,65225 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,3194 \cdot \frac{ff}{2ga})$ vnde ipsa navis celeritas potest determinari.

§. 650. Quo haec expressio tractabilior reddatur, ponamus $\frac{b}{n} = z$; sitque brevitatis gratia $\gamma = 0,05925 \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565 \frac{ff}{2ga}$ et $\delta = 1,2816 + 2,65225 \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,3194 \frac{ff}{2ga}$, erit autem accuratius nullo neglecto termino: $\gamma = 0,44782 \frac{ff}{ga} + 0,05158 \sqrt{0,65971 \frac{ff}{ga} - 0,05126}$ $\delta = 1,2816 + 0,65971 \frac{ff}{ga} + 2,309 \sqrt{0,65971 \frac{ff}{ga} - 0,05126}$. Quibus factis substitutionibus erit altitudo debita celeritati, qua navis propelletur $v = \frac{\theta rz - Fa}{\frac{2Mgaa\gamma}{V} + \frac{\theta rz^3 \delta}{aa}}$.

Exprimantur longitudines in pedibus rhenanis, eritque $\frac{M}{V} = 64$; ac ponatur vt haecenus $p = 32$ libr et $\alpha = 1$ ped. Praeterea sit momentum $2Fa = 32k$, nempe sit frictio tanta ad quam superandam axi rotae in distantia k ap-

plicari debeat pondus 32 librarum: eritque $v = \frac{\theta z - k}{4gaa\gamma + \frac{\theta z^3 \delta}{aa}}$

§. 651. Patet hic eiusmodi valorem ipsi z tribui posse vt celeritas navis fiat maxima ceteris paribus, ad quem inveniendum differentiatur formula ipsi v aequalis, eritque $4gaa\gamma \theta - \frac{\theta \theta \delta z^3}{aa} + \frac{k \theta \delta z z}{aa} = 0$, seu $4gaa\gamma = 2\theta \delta z^3 - 3k \delta z z$. Sit $k = \mu z$, denotabit μ numerum hominum, qui frictionem ergatae superare valeant; ita vt nullus motus ipsi induci queat, nisi numerus hominum θ excedat numerum μ : erit ergo frictione hoc modo in computum ducta $v = \frac{(\theta - \mu) z}{4gaa\gamma + \frac{\theta \delta z^3}{aa}}$ ex qua pro maxima celeri-

tate

tate reperitur $2ga^* \gamma = \theta \delta z^3$; hincque oritur $z = \sqrt[3]{\frac{2ga^* \gamma}{\theta \delta}} = \frac{b}{n}$.
 Ex hac ergo aequatione reperietur vel longitudo vectium b ergatae infigendarum, si detur ratio inter celeritatem ergatae et rotae; vel si detur longitudo b reperietur numerus $n = \frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{\theta \delta}{2ga^* \gamma}}$, qui indicat, quoties rota circumagi debeat, dum ergata semel conuertitur.

§. 652. Ex hoc valore ipsius $z = \sqrt[3]{\frac{2ga^* \gamma}{\theta \delta}}$ oritur ergo celeritas naus maxima, cuius altitudo debita erit $v = \frac{(\theta - \mu) \sqrt[3]{\frac{2ga^* \gamma}{\theta \delta}}}{6ga^* \gamma} = \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{4g^2 a^2 \gamma^2 \theta \delta}}$. Quoniam fere est $\gamma = 0$,

89565. $\frac{ff}{2ga}$, erit $4g^2 a^2 \gamma^2$ quantitas constans nempe $= (0, 89565)^2 f^4$, eo quod ff repraesentat resistentiam naus absolutam non ab arbitrio nostro pendentem. Vnde intelligitur celeritatem insuper per valorem ipsius δ augeri posse, ipsum minuendo quantum fieri potest. Hoc autem fit augendo valorem ga ita vt celeritas naus videatur quousque libuerit augeri posse. At vero, primum augetur frictio, ob machinam ponderosorem factam, qua celeritati multum decederet. Tum vero, quam primum valor $\frac{ff}{2ga}$ minor fit vnitate, valor pro γ assumtus ob aliquot neglectos terminos non amplius valet, totaque conclusio concidit.

§. 653. Cum igitur tota disquisitio iam a valore $\frac{ff}{ga}$ pendeat, ponamus $\frac{ff}{ga} = m$, erit $v = \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\frac{\theta f^4}{mm}}}$ $\gamma^2 \delta$ et $z = \frac{b}{n} = a \sqrt[3]{\frac{2ff\gamma}{m\theta\delta}}$. Atque loco m successiue ponamus numeros 1, 2, 3, 4, etc. indeque valores conuenientes pro γ et δ inuesti-

inuestigemus, qui in formulis substituti efficient vt quantitates z et v per solas quantitates θ , μ et f determinentur. Loco m vero numeros vnitatis minores non substituo, quia valor ga ob grauissimas causas maior ipso ff accipi non potest. Si enim nauis sit exigua, tum ea tantam machinam, qualem valor ipsius ga ipsum ff superans requireret, sustinere non posset, et in nauibus grandioribus, ob ff iam satis magnum, valor ipsius ga necessario minor capi debet.

§. 654. En igitur sequentem tabellam :

$m = 1$	$\gamma = 0,48805$	$\delta = 3,74241$
$m = 2$	$\gamma = 0,95372$	$\delta = 5,20125$
$m = 3$	$\gamma = 1,41508$	$\delta = 6,46672$
$m = 4$	$\gamma = 1,87425$	$\delta = 7,63469$
$m = 5$	$\gamma = 2,33205$	$\delta = 8,74102$
$m = 6$	$\gamma = 2,78887$	$\delta = 9,80386$
$m = 7$	$\gamma = 3,24497$	$\delta = 10,83392$
$m = 8$	$\gamma = 3,70048$	$\delta = 11,83797$
$m = 9$	$\gamma = 4,15552$	$\delta = 12,82095$
$m = 10$	$\gamma = 4,61016$	$\delta = 13,78624$

§. 655. Substituantur hi valores successiue in formulis

$$\frac{za}{b} = \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff} \cdot \frac{m\delta}{2\gamma}} \text{ et } v = \frac{(\theta-\mu)}{3} \sqrt[3]{\frac{mm}{4\theta f^2 \gamma^2 \delta}} = \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{mm}{10\gamma^2 \delta}} \text{ seu}$$

$$v = \frac{\theta-\mu}{6\sqrt[3]{\theta f^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{mm}{\gamma^2 \delta}}; \text{ prodibitque haec tabula :}$$

$m = \frac{ff}{ga} = 1$	$\frac{na}{b} = 1,56514$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,21819$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 2$	$\frac{na}{b} = 1,76019$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,19856$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 3$	$\frac{na}{b} = 1,89961$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,18600$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 4$	$\frac{na}{b} = 2,01217$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,17677$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 5$	$\frac{na}{b} = 2,10824$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,16950$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 6$	$\frac{na}{b} = 2,19298$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,16352$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 7$	$\frac{na}{b} = 2,26924$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15844$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 8$	$\frac{na}{b} = 2,33898$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15405$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 9$	$\frac{na}{b} = 2,40345$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15019$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 10$	$\frac{na}{b} = 2,46358$	$\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,14675$	$\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$

§. 656. Ex hac tabula intelligitur celeritatem nauis eo fore maiorem, quo minor fuerit valor $\frac{ff}{ga}$, hoc est quo maior fit cum radius rotæ a , tum latitudo palarum g . Neque vero valor ipsius v admodum decrefcit, crescente valore fractionis $\frac{ff}{ga}$; hic enim si decuplò maior capiatur, altitudo v nequidem fui triente diminuitur, ideoque ipsa celeritas vix sexta fui parte debilitatur. Ceterum si $\frac{ff}{ga}$ vnitatem minor capiatur, altitudo v crescit vsque ad certum terminum, post quem iterum decrefcit, quoad fiat $\frac{ff}{ga} = \frac{0,05126}{0,63971}$, quo casu fit circiter $v = 0,07$, $\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Sin-

autem ponamus $m = \frac{ff}{ga} = \frac{1}{3}$; fit $\gamma = 0,25113$, $\delta = 2,83021$ et $\frac{na}{b} = 1,41239 \sqrt[3]{\frac{\theta}{jf}}$; $v = 0,23494 \cdot \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$ si fiat $m = \frac{ff}{ga} = \frac{1}{10}$ oritur $\gamma = 0,04808$; $\delta = 1,62762$ et $\frac{na}{b} = 1,19175 \sqrt[3]{\frac{\theta}{jf}}$ atque $v = 0,29090 \cdot \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$.

§. 657. Operae igitur vtique pretium esset hoc maximum inuestigare, si inde vsus in praxi expectari posset: sed praeterquam, quod ob auctam rotae molem frictio μ augeatur, hincque valor v diminuatur, conditionem praecipuam nondum in calculum vocauimus, qua supra (643) vidimus necessario esse debere $\frac{O\delta}{OD} \geq \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, alioquin enim rota non sui parte antica in aquam impingeret. Quoniam igitur summus $O\delta = \frac{1}{2}OD$ debet esse $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} < \frac{1}{2}$ et $\frac{u}{v} > 4$. at est $\frac{u}{v} = \delta$; quamobrem necesse est vt fit $\delta > 4$. Hinc perspicitur casum primum quo $m = \frac{ff}{ga} = 1$ sine detrimento celeritatis adhiberi non posse, quia est $\delta < 4$ ideoque aqua in partem rotae posticam quodammodo irruit, et effectum diminuit. Sequentes vero casus omnes, quia in ipsis est $\delta > 4$, vtiliter ad praxin transferri possunt neque experientia sensibilibiter a theoria dissentire deprehendetur.

§. 658. Celerrime ergo nauis propelletur, si ipsi $\frac{ff}{ga}$ eiusmodi tribuatur valor, cui respondeat $\delta = 4$, tum enim tota rota, qua aquae immergitur, aquam percutiet nauem que propellet. Reperitur autem tum $\frac{ff}{ga} = 1,16240$ et $\gamma = 0,55745$, atque porro $\frac{na}{b} = 1,60963 \sqrt[3]{\frac{\theta}{jf}}$ et $v = 0,21590 \cdot \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Rota ergo primo ita institui debet, vt

fit

fit $ga = \frac{ff}{1,1624} = \frac{6}{7}ff$ proxime : sicque tam latitudo pak-
rum g , quam longitudo radiorum a habita reliquarum
circumstantium ratione determinabitur. Deinde si detur
numerus operariorum θ , definietur commodissima ratio
 $\frac{za}{b}$, simulque altitudo debita celeritati naui v , ex qua spa-
tium, quod naui dato tempore percurret, assignari pote-
rit; datur enim altitudo illa v in pedibus rhenanis.

§. 659. Quo praerogatiua huius remigandi modi prae
confuero perspici queat, ex antecedentibus repetamus,
quae de celeritate naui a $\sigma\psi$ remigibus propulsae sunt al-
lata. Inuenimus autem fore altitudinem celeritati debitam

$v = \frac{2\delta\delta}{\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}} = \frac{2\psi}{\sqrt[3]{ff^3(\sqrt[3]{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}}$ (623, 625) denotante gb
amplitudinem remi vnus. In motu ergo remorum ordinario

semper est $v < \frac{2\psi}{\sqrt[3]{ff^3\frac{\psi}{ff}}}$, eoque magis v ab isto limite di-

stabit, quo minor fuerit fractio $\frac{\psi}{ff}$. Ponatur iam numerus
remigum $\sigma\psi = \theta$, vt sit $2\psi = \frac{1}{3}\theta$, fiet $v < \frac{\theta}{\sqrt[3]{9\sqrt[3]{10}f^4}}$ feu

in fractionibus decimalibus erit $v < 0,16025 \frac{\theta}{\sqrt[3]{10}f^4}$. quae

quantitas multo minor est, ea, quae, si remi in rota disponan-
tur, est inuenta, erat enim $v = 0,21590 \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{8}f^4}$, si omnia

ad celerrimum motum naui vtroque modo imprimendum
disponantur.

§. 660. Quoniam celeritas naui maxima ope rotae
propulsae debita est altitudini $0,21590 \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{10}f^4}$, erit haec alti-

tudo minor quam $0,21590 \frac{\theta}{\sqrt[3]{10}f^4}$. Quare cum altitudo

debita celeritati naus ope remorum propulſae ſit minor quam $0,16025 \cdot \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, a veritate non multum aberrabimus, ſi hos defectus ipsis quantitibus proportionales ſtatuamus. Quod ſi ergo vtroque caſu idem hominum operantium numerus adhibeatur, erit celeritas naus ope remorum propulſae ad celeritatem naus ope rotae propulſae vt $\sqrt[3]{16025}$ ad $\sqrt[3]{21590}$ hoc eſt vt 1 ad 1,16072 ſeu vt 6 : 7 proxime. Sexta igitur parte eadem naus ab eodem hominum numero ope rotae celerius promoueri poterit, quam ope remorum, conſueto more adhibitorum, quod ſane eſt lucrum minime ſpernendum.

§. 661. Quia idem hominum numerus eandem nauem ope rotae celerius promouere poteſt quam ope remorum, patet ſi celeritas naus ſit propoſita, pro rota pauciores homines requiri quam pro remis. Sit numerus hominum nauem remis promouentium = η , ac numerus hominum, qui ope rotarum eandem nauem eadem celeritate propellere valent = θ , erit $0,21590 \cdot \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}} = 0,16025 \cdot \frac{\eta}{\sqrt[3]{\eta f^4}}$

ſeu $21590 \sqrt[3]{\theta^2} = 16025 \sqrt[3]{\eta^2}$: hincque $\theta : \eta = 16025^{3:2} : 21590^{3:2} = 1 : 1,5638$; erit ergo $\theta : \eta = 2 : 3$ ſeu propius vt 16 : 25, ſi igitur loco remorum rotae adhibeantur, tum tertia operariorum parte ſuperfederi poterit: ſcilicet ſi naus remis inſtructa poſtulet 25 remiges, naus rotis inſtructa tantum 16 hominibus opus habebit, vt aequali celeritate propellatur.

§. 662. Ex tabula autem computata ſimul intelligitur quanta circumſpectio ad rotam aſtruendam opus ſit, vt tantum lucrum obtineatur. Primo enim in machina

ea ipsa proportio inter na et b obseruari debet, quam inuenimus; a qua si nimium recedatur, celeritas nauis sensibilibiter diminuetur. Deinde vero praecipue ratio inter ff et ga cum ea, quam assignauimus, satis prope congruere debet: minor enim statui nequit, quin simul portio vis aquae ad nauem repellendam impendatur. Quod si autem $\frac{ff}{ga}$ maior capiatur, quam 1 , 1624 tum celeritas nauis continuo fiet minor, ita vt facta $\frac{ff}{ga} = 6$ celeritas nauis vix superatura sit celeritatem, quae ipsi a remis imprimi potest. Quamobrem si quis forte hanc remigandi modum ad praxin deducere velit, probe ad praecepta tradita attendere debet, ne loco lucri detrimentum patiatur.

§. 663. Quamuis autem iste naues propellendi modus prae solito remigandi modo insigni gaudeat praerogatiua, tamen tantis coniunctus est incommodis, si ad praxin respiciamus, vt haec incommoda lucrum longe superent. Primum enim huiusmodi ergata, quae ope rotae dentatae remos in gyrum dispositos circumagat, in nauibus non nimis magnis non solum spatium requireret satis magnum sed etiam pondus nauis totum tantopere auget, vt hinc non exigua retardatio oriatur. Deinde etiam si spatium esset idoneum ad eiusmodi machinam collocandam, tamen tot operarii; quod requiruntur, locum non inuenirent vires suas machinae applicandi. In triremi ordinaria certe, ad quam propellendam plures quam 100 homines adhiberi debent, ergata tot hominibus circumagenda nullo modo effici poterit. In minoris vero moduli nauigiis de ergata ipsis imponenda nequidem cogitari potest.

§. 664. Missa itaque ergata de machina simpliciori

Tab. XIX.
fig. I.

cogitare debemus, cuius ope rotæ remis instructæ circumagi, simulque sufficiens hominum numerus operi ad-moueri queat. In hunc finem machina videtur commo-dissima, si axis OO , cui vtrunque extra nauem Rota Dd est affirmata, intra nauem incuruetur in figuram RS SR : tum enim plures homines in naui sedentes pro na-vis latitudine prehendentes partem SS partim trahendo par-tim trudendo rotas Dd circumagent hocque nauem pro-pellent. Atque cum hoc modo nulla ergata adhibeatur, fiet $n = 1$, atque b denotabit longitudinem radii RS ; existente $OD = Od = a$. Non solum igitur ista machi-na mole illa ingenti, quam commemorauimus, caret, sed etiam homines sedendo opus administrabunt, neque discursando incommodum afferent; ita vt hinc plus non nascatur incommodi, quam a remigum labore ordinario.

§. 665. Si igitur duabus rotis nauis instruat, vti haecenus possuimus, ac resistentia nauis aequalis sit resi-stentiae plani ff , primum esse debet proxime $ga = \frac{6}{7} ff$. Scilicet si vtraque rota ex duodecim remis sit composita atque ad medietatem radiis DK aquae immergatur, re-ctangulum ex longitudine vnus radii a in latitudinem g debet esse $= \frac{6}{7} ff$. Quoniam vero f proxime profundita-tem, ad quam nauis submergitur denotat, radius $OD = a$ duplum ipsius f excedere nequit, ne rota profundius quam ipsa nauis submergatur. Si igitur capiatur $a = 2f$, rema-nebit pro $g = \frac{3}{7} f$. Deinde si numerus remigum sit $= \theta$

capi debet $\frac{\pi a}{b}$ hoc est $\frac{OD}{RS} = 1$, $60963 \sqrt[3]{\frac{16}{ff}}$, superficie ff in pedibus quadratis expressa. His vero ita instructis celeritas nauis debita erit altitudini $v = 0$, $21590 \cdot \frac{\theta - 14}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$ pcd.

ped. seu nauis vno minuto absoluet spatium $15 \sqrt{1000} \varpi$
 pedum, atque vna hora spatium $13224, 182 \sqrt{\frac{\theta - \mu}{\sqrt{\theta f^4}}}$
 ped.

§. 666. Vt nauis vna hora milliare germanicum seu
 23627 pedes absoluat, debet esse $\theta > \frac{1}{f}$, et cum frictio
 μ fit valde parua, ea prae θ negligi poterit, quippe
 quam operarii superabunt, si singuli tantillum vires magis
 intendant quam ipsis tribuimus. Neglecto ergo μ erit

spatium vna hora percurrendum = $13224, 182 \sqrt{\frac{\theta}{ff}}$:

quare vt vnum milliare conficiatur debet esse $\sqrt{\frac{\theta}{ff}} =$
 $\frac{23627000}{13224182}$, vnde fit $\frac{\theta}{ff} = 5, 703$. Si igitur ob frictionem
 fiat $\theta = 6ff$, tot operarii nauem vna hora per milliare
 germanicum promouebunt; ope remorum autem ad idem
 spatium absoluendum requiruntur remiges 13 ff, ita vt hoc
 modo nequidem semisse operariorum opus fit. Ex quo
 multo maius lucrum existit, quam ante indicauimus, cuius
 rei ratio est, quod supra in denominatore terminum
 $\frac{1}{\sqrt{2gb}}$ reiecimus (659.)

§. 667. Quoniam igitur ad nauem vna hora per
 milliare germanicum propellendam debet esse $\frac{\theta}{ff} = 6$,
 patet, nisi sit ff valde paruum, omnes operarios non
 vni axi SS admoueri posse ob defectum spatii. Ope-
 rariorum numerus enim, qui ad vnum axem vertendum
 applicari possunt, determinatur latitudine nauis, cuius bi-
 ni pedes vni homini spatium sedendi concedent. Quia vero
 manibus in manubrio SS non tantum spatium requirunt, ad v-
 tramque partem axis SS totidem operarii constitui pote-
 runt.

runt. Atque hinc quot pedes contineat latitudo nauis OO , tot operarii vires suas in axe SS conuertendo exerere poterunt. In nauigiis remis propulsis fere solet esse latitudo $= 4f$; vnde si fuerit $\theta = 6ff > 4f$ seu $f > \frac{2}{3}$ ped. tum vnus axis non sufficit tot operariis, quot requiruntur ad nauem per milliare germanicum vna hora promouendam.

§. 668. His igitur casibus oportebit duas pluresue eiusmodi axes vtrinque rotis instructas in nauis constitui. In hypothesi scilicet assumpta, qua latitudinem nauis $= 4f$ posuimus, numerus eiusmodi machinarum debet esse $\frac{2}{3}f$, longitudine f in pedibus expressa. Quoniam vero calculum hactenus ad duas rotas accommodauimus, si plures adhibeantur, quaedam mutatio in expressionibus inuentis fieri debebit. Sit ergo numerus axium $= \sigma$ seu numerus rotarum $= 2\sigma$, ita vt sit proxime $\sigma = \frac{2}{3}f$, alia mutatio hinc non orietur, nisi vt vbique loco ga scribamus σga . Capi ergo debebit $\frac{ff}{\sigma ga} = 1,1624$ seu proxime $ga = \frac{6ff}{7\sigma}$. Quodsi igitur fuerit $\sigma = \frac{2}{3}f$ fiet $ga = \frac{4}{7}f$; sumto ergo radio rotae $OD = 2f$. fiet latitudo palaram $g = \frac{2}{7}$ ped. quae distributio satis commode ad praxin deduci poterit.

§. 669. Numerus autem rotarum hoc modo in nauis constitutarum neque rationem inter a et b neque celeritatem nauis afficiet: manebit enim $\frac{OD}{RS} = 1,60963 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$.

Cum igitur, si nauis ita adstruatur, vt singulis horis milliare germanicum absoluat, debeat esse $\theta = 6ff$ fiet hoc casu $\frac{OD}{RS} = 1,60963 \sqrt[3]{6} = 2,925$, ideoque $RS:OD = 1:2,925$. Quo autem manubrium SS ab hominibus cum trahendo tum trudendo commodius versari possit radius RS vnum

vnum pedem superare nequit sumto ergo $RS = 1$ ped. fiet $OD = 2,925$ ped. Determinato autem hoc modo radio $OD = a$, fiet $\frac{ff}{\sigma g} = 3,4$, et latitudo palarum $g = \frac{\sigma ff}{17\sigma}$ ped. Atque si $\sigma = \frac{3}{5}f$ erit $g = \frac{10}{37}f$ feu proxime $g = \frac{1}{3}f$. Probe autem notandum est axem OO ad eam altitudinem super aquam esse constituendum, vt semissis radorum verticalium OD aquae immergatur.

§. 670. Accommodemus haec ad exemplum triremis supra iam tractatum, in qua erat $ff = 16$ ped. ob rationem enim (633) allatam videtur iste valor commode ipsi ff tribui posse, quo certiores de effectu esse queamus. Vt igitur ista nauis tempore vnus horae per vnum milliare germanicum propellatur, opus erit 96 hominum, cum solito remigandi modo plures quam 200 requirantur. Ad hoc ergo sex axes seu 12 rotae in nati disponi debebunt, et quiuis axis a 16 hominibus versabitur. Si igitur sit $RS = 1$ pedis, fiet $OD = a = 2,925$ ped. et rotae in aqua ad 1,46 ped. immergentur; latitudo vero palarum erit $= \frac{\sigma \cdot 16}{5 \cdot 17}$ ped. ob $\sigma = 6$. hoc est proxime $\frac{4}{3}$ ped. Quodsi autem videatur, RS tantum statuere $\frac{3}{4}$ ped. fiet $OD = a = 2,194$ ped. et latitudo palarum $g = 1,04$ ped.

§. 671. Triremis ergo hoc modo instructa a 96 operariis vna hora per milliare germanicum promoueri poterit; neque hic modus tantis difficultatibus obnoxius esse videtur, quam primo intuitu apparebat. Lucrum enim plus centum hominum facile compensat sumtus, qui ad eiusmodi rotas fabricandas impenduntur, et, si quae difficultates praeterea occurrerent: operae pretium erit de iis tollendis diligentius cogitare. Sumtus quidem ad haec ope-

ra sufficientis roboris efficienda parui momenti esse videntur, cum si semel sint facti longo tempore sufficiant: Contra autem centum hominum victus et sustentatio perpetua daret. Vt taceam numerum hominum operi adiuuendorum non ab arbitrio nostro pendere; et quamuis fortasse fatis adsint, tamen plerumque ad opera longe utiliora adhiberi possunt. Denique iste labor rotas versandi, quia est vniformis, et motus iam impressus laborem adiuuat, non tantopere homines defatigabit, quam remorum agitatio.

Cap. VIII.

DE CONSTRUCTIONE NAVIVM
REMIS PROPELLENDARVM.

§. 672.

Quoniam in praecedente capite non solum vim, quam remiges exercent, sed etiam celeritatem absolutam, quae datae naui inducitur, determinauimus: cuncta principia iam habemus exposita, ex quibus maxime idonea earum nauium, quae remis ad motum sollicitari solent, structura deriuari ac definiri debet. Quanquam enim eiusmodi naues, quoties opportunitas euenit, praeter remos etiam velis uti solent; tamen ad hunc finem in constructione triremium non admodum attendi conuenit; eo quod vento locus non conceditur, nisi quatenus reliquae circumstantiae id permittunt. Neque vnquam triremes vela adhibent, si aduersus ventum cursus institui debeat; in hoc vero maximum discrimen positum est inter naues, quae solo vento agitantur, et quae remis sunt instructae.

§. 673. Proprietates, quibus naues remis propulsandas praeditas esse oportet, ut in suo genere perfectissimae censeri queant, sunt vel communes, vel propriae. Illae in omni nauium genere, quae mari committuntur, vnde cunque vis propellens petatur, aequae requiruntur; hae vero ad vim propellentem maxime accommodatae esse debent, ut inde nauis motum satis celerem et tutum consequatur. Perpetuo autem necesse est, ut vtriusque generis proprietates coniunctim perpendantur, ne dum vni satisfacere conabimur, reliquis quicquam detrahamus, vnde

navis periclitari queat. Saepenumero enim structurae, quas diueisae proprietates postulant, inter se pugnant; hocque casu maxime est cauendum ne vni nimium tribuentes alteri damnum afferamus.

§. 674. Proprietates communes supra iam satis euoluimus, vbi determinauimus, quemadmodum nauis comparata esse debeat, vt aquae commissa tam in statu quietis quam motus incolumis perseueret. Primo scilicet cum figurae nauis tum onerationis ratio debet esse eiusmodi, vt situs erectus simul sit situs aequilibrum, quod euenit, si in hoc statu ambo grauitatis centra ipsius nauis nimirum et voluminis submersi in eandem rectam verticalem incidant. Proprietatem hanc quidem nauis iam dum est vacua fere habere debet, ne onera nimis inaequaliter ad hunc situm obtinendum imponi oporteat; interim tamen etiamsi nauis vacua aliquantum aberret, nisi error sit admodum magnus, per onerationem compensari poterit. Ad hoc primum nauem vtrinque similiter fabricari conuenit, ne ratio adsit, cur in vnum latus potius inclinet quam in alterum: deinde quamuis prora puppi dissimilis constituatur, tamen in hac ipsa dissimilitudine efficiendum est, vt ambo illa centra grauitatis in vnam rectam verticalem cadant.

§. 675. Cum igitur positio sectionum nauis tam horizontalium quam verticalium a priori sit data, inde volumen carinae seu partis aquae immerisae cognoscitur abscindendo per sectionem horizontalem inferiora versus partem, cuius volumen molem aquae capiat ponderi nauis aequalem. Quoniam ergo pondus nauis a ligno et ferro quibus latera clauduntur et contignatione interna oritur, manifestum est positionem amborum centrorum grauitatis requi-

requisitam obtineri, si diuisa naui per sectiones verticales transuersas in plurima segmenta, pondus vniuscuiusque segmenti proportionale sit volumini partis eiusdem segmenti quae sub aqua versatur. Si enim haec regula in fabricandis singulis segmentis obseruetur, necesse est, vt commune centrum grauitatis tam materiae, ex qua segmenta sunt confecta, quam voluminum aquae submerforum in eodem segmento reperiatur.

§. 676 Data magnitudine et figura nauis, copia lignorum et reliquae materiae ad constructionem necessariae a practico facile aestimabitur: vnde pondus nauis vacuae ex hocque volumen carinae congoscetur. Hinc ad singula segmenta (quae gallice Gabaris vocantur) construenda regula nascitur ista; vt pondus materiae ad quoduis segmentum impendendae proportionale sit volumini eiusdem segmenti infra aquae superficiem destinato, siue regula aurea adhiberi potest, qua inferatur, vti se habet volumen totius nauis aquae immersum ad simile volumen cuiusque segmenti, ita pondus totius nauis ad pondus eiusdem segmenti. Quodsi autem aliae conditiones prohibeant, quominus ista regula in fabricandis singulis segmentis obseruetur; tum quantum in prora ab hac regula fuerit recessum, tantumdem in puppi ad aequalem a centro grauitatis distantiam ab eadem regula erit recedendum.

§. 677. Si hanc regulam perpetuo obseruare liceret, Tab. XIX. conseruationi nauium non parum confuleretur, quae saepe fig. 2. numero ob defectum huius regulae damnum patitur. Quod, vt clarius perspiciatur, concipiatur nauis $aADBb$, cuius constructio ab hac regula aberrat, plano transuerso verticali cD per centrum grauitatis ducto in duas partes aA

Dc , et $bBDc$ diuisa, quarum illa proram haec puppim repraesentet. Sit prorae $aADc$ centrum grauitatis in P , ipsius autem partis aquae submersae ADC centrum magnitudinis M cadat propius ad medium cD . Simili modo puppis $bBDc$ centrum grauitatis fit in Q , eiusque partis submersae BDC centrum magnitudinis in N propius situm fit ad medium cD : qui casus locum habet, si naues circa extremitates prorae et puppis ponderosiores redduntur, quam regula memorata requirit.

§. 678. Huius modi status in plerisque nauibus deprehenditur, propterea quod naues circa proram et puppim fortissimas construi oportet, cum tamen his locis volumen aquae submersum sit minimum. Sic itaque erunt centra illa quatuor P , Q , M et N disposita in omni fere naui vacua, et nisi maxima onerum pars in medio cD collocetur, idem situs manebit in naui onusta. Iam a grauitate prora deorsum in directione Pp vrgebitur vi ipsius ponderi aequali; et puppis in directione Qq deorsum a vi ipsius ponderi pariter aequali. Porro ob actionem aquae, qua latera nauis vndique premuntur, prora sursum sollicitabitur a pondere aquae, quam volumen ADC capit, hocque in directione Mm per centrum magnitudinis M partis prorae aquae submersae ducta. Similique modo pressiones aquae puppim in directione Nn sursum pellunt vi similis voluminis aquae.

§. 679. Omnino igitur nauis sollicitabitur a quatuor viribus, a duabus scilicet deorsum Pp , Qq ; et a duabus sursum Mm et Nn ; quae quatuor vires sese in aequilibrio continent. Ab iis ergo, si nauis esset corpus maxime rigidum omnisque inflexionis expers, nullus profusus effectus

effectus sensibilis produceretur ; at vero manifestum est, si naus tanto rigore careat, necessãrio nauem incuruatum iri, ita vt eius spina circa medium *D* sursum inflectatur. Atque hoc ipsum vitium ab ista causã oriundum in plurimis nauibus annosis sæpissime obseruatur, quae ideo ad vltiores cursus ineptae redduntur. Euitaretur ergo hoc vitium, si naues secundum regulam datam construerentur, tum enim ambo centra *P* et *M* in eandem rectam verticalem inciderent pariter ac centra *Q* et *N*, hocque casu nulla incuruatio esset metuenda.

§. 680. Verum, vti iam monuimus, ob alias rationes grauissimas naues circa proram ac puppim vehementer fortes et robustae construi debent, quia hic amborum laterum extat iunctura, simulque hae partes maximis impetibus sunt expositae. Contra vero in his locis amplitudo carinae fit minima, cum non solum secundum latitudinem sed etiam secundum altitudinem coarctetur. Hanc ob causam, cum minime expediat corpus naus in medio praeter necessitatem ligno onerare, istud incommodum per onerum impositionem tolli debet, iis ad naus medium admouendis. Atque si aliae rationes istam onerationem dissuadeant, in id tamen maxime erit incumbendum, vt distantia inter ambo puncta tam in prora *P* et *M* quam puppi *Q* et *N* quam minima reddatur. Deinde vero architectos in id magis attentos esse oportebit, vt spinam et contignationem naus robustiorem efficiant, nauique sufficientem vim incuruationi resistendi concilient.

§. 681. Ex hoc principio ratio praecipua intelligitur, cur praelonga nauium rostra improbentur, etiamsi alias ad resistentiam minuendam vtilissimae videri queant. Namque
quo

quo longius protenditur prora, eo maiore vi ruptioni resistere debet, cum impetuum contra illam factorum momenta augeantur. Hinc eiusmodi rostra perquam robusta, ideoque ponderosa effici oportet; volumine, quo aquae submerguntur valde paruo existente. Nisi igitur simul puppis vel magis producat, vel oneribus maxime gravetur, navis situm aequilibrum tenere non poterit. Posterius remidium fere prorsus ad scopum navium est ineptum, si enim navis vacua puppim iam onustam requirit, oneratio navis tota non mediocriter impeditur. Ut vero alia incommoda iam supra exposita taceam, utrumvis remidium adhibeatur, contra gravitatis P et M itemque Q et N nimium a se invicem remouentur, ita ut navis quantumvis circa medium robusta incurvationi resistere nequeat.

§. 682. Haec ratione situs aequilibrum obseruanda sunt in omni navium genere, siue propulsio fiat remis siue velis: atque simili modo alterum requisitum, quo situs aequilibrum sufficientem stabilitatem habere debet, utrique navium classi commune est. Supra quidem iam docuimus, quemadmodum stabilitas obtineatur ac pro instituto augeatur, ut navis a viribus sollicitantibus non ultra datum terminum inclinetur. Interim tamen hic circa naues remis propellendas ratione virium, quibus sunt expositae, quaedam singulatim sunt monenda. Sicuti enim in navibus, quae velis promouentur stabilitas ideo praegranda esse debet, quod momenta virium venti ad nauem inclinandam sunt vehementer magna; ita, dum naues remis motae his tantis viribus non sunt subiectae, tam insigni stabilitatis gradu, salvo ipsarum statu, tuto carere possunt. Quoniam enim vis, quam navis ab agitatione remorum suffert, fere
in

in aquae superficie non procul a centri grauitatis libella applicatur, eius momentum ad nauem inclinandam vix attentione est dignum.

§. 683. Duplex autem in quaque naui requiritur stabilitas, altera respectu axis longitudinalis, circa quem navis ad latera inclinatur, altera respectu axis latitudinalis, circa quem modo prora modo puppis deprimitur, et elevatur. Quod ad priorem stabilitatem attinet, remorum vires eam prorsus non afficiunt; ex quo tantum ad vndarum a latere venientium impetus erit attendendum, quibus, nisi latera nauis in superficie aquae vel diuergant vel conuergant, sustinendis exigua vis par esse potest. Interim tamen non solum ob reliquos tempestatum insultus stabilitas ad latera notabilis esse debet, sed etiam ob vela, quae in triremibus fere secundum longitudinem extendi solent. Dum enim velorum situs est obliquus, tantundem stabilitatis respectu axis longitudinalis requiritur, quantum in nauibus, solis velis propulsis.

§. 684. Ratione axis latitudinalis, si ad solam vim remorum attendamus, quoque perexigua stabilitas requiritur, si enim centrum grauitatis nauis in ipsa superficie aquae sit positum, tum vis remorum nullam prorsus inclinationem intendit; sin autem centrum grauitatis vel supra vel infra aquae superficiem cadat, nauis a remis vel in puppi vel in prora deprimetur, perpetuo autem haec vis erit valde parua. Quodsi vero nauis insuper velis sit instructa, tum ad horum vim sustinendam vtique maior stabilitas requiretur, quae aucta nauis longitudine obtinetur. Cum autem celeritas nauis figuram satis oblongam postulet, eo ipso stabilitas respectu axis latitudinalis multo

maior efficitur, quam vllarum virium sustentatio requirit. Praecipue igitur ad eam vim inclinantem attendi oportebit, quae in cursu navis a resistentia prorae oritur, quippe quae si prora oblique superiora versus claudatur, eo maior est, quo celerius navis promouetur. Hanc autem postea perpendemus, cum structuram navium remis propulsarum ex professo sumus inuestigaturi.

§. 685. Tertia proprietas navium aquae innatantium consistit in oscillationum tranquillitate. Celeritas quidem motus oscillatorii pendet partim a stabilitate, partim a momento inertiae navis respectu axis circa quem oscillationes fiunt, tranquillitas vero maxime tum cum motu oscillatorio coniungitur, quando centrum grauitatis sectionis aquae in eandem rectam verticalem incidit, in qua sita sunt cum centrum grauitatis totius navis tum centrum magnitudinis partis submersae. Ad hunc autem motum oscillatorium in nauibus, quae remis promouentur, non admodum est spectandum, cum in continua remorum vibratione vehementer turbetur, neque vnquam ad vniformitatem peruenire queat. Vndarum quidem impulsiones nauem succutiant, at hinc non eiusmodi oritur motus, cuius moderatio in nostra est potestate.

§. 686. Tertium requisitum ad naues in suo genere perfectissimas reddendas versatur in diminutione resistentiae, qua celeritas navis augetur. Ad hoc nobis hic potissimum est attendendum, vbi naues remis promouendas tractamus. Cum enim navis ab eadem vi eo celerius promoueat, quo minor fuerit resistentia aquae, triremes procul dubio erunt perfectissimae, quae a minima vi celerrime promoueri poterunt. Quae perfectio etsi ad omnes naues

patet, tamen in iis, quae ope remorum propelluntur, maxime requiri solet. Cum enim in nauibus a vento propulsis defectus a nimia resistentia oriundus multiplicatione velorum reparari queat, in triremibus non sine ingentibus sumtibus numerus remigum multiplicatur. Quocirca in hoc praecipue erit elaborandum, vt vel a dato remigium numero nauis maxima celeritas induci, vel eadem celeritas a minimo remigum numero obtineri queat.

§. 687. Quo autem nexus, qui inter vim propellentem, resistentia aquae, et nauis celeritatem intercedit, clarius ob oculos ponatur, ponamus vim propellentem aequivalere ponderi P, resistentiam nauis absolutam aequalem esse resistentiae, quam superficies plana ff contra aquam directe mota ea ipsa celeritate, qua nauis progreditur, suffert. Tum vero sit celeritas nauis debita altitudini v . His positis erit vti iam saepius videmus, vis propellens P aequalis ponderi massae aquae, cuius volumen est $= ff v$. Quodsi ergo vis P pariter per volumen aquae aequiponderans exprimatur erit $P = ff v$, hincque nauis celeritas $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{P}}{f}$. Manente ergo eadem vi propellente P, celeritas nauis augebitur minuta resistentia. Atque in qua ratione superficies ff resistentiam absolutam metiens diminuitur, in huius ratione subduplicata celeritas nauis augebitur.

§. 688. Hic littera P denotat vim quae ad nauem propellendam immediate impenditur, eiusque adeo loco vim, quam remiges ad remos agitandos adhibent, substituere non licet: quoniam haec vis nauem eo debilius promouet, quo celerius iam promoueatur, etiamsi remiges eadem opera vtantur. Vidimus autem in praecedente ca-

pite, si numerus et vis remigum non mutantur, atque ad maximum effectum producendum accommodentur, fore v non vti $\frac{1}{j^2}$ sed vti $\frac{1}{\sqrt[3]{jf^4}}$, ex quo ipsa navis celeritas V v erit vt $\frac{1}{\sqrt[3]{ff}}$. Celeritates igitur, quae a dato remigum numero naui induci possunt sunt in ratione reciproca subtriplicata superficiei ff , qua resistentia navis exprimitur. Aucto autem remigum numero, si resistentia maneat eadem, celeritas navis in ratione subtriplicata tantum augetur. Ex quibus intelligitur aptissimum remedium ad naues accelerandas in diminutione resistentiae esse quaerendum.

§. 689. Quoniam naues remis motae cursum obliquum instituere non coguntur, hic ea tantum resistentia in computum venit, quam navis in cursu directo patitur. Pendet autem haec resistentia potissimum a figura inferioris prorae partis, quae in aqua versatur, de qua in superiori libro fufius est tractatum. At praeter istam prorae figuram non parum confert ad resistentiam cum augendam tum diminuendam ipsa externae superficiei indoles; quae si fuerit aspera, motum navis haud mediocriter impedit, contra autem quo magis est polita, quod fit dum pice oblinitur et laeuigatur, eo minus allisio aquae motui reluctatur. Hoc vero casu demum navis eam sentiet resistentiam, quam calculus ostendit; ita vt, nisi superficies sit perfecte polita, prouti in calculo assumi solet, navis multo maiorem passura sit resistentiam, quam calculus declarat. Ex quo summa vtilitas huius praecepti circa externam navis superficiem distincte perspicitur.

§. 690. Figura prorae, quae in calculum resistentiae ingreditur, a navis sectione verticali transuersa amplissima incipit;

incipit ; quam primum enim figura navis anteriora versus contrahi incipit , allisionem aquae sentit. In hoc igitur negotio primum considerari debet sectio carinae amplissima , a qua contractio laterum navis initium sumit ; ac tum ipsa haec contractio et attenuatio prorae ad cuspidem vsque , sit sectio carinae amplissima $=bb$, quae cum a magnitudine navis , tum a scopo cui destinatur , pendet ; atque manifestum est , si navis plano verticali hic subito clauderetur seu eadem amplitudine ad extremitatem vsque produceretur , hanc ipsam sectionem amplissimam bb futuram esse eam superficiem , quam ante ad resistantiam absolutam metiendam adhibuimus , hoc est fore $ff=bb$. Hoc autem casu navis omnium maximam patietur resistantiam , quae obliquitate quacunq̄ue diminuitur.

§. 691. Cum igitur $ff=bb$ indicet maximam resistantiam quam navis , cuius sectio amplissima est $=bb$, sufferre potest , hanc ipsam quam minimam constitui conveniet ; quo minor enim reddetur maxima resistantia , quae in nauem cadere potest , eo magis ea deinceps per obliquam laterum navis anteriora versus contractionem diminui poterit , vt navis reipsa minimam sentiat resistantiam. Cum autem ex pondere navis , quod datum assumimus , volumen carinae determinetur , manifestum est eo minorem prodituram esse sectionem navis amplissimam bb , quo longior statuatur navis. Oportebit itaque longitudinem navis maxime augeri diminuta eius latitudine : at vero in hac allongatione navis probe cauendum est , ne ob latitudinem nimis diminutam stabilitas respectu axis longitudinalis detrimentum patiatur. Ad hoc euitandum necessè est , vt simul profunditas carinae ita diminuatur , vt latitudo

ad eam retineat rationem dupla non minorem, vti in capite de stabilitate nauium ostendimus.

§. 692. Si figuram carinae ponamus parallelepipedum rectangulum, cuius longitudo fit $= a$, profunditas $= c$, et latitudo $= 2c$, vti stabilitas respectu axis longitudinalis requirit, erit volumen carinae seu partis nauis aquae submersae $= 2acc$. Ponderus porro nauis vacuae pendet a crassitie fundi et parietum, quam si ponamus $= e$, nauisque tantum super aqua emineat, quantum immergitur, erit quantitas materiae nauis $= 8ace$, cui cum ponderus sit proportionale fiet $8ace$ ipsi $2ace$ et hinc profunditas c crassitie e proportionalis. Determinatur ergo profunditas c , longitudo autem a pro lubitu accipi posse videtur. At cum aucta longitudine momenta virium, quae nauem rumpere conantur, crescant, pro maiori longitudine naues fortiores construi deberent, ex quo earum ponderus augetur. Quae cum ita sint, ratio longitudinis ad latitudinem et profunditatem non ultra datum terminum extendi poterit; qui ab experientia est petendus.

§. 693. Hanc igitur nacti sumus regulam, vt naues, quae remis propelli debent, tam fiant longae, quam earum robur ad conseruationem requisitum admittit. Quodsi autem experientiam consulamus, patebit nauibus sufficiens robur adhuc conciliari posse, si longitudo ad latitudinem teneat rationem sextuplam siue septuplam, ac fortasse hanc rationem ad decuplam vsque, si necessitas exigat, extendere licet. Pendet hoc praecipue a robore ligni quod ad constructionem nauium adhibetur eiusque pondere, quae, cum ad calculum reuocari nequeant, omnino per experientiam determinari debebunt. Quod vero ad profunditatem attinet,

ea

ea femiffem latitudinis fuperare haud potest; quinimo expeditet profunditatem adhuc minorem accipi, quo naus facilius omnibus tempeftatum impetibus refiftere poffit. Maxime autem haec cautela erit obferuanda, fi centrum grauitatis naus non folum fupra centrum magnitudinis carinae, fed etiam fupra aquae fuperficiem cadat; qua de re ea confuli debebunt, quae fupra de ftabilitate nauium fufius funt tradita.

§. 694. Postquam, quantum fieri potest, elongata naui eius feftio ampliffima *bb* ad minimum valorem est perducta, refiftentia vltierius vehementer diminui potest, dum latera naus in prora oblique coeunt, atque in aciem vel cuspudem conformantur. Videmus enim in fuperiori libro refiftentiam eo reddi minorem, quo acutior efficiatur prora. Triplici vero modo coarctatio prorae anteriora verfus fieri potest; primo fcilicet feruata carinae vbique eadem profunditate latitudo continuo magis diminuitur, quoad, latera in aciem verticalem coeant. Secundo latitudo carinae eadem manere potest, dum fundus naus paulatim eleuatur, donec fuperficiem aquae attingat. Tertia contractio, quae plerumque in nauibus adhibetur, ex vtraque praecedentium est composita, atque fit tam latitudinem carinae quam eius profunditatem diminuendo, donec in fuprema aquae fuperficie tam latitudo quam profunditas carinae fimul euanefeat.

§ 695. In qualibet coarctatione infinita varietas locum habere potest; primum fcilicet longitudo prorae inter fectionem ampliffimam et extremitatem in fuperficie aquae magnum difcrimen affert; quo lentius enim prora clauditur, eo minor fit eius refiftentia ceteris paribus. Deinde

inde maxime spectanda est linea, secundum quam tam latera navis coeunt, quam spina sursum inflectitur, vtrum sit recta an curua, hincque innumerabiles diuersae figurae prorae nascuntur, vti in primo capite huius libri exposuimus. Denique ex his omnibus figuris ea inuestigari possent, quae minimam creet resistantiam, sub datis conditionibus, quemadmodum in praecedente libro plura huius generis problemata extant soluta. Quoniam vero in praxi summa geometrica accuratio ad effectum deduci non potest, sufficet praecipuas prorae species generatim perpendisse, et quantum fructum ex singulis sperare liceat, definiuisse.

Tab. XIX.
fig. 3

§. 696. Species itaque simplicissimas trium memoratorum generum prorae contemplabimur, quae non nisi lineis rectis contineantur, cum ex his indoles diminutae resistantiae non solum facillime perspiciatur, sed etiam si curvae lineae ingrediantur, satis prope aestimari queat, praecipue, si in subsidium vocentur ea, quae in superioris libri capite sexto integro hac de re fusius exposuimus. Sit igitur sectio amplissima $EFfe$ parallelogrammum rectangulum, a qua prora claudatur in rectam verticalem Aa , ita vt figura prorae sit prisma basin habens triangularem aef . Sit latitudo carinae maxima $EF = 2b$, profunditas $Cc = c$, erit area sectionis amplissimae carinae $= 2bc$, quam supra posuimus $= hb$. Et cum f nobis constanter denotet planum, quod directe contra aquam motum eandem patitur resistantiam, quam navis eadem celeritate mota, foret vtique $f = hb = 2bc$, si longitudo prorae AC euanesceret; tum enim navis ipsa superficie $EFfe$ in aquam incurreret.

§. 697. Ponamus iam longitudinem prorae $AC = a$, erit $CAE = CAF$ angulus, sub quo aqua vtrunque in latera prorae impingit, hinc erit resistentia vnus semissis $AEEa = AE.Aa$. $\frac{CE^2}{AE^2} = \frac{AaCE^2}{AE}$, quae cum sit normalis ad superficiem $AEEa$, dabit vim motui navis directe contrariam $= \frac{Aa.CE^2}{AE^2} = \frac{b^3c}{aa+bb}$; cui cum resistentia ex altera parte orta fit aequalis, erit resistentia tota $= \frac{+b^3c}{aa+bb}$; siue habebitur superficies resistentiam repraesentans $ff = \frac{-b^3c}{aa+bb}$. Hinc cum sit $bb = 2bc$ erit $ff = \frac{bb}{aa+bb} . bb$; ex quo resistentia huius prorae erit ad resistentiam sectionis amplissimae, vti bb ad $aa+bb$, hoc est vt CE^2 ad AE^2 . Quo longior itaque statuitur prora AC eo magis resistentia navis diminuitur, hocque in ratione duplicata laterum AE , manente sectione carinae amplissima $EFfe$ eadem.

§. 698. Si igitur longitudo AC capiatur aequalis semissi latitudinis CE , tum resistentia navis iam fit duplo minor; quam si navis nuda superficie $EFfe$ in aquam irrueret: sin autem AC capiatur aequalis toti latitudini EF resistentia nascitur quintuplo minor; decuplo autem minor erit resistentia, si sit $AC = 3 CE$. Quodsi autem vt fere consuetudo praecipit, statuatur $AC = 4 CE = 2 EF$, fiet resistentia decem et septem vicibus minor. Interim tamen tanta resistentiae diminutio in praxi non est expectanda, cum quia latera navis non possunt fieri politissima, vti hic assumuntur, tum vero propter aquae tenacitatem, quae implicat resistentiae speciem, quae aucta prorae superficie augetur potius, quam diminuitur. Denique si prorae navis eiusmodi tribuatur forma, vti descripsimus tum

Pars II.

A a a

aqua

aqua nullam vim naui inferet fursum vrgentem; ideoque a resistantia aquae naus non inclinabitur circa axem latitudinalem, quod commodum in nauibus remorum ope propellendis maximi momenti videri queat.

§. 699. Cum enim in hoc nauium genere nulla adfit vis reluctans vi aquae proram nauis eleuanti, ista prorae structura huic scopo aptissima videtur; neque vllum dubium super esset, si modo naus perpetuo ita progredere-
tur vt bases $A E F$ et $a e f$ horizontalem situm conseruarent. Quoniam autem hoc minime sperari potest, commodum memoratum ingenti incommodo coniungitur: statim enim ac naus tantillum inclinatur, prora vi non contemnenda eleuabitur, cum ante nulla adesset, hincque cum vis contranitens nulla adfit, naus subito inclinabitur, atque adeo, dum prora eleuatur, vis illa eleuans augebitur; ex quo cum situs nauis obliquus, tum succussiones et reciprocatio-
nes violentae nascentur, vnde naus in mari turbido praefertim periculo pereundi obnoxia futura esset; cuiusmodi incommodum nullo modo ab hoc genere nauium remo-
veri potest.

§. 700. Huiusmodi ergo prorae figura admitti nequit, nisi aqua sit admodum tranquilla, ita vt naus et raro et parum de situ erecto deturbetur. In mari vero et aqua minus quiesca ista species adhiberi non potest, sed eiusmodi figura requiritur, quae mutato situ non tantam resistantiae alterationem patiat. Contemplemur itaque secundam speciem, in qua prora fursum tantum contrahitur. Scilicet existente carinae sectione amplissima $E F f e$ parallelogrammo rectangulo, conuergat prora in aciem horizontalem $B D$, ita vt prora sit prisma triangulare bases
habens

habens verticales BEe et DFf . Quodsi iam haec navis directe secundum CA in aqua progrediatur, sola facies $BDfe$ resistentiam patietur; quae adversus aquam incurrit sub angulo CAC , cuius sinus est $= \frac{Cc}{Ac} = \frac{Ee}{Be}$. Resistentia ergo huius prorae se habebit ad resistentiam sectionis amplissimae $EFfe$, quam ponimus $= hb$, uti Ee^2 , ad Be^2 . Quare si planum, quod parem resistentiam patitur, ponatur $= ff$ erit $ff = \frac{Ee^2}{Be^2} hb$.

§. 701. Ponamus ut ante latitudinem navis $EF = 2b$, siue eius semissem $CE = b$; profunditatem sectionis amplissimae $Ee = c$, erit $hb = 2bc$. Sit porro prorae longitudo $AC = a$, erit $Be^2 = aa + cc$, hincque resistentia huius prorae erit $= \frac{cc}{aa+cc} hb$, quae ergo aequalis erit resistentiae prorae primo loco consideratae, si fuerit $c = b$, seu si profunditas carinae aequetur semisfi ipsius latitudinis. Quae ratio inter latitudinem ac profunditatem, cum fere in omnibus navibus observetur, siue prora contrahatur priori modo siue hoc posteriori, pro eadem longitudine eadem oritur resistentiae diminutio. Videmus autem supra profunditatem c semisfi latitudinis b superare non posse, atque adeo stabilitati navium maxime consuli, si profunditas c adhuc minor statuatur. His igitur casibus pro eadem prorae elongatione magis resistentia diminuetur, si prora sursum contrahatur, quam si tantum secundum latera coarctetur, in qua contractione prima species versabatur.

§. 702. Praecipuum autem discrimen, quod inter proram huius speciei ac praecedentis intrecedit, consistit in vi, qua prora sursum vrgetur, quae in priori specie erat nulla,

in hac autem ad resistentiam eo maiorem habet rationem, quo longior statuatur prora. Cum enim vis aquae incurrentis in planum $BDfe$ fit vt $BD \cdot Be \cdot \frac{Ee^2}{Be^2} = \frac{2bcc}{\sqrt{(aa+cc)}}$, huiusque directio fit normalis ad planum $BDfe$, ac per eius centrum grauitatis R transeat, existente $AR = \frac{1}{2} AC$. Ex hac vi, praeter resistentiam horizontalem nascitur vis proram verticaliter eleuans $= \frac{2abcc}{aa+cc}$, in directione RS existente $AS = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} a$. Quoniam igitur horizontalis vis, qua motus nauis directe impeditur, est $= \frac{2bc^3}{aa+cc}$, erit constanter vis proram eleuans, ad vim motui nauis reluctantem in ratione $a:c$, seu vti longitudo prorae BE ad profunditatem Ee . Haec autem vis nauem eleuans aequatur ponderi massae aquae, cuius volumen est $= \frac{2abccv}{aa+cc}$ existente v altitudine debita celeritati, qua nauis progreditur.

§. 703. Quia vis nauem eleuans $\frac{2abccv}{aa+cc}$ a celeritate nauis: haec vero a vi propellente pendet, ponamus vim nauem propellentem esse $= P$; eritque $\frac{2bc^3v}{aa+cc} = P$; vnde vis nauem eleuans erit $= \frac{aP}{c}$. Quamobrem vis nauem propellens est ad vim, qua prora ab aqua sursum vrgetur, vti profunditas Ee ad longitudinem prorae AC . Ab hac ergo vi nauis primo quasi leuior redditur, ac volumen aquae submersum diminuitur. Deinde vero, ad quem effectum maxime spectari oportet, ab hac vi nauis circa axem latitudinalem inclinatur ascendente prora; huiusque momentum, quo magis augetur prorae longitudo, duplicem ob causam crescit, primo scilicet ob anteam ipsam vim eleuantem $\frac{aP}{c}$, tum vero etiam ob eius maiorem remotionem a centro grauitatis nauis.

§. 704. Si duo exposita prorae genera in vnum coalescant, nascitur genus tertium, quo prora tum secundum latitudinem quam profunditatem simul coarctatur et in cuspidem A terminatur: vbi quidem notandum est, hic non de tota prora, sed tantum de eius parte in aqua versante esse sermonem, ita vt superficies aquae superum terminum AEF prorae constituat. Quanquam ad hoc genus innumerabiles species pertinent, tamen casum vnicum simplicissimum hic contemplabimur, quo sectio amplissima est triangulum isosceles ECF, e quo prora in mucronem A contrahatur, ita vt eius figura sit pyramis triangularis AEFc. Ponamus longitudinem AC = a. Semissim latitudinis CE = CF = b, et profunditatem Cc = c; erit propter aream basis ECF = bc soliditas totius prorae = $\frac{1}{3}abc$. Atque dum haec prora directe in aqua mouetur, resistantiam patientur binae facies laterales AEc et AFc inter se similes et aequales, ex quo resistantia utrinque erit eadem.

§. 705. Haec igitur prora ab allisione aquae duplicem sustinebit vim, quarum altera est horizontalis motuique resistens, altera verticalis. Prior vis aequiualeat ponderi massae aquae, cuius volumen est = $\frac{b^3c^3v}{aab + aac + bbc}$; vnde nauis tantam patientur resistantiam, quantam pateretur superficies plana ff = $\frac{b^3c^3}{aab + aac + bbc}$, directe et eadem celeritate contra aquam mota. Cum igitur sit sectio amplissima hb = bc, erit ff = $\frac{bbcc}{aab + aac + bbcc} \cdot hb$. Quodsi sumatur vti fere fert consuetudo, c = b, erit ff = $\frac{bb}{2aa + bb} hb$; cum igitur posito c = b sit in vtroque praecedente prorae genere ff = $\frac{bb}{aa + bb} hb$, manifestum est proram

374 DE CONSTRVC. NAVIVM REMIS PROPEL.

ad hoc tertium genus relatam minorem pati resistentiam: et quidem si fit $a=4b$, erit pro hoc genere tertio $ff=\frac{1}{33}bb$, cum pro utroque praecedentium fit $ff=\frac{1}{17}bb$, ita vt resistentia praesenti casu fere duplo fit minor quam in praecedentibus.

§. 706. Altera vis nauem sursum sollicitans in libro superiori (630) reperta est valere pondus voluminis aquae $=\frac{ab^3ccv}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$; huiusque vis directio verticalis RS transit per rectae AC punctum S ita vt fit $AS=\frac{2aa+cc}{3a}$ et $CS=\frac{aa-cc}{3a}$, qua vi nauis cum leuior redditur, tum prora eleuatur puppi magis submersa. Ceterum haec vis nauem sursum vrgens se habet ad resistentiam vti a ad c feu vti AC ad Cc. Quare si P fuerit vis nauem propellens, erit $P=\frac{b^3c^3v}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$, hincque fiet vis nauem in directione RS sursum vrgens $=\frac{aP}{c}$; quae est eadem ratio inter vim propellentem et vim eleuantem quam casu praecedente inuenimus.

§. 707. Ex his trium prorae generum casibus simplicissimis, quos hic euoluimus, satis prope colligere poterimus, quomodo pro quavis prorae figura proposita tam resistentia quam vis nauem eleuans sit comparata. Quamvis enim figurae curuilineae, quae cum sectioni amplissimae tum contractioni prorae tribuuntur, calculum maxime varient, ac saepenumero vix superabilem reddant, tamen determinationes inde manantes a coniecturis, quas ex consideratione casuum tractatorum elicere licet, tantopere non abhorrebunt, vt iis in nostro instituto acquiescere nequeamus. Colligemus autem ex tribus casibus allatis regulas quasdam generales, quarum ope vtrumque resistentiae

tiae effectum pro quacunq;e prorae figura proposita, tam exacte existimare poterimus, quantum ad *praxin*, ad quam hic solum attendimus, sufficit.

§. 708. In omni igitur prora ante omnia ratio contractionis, qua latera a sectione amplissima ad extremitatem vsque conuergunt nauemque claudunt, spectari debet; quae duplex est. Vel enim prora utique eandem seruat profunditatem, et secundum latitudinem tantum contrahitur, quemadmodum fit in casu primum tractato, vel prora vbique eandem conseruat latitudinem, et secundum profunditatem tantum contrahitur, quemadmodum fit in casu secundo. Hucque referimus omnes casus, siue contractiones istae fiant secundum lineas rectas, uti assumimus, siue secundum lineas curuas quascunq;e. In priori contractione prorae omnes sectiones horizontales inter se sunt aequales et similes; in posteriori autem sectiones verticales secundum longitudinem factae aequalitatem inter se seruant: utroque vero casu sectiones verticales secundum latitudinem factae continuo decrescunt, quoad tandem in extremitate prorae penitus euanescant.

§. 709. Si sectiones horizontales omnes a superficie aquae descendendo sint inter se aequales uti fit in specie prima ab allisione prorae aduersus aquam nulla omnino nascitur vis verticalis, qua nauis sursum vrgeretur. Sed tota vis ab aqua excepta directionem habebit horizontalem, quae tota ad motum nauis retardandum impenditur. In huiusmodi igitur prorae figura sectiones verticales secundum longitudinem nauis factae a medio AC ad latera recedendo continuo decrescunt, quoad tandem in extremitatibus E et F euanescant. Eo minor autem erit resistentia, quo vehementius istae sectiones decrescunt; hoc est
quo

quo maior fuerit sectio diametralis *A C c a* pro eadem navis latitudine : ex quo intelligitur eo magis resistantiam diminui, quo longior statuatur prora pro eadem sectione amplissima.

§. 710. Si sectiones verticales secundum longitudinem factae omnes sint inter se aequales, sectiones autem horizontales a superficie aquae descendendo continuo decrescant resistantia aquae propemodum vti in praecedenti casu eo magis diminuitur, quo maior capiatur prorae longitudo. Verum insuper ex allisione aquae resultat vis verticalis navem cum subleuans, tum circa axem longitudinalem inclinans. Atque vis ista eo maior euadit, quo magis per elongationem prorae resistantia diminuitur : tenet enim ista vis ad vim totam, qua navis propellitur, rationem fere vti longitudo prorae ad ipsius profunditatem, nisi quatenus ista ratio ab incuruatione prorae variatur. Momen- tum ergo, quod ex hac vi oritur ad navem inclinandam erit fere in duplicata ratione longitudinis prorae, quemadmodum supra iam innuimus.

§. 711. Omnis igitur prorae figura, quae quidem concipi potest, vel ad alterutram formam expositam est comparata, vel vtraque contractionis ratio simul in ea deprehenditur; prorae autem, in quibus alterutra contractio sola in est, hoc laborant incommodo, quod subitanea mutatio in effectu ex allisione aquae nato oritur, quam primum siue directio navis siue fluctuum vel tantillum mutetur. Si enim prora ad primum genus pertinens pauxillum eleuetur, nascitur vis ab aqua in fundum incurrente sursum vrgens, cum ante nulla eiusmodi vis adesset; prora autem ad alterum genus relata, si parumper a cursu directo

directo declinet, vel fluctus a latere impingant, subito nascetur vis lateralis. Quare cum istiusmodi mutationes per saltum factae motum navis vehementer turbent, in iis tollendis opera maxime erit collocanda. Hincque in praxi ista regula maximi est momenti, quae in superficie navium omnes angulos vetat, et aequabilem curvaturam ubique requirit.

§. 712. In huiusmodi autem prorae figura, angulis ac subitaneis incurvationibus carente, vtriusque generis coarctatio simul inerit, atque tam sectiones horizontales a superficie aquae deorsum descendendo, quam verticales secundum longitudinem navis factae a medio ad latera recedendo continuo decrescent. Aqua igitur in huiusmodi prorae incurvens duplicem exeret effectum, resistantiam et vim verticalem: ex allatis autem facile colligitur, resistantiam eo magis diminui, quo longius prora producat; resistantia vero hoc modo diminuta alteram vim sursum urgentem augeri, eamque fere ad vim navem propellentem sequi rationem, quam habeat longitudo prorae ad ipsius profunditatem. Vtrumque autem effectum in libro superiore accurate definiuimus, unde si necessitas exigat, depromere licebit; ad praesens vero institutum hae generaliores observationes sufficient.

§. 713. Cum igitur in navibus, quae remis propelluntur iure requiri soleat, ut vel a data vi celerrime promoveantur, vel data celeritas ipsi a minima vi inducatur, manifestum est huic requisito maxime satisfieri, si prora fiat quam longissima. Supra vero iam quaedam incommoda commemorauimus, quibus prorae nimis longae sint obnoxiae: vidimus enim §. 681. quo longior statu-

atur prora, puppim quoque simul produci oportere, tum vero vt naus ruptioni sufficienter resistat et proram et puppim ligno nimium onerari ac ponderosam reddi debere: quo fit vt naus minorem onerum copiam capiat, eorumque idoneae dispositioni refragetur. Hinc porro profunditas carinae augebitur, ad quam cum latitudo naus datam tenere debeat rationem, naus simul latior effici deberet; hocque adeo pacto naus non solum elongaretur, sed auctis singulis dimensionibus, maior omnino naus resultaret, ad quam propellendam eo ipso maior vis requireretur.

§. 714. His igitur rationibus pro data naus profunditate sub aqua, a qua eius latitudo iam determinatur, terminus seu limes praestituitur, quem naus longitudo superare nequeat. Qui terminus pro variis nauium generibus multum variare potest, quippe qui pendet partim ex robore, quod naus habere debet, partim a figura carinae, partim a scopo, cui naus destinatur, quae res ita sunt comparatae, vt non nisi per experientiam determinari possint. Praeter has autem rationes nunc perpendi debet vis illa, qua naus ab allisione aquae sursum vrgetur, quae vis eo maior euadit, quo longior prora statuitur. In nauibus enim, quae folis remis propelluntur, nulla adest vis, quae illi actioni aquae reluctetur, eiusque effectum impediat: etenim, quoniam remi in superficie aquae vibrantur, a qua centrum grauitatis non admodum distat, a vi remorum vix sensibile nascetur momentum, quo prora deorsum deprimatur, atque actioni illi aquae occurratur.

§. 715. In triremibus ergo omnibusque nauibus, quae remis ad motum incitantur, vi illi verticali aquae proram eleuanti libera relinquitur agendi potestas. Effectum
ita-

itaque ista vis exeret duplicem: primo scilicet totam navem reddet leuiorem, tantam partem ab ipsius pondere adimendo, quanto ponderi ipsa illa vis aequatur: qui effectus utique non est eiusmodi, ut naui damnum afferre queat, quin potius frequenter non spernendam vtilitatem addit, dum ob minutam carinam ipsam resistantiam diminuit. Neque igitur opus est, ut istum effectum destruere annitatur. At vero alter effectus huius vis consistit in inclinatione navis circa axem longitudinalem, circa quem navis, nulla vi externa oblucente, tantum inclinabitur, quantum stabilitas navis respectu eiusdem axis permittit; atque omnino necesse est ut huius effectus ratio habeatur, cum ex nimia inclinatione navis certum damnum patiatur.

§. 716. Quo igitur angulum cognoscamus, ad quem vis aquae verticalis navem de situ recto actu inclinabit, momentum istius vis respectu axis longitudinalis vna cum stabilitate respectu eiusdem axis contemplari oportet; momentum enim illius vis diuisum per stabilitatem dabit angulum inclinationis seu potius ipsius sinum posito sinu toto $= r$. Namque hunc angulum tam paruum accipio, ut cum sinu facile confundi possit; id quod in omnibus angulis, quos navis sine periculo sustinere potest, sine sensibili errore assumere licet. Quodsi enim angulus inclinationis tantus prodiret, ut enormiter a suo sinu discreparet, tum eo ipso structura navis tantae inclinationi obnoxia esset reicienda. Quamobrem si momentum vis aquae verticalis respectu axis longitudinalis ponatur $= Q$, atque stabilitas navis respectu eiusdem axis $= F$, dabit $\frac{Q}{F}$ sinum seu ipsum angulum inclinationis, ad quem navis e situ directo inclinabitur.

§. 717. Ad hanc formulam euoluendam ponamus vim qua naus propellitur = P ; sit porro longitudo prorae = a eiusque profunditas sub aqua = c , erit vti supra vidimus vis aquae verticalis = $\frac{aP}{c}$; quae expressio etsi tantum in casibus simplicissimis ante expositis locum habet, tamen ea in praesenti insituo vti poterimus, quoniam non ipsam hanc vim absolutam, sed tantum quantitatem ipsi proportionalem spectamus ; hinc autem tuto assumere licet, quo magis prora elongetur, in eadem ratione vim illam aquae verticalem augeri. Quodsi iam assumamus centrum grauitatis naus in sectionem amplissimam incidere, erit distantia huius vis a centro grauitatis proxime longitudini prorae a proportionalis, ex quo momentum istius vis ad nauem inclinandam Q erit vti aaP , siue quadrato longitudinis prorae erit proportionale proxime.

§. 718. Si igitur sectio naus amplissima maneat eademque vis nauem propellens P statuatur, erit pro diuersis prorae longitudinibus momentum vis aquae inclinationem naus producens in ratione duplicata longitudinis prorae a , proxime : si quidem figura prorae externa, aucta minutae longitudine eiusdem maneat speciei. Praeterea autem quo ista ratio minus a veritate dissentiat, longitudinem prorae iam satis magnam prae eius profunditate poni oportet. Cum enim in casu §. 706. tractato sit distantia vis aquae verticalis a sectione amplissima = $\frac{a}{3} - \frac{cc}{3a}$, quae in ipsam vim ducta praebet eius momentum existente a longitudine et c profunditate prorae : manifestum est nisi a multum excedat c hanc distantiam longitudini prorae proportionalem censi omnino non posse. Quoniam igitur hic proras diuersae longitudinis inter se comparare constitui-

tuumus, longitudo breuiffimae multo maior exiftat, quam profunditas carinae c , neceffe est.

§. 719. Nifi igitur ftabilitas nauis refpectu axis latitudinalis pro aucta prorae longitudine crefcat in eadem ratione duplicata vel maiore; angulus inclinationis circa axem latitudinalem maior euaderet, quo magis elongaretur prora. Quodfi eueniret, duplex incommodum elongationem prorae vitaret, ac damnofam redderet; primo enim aucta inclinatio per fe maxime eft vitanda. Tum vero, etiam fi inclinatio maneret eadem, tamen in prora longiori mox fieret periculofa. Aucta enim longitudine prorae, in eadem ratione fpatium, quo extremitas nauis vel eleuaretur vel deprimeretur, crefceret; hincque tandem puppis, nifi fit altiffima, penitus submergeretur. Quamobrem ne elongatio prorae damnum afferat, neceffe eft vt ftabilitas F in maiore quam duplicata longitudinis prorae ratione crefcat.

§. 720. Inquiramus igitur in rationem illam, in qua ftabilitas nauis aucta longitudine crefcit. Sit pondus totius nauis $= M$, volumen aquae fubmerfum $= V$, eleuatio centri grauitatis nauis fupra centrum magnitudinis carinae $= g$ atque momentum fectionis aquae refpectu axis horizontalis fecundum latitudinem nauis per ipfius fectionis aquae centrum grauitatis ducti fit $= K$; his pofitis fupra vidimus fore ftabilitatem nauis refpectu axis latitudinalis $= M (\frac{K}{V} - g)$. Quodfi ergo affumamus ambo illa centra grauitatis nauis et magnitudinis carinae in fe inuicem incidere, vel minime inter fe diffare, quae hypothefis a veritate non multum abhorrebit, quantitas g , refpectu valoris $\frac{K}{V}$ facile reiici poterit: atque cum fit M ipfi V propor-

tionale, erit stabilitas navis respectu axis latitudinalis vti K, momentum sectionis aquae.

Tab. XX.
fig. 1.

§. 721. Consideremus ergo duas aquae sectiones AEF BF et $aEbF$, quae communem habeant latitudinem EF; quae simul per centrum gravitatis vtriusque sectionis aquae C transeat, vicemque axis latitudinalis sustineat, cuius respectu momentum sectionis aquae vtriusque est investigandum: quem in finem ponamus in vtraque sectione aquae medietates anteriores AEF, aEF similes et aequales posterioribus BEF, bEF . Iam quia momentum sectionis aquae K inuenitur, si singula ipsius elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe EF multiplicentur haecque producta omnia in vnam summam coniiciantur. Sumamus in sectione aquae AEBF elementum MNNM, rectis infinite propinquis MM et NN, et axi EF parallelis abscissum: cuius cum singulae particulae ab axe EF aequaliter distent, ex hoc elemento nascetur totius momenti quaesiti differentiale $= MM.PQ.CP^2$; ex quo momentum sectionis aquae AEBF erit $= \int MM.PQ.CP^2$.

§. 722. Sit iam relatio inter sectionem aquae longiorem $aEbF$ et breuiorem AEBF ita comparata, vt longior per elongationem ex breuiori nascatur. Scilicet ductis ordinatis ad axem EF normalibus RMm, SNn, sit ratio inter RM : Rm et SN : Sn vbique eadem, et aequalis rationi CA : Ca. Quodsi ergo in sectione longiore capiatur elementum mnnm respondens elemento MNNM breuioris, ita vt sit mm = MM et nn = NN, erit Cp : CP = Ca : CA; et pq : PQ = Ca : CA; ideoque Cp = $\frac{Ca}{CA} . CP$ et pq = $\frac{Ca}{CA} . PQ$. Cum igitur momentum huius sectionis longioris respectu axis EF ob rationes similes

les fit $= fmm.pq.Cp^2$ erit hoc momentum $= \frac{Ca^3}{CA^3} fMM.PQ.CP^2$. Ex hisque erit momentum sectionis aquae longioris $aEbF$ ad momentum sectionis breuioris $AEBF$ in ratione Ca^3 ad CA^3 ; scilicet haec momenta erunt in ratione triplicata longitudinum prorae.

§. 723. Cum igitur stabilitas nauis F ceteris paribus fit vt cubus a^3 longitudinis prorae, momentum autem nauem inclinans Q fit tantum vt quadratum a^2 , erit angulus inclinationis nauis $\frac{Q}{P}$ vt $\frac{1}{a}$ hoc est reciproce vt longitudo prorae. In nauibus ergo diuersae longitudinis extremitates prorae ac puppis per aequalia spatia siue eleuabuntur siue deprimuntur. Neque igitur ex hoc capite opus est, vt in nauibus longioribus prora ac puppis altiores extruantur quam in breuioribus, sed eadem altitudo pro quauis longitudine tuto retineri potest. Cum ergo haec ratio proras quantumuis longas non prohibeat, vtique conueniet in nauibus remis propellendis proram tam longam efficere, quantum rationes supra allegatae id permittunt; hocque modo resistentia nauis maxime diminuetur.

§. 724 Per praxin ergo maxima prorae longitudine, quam quidem nauis sustinere queat, determinata contractio prorae antrorsum idonea atque ad praxin accommodata est eligenda, quae cum inaequalitatibus subitaneis careat tum etiam minimam resistentiam patiatur. Atque in hac indagatione in subsidium vocari possunt, quae superiori libro de figuris, quae sub datis conditionibus minimam resistentiam recipiunt, sunt eruta. Imprimis autem e re erit figuram prorae eiusmodi seligere, quae minimam ab aqua recipiat vim verticalem, quo nauis minorem inclinationem subeat. Quamuis enim in aqua tranquilla incli-
natio

natio sine vlllo periculo esse videatur, tamen in aqua fluctibus turbata, dum aqua mox sese prorae subducit, mox multo maiori copia irruit, a minima inclinatione vehementes perturbationes in statu navis erecto proficiscuntur, quae eo maiores erunt, quo sensibilior fuerit inclinatio naturalis in aqua tranquilla orta.

§. 725. Quoniam prora, cuius singulae sectiones horizontales sunt inter se aequales, ab aqua nullam excipit vim verticalem; etsi praxis hanc figuram respicit, tamen manifestum est, vim verticalem eo magis diminutum iri, quo propius prorae figura ad hanc speciem accedat. Cum igitur in ista specie sectio amplissima sit rectangulum, convenit sectionibus verticalibus vbique deorsum eandem fere latitudinem relinqui, easquae satis repente incuruari et cum spina coaptari, ita vt fundus navis non multum a superficie plana discrepet. Deinde eundem scopum eo magis assequemur, si spina non pedetentim, sed satis subito in extremitate prorae demum ascendat, et supra superficiem aquae promineat. His autem regulis non obstantibus latitudo antrorsum ita sensim diminui potest, vt resistentiae aquae maxima vis adimatur.

§. 726. Quae igitur haecenus circa constructionem navium remorum ope propellendarum sunt praecepta, ea praeter regulas generales in constructione navium observandas huc redeunt vt primo maxima longitudo, quam navis sustinere queat, ipsi tribuatur, ac puppis prorae ratione longitudinis non nimis dissimilis statuatur, quo axis navis verticalis per centrum gravitatis ductus simul per centrum gravitatis sectionis aquae proxime transeat. Tum sectioni aquae *aEbF* eiusmodi detur forma, quae antrorsum satis
lento

lente conuergat , ita vt resistentia , quam ipsa haec superficies in directione Ca mota pateretur , tam fiat parua , quam aequabili curuatura fieri potest. Huic ergo requisito satisfiet , si curuae lineae aE et aF quam minime a chordis rectis aE et aF distent ; hoc enim modo obliquitas aquae incurrentis vbique propemodum erit eadem , atque allisio directa seu ad directam accedens maxime evitatur. Quo magis autem sectio aquae ad resistentiam minuendam fuerit accommodata , tum ipsa prora tota eo minori resistentiae erit obnoxia , eo quod sectiones horizontales deorsum captae vix sensibilibiter coarctari debent.

§. 727. Sectio igitur verticalis secundum longitudinem Fig. 2. nauis facta vsque ad extremitates fere A et B eandem profunditatem retinebit , tum vero ex A in a satis subito inflectetur vt a situ verticali tam parum discrepet , quantum curuedo aequabilis permittit. Denique sectionem amplissimam $fFCEe$ minime a figura rectangulari differre oportebit ; ita vt tantum anguli in E et F obtundantur , atque in aequabilem figuram reducantur. Fig. 3. Quodsi autem hoc modo tres sectiones nauis principales fuerint determinatae , tota figura definietur vel statuendo omnes sectiones horizontales sectioni aquae affines , vel istam affinitatem in omnes sectiones verticales sectioni amplissimae parallelas introducendo. Vtroque modo figura fere eadem resultabit , quae in aqua mota cum resistentiam minimam patietur , tum vero simul ab aqua minimam vim verticalem excipiet ; quae sunt duo requisita nauibus remorum ope propellendis maxime propria.

Cap. IX.

DE VI, QUAM VENTVS IN VELA
EXERIT.

§. 728.

Quae haectenus de vi aquae in nauiſ ſuperficiem incur-
rentis ſunt expoſita , eadem ad vim venti contra
datam ſuperficiem irruentis transferri poſſunt , obſeruata
ratione grauitatis ſpecificae inter aquam et aerem. Quem-
admodum enim vis aquae in datam ſuperficiem impin-
gentis reducta eſt ad pondus determinati cuiuſdam volu-
minis aquae ; ita ſimili modo vis venti reductetur ad pon-
dus pariſ voluminiſ aeris. Cum igitur aer ſit fere octin-
gentieſ leuior quam aqua , eadem determinatio viſ , quae ab
allapſu aquae proficiſcitur , pro vento valebit , ſi in ratio-
ne 800 ad 1 diminuetur : ſiquidem et celeritas et obli-
quitas incidentiae utroque caſu fuerit eadem. Aſſumemus
ſcilicet vim venti pariter ac aquae , proportionalem primo
ſuperficieſ in quam incurrit , ſecundo quadrato celeritatiſ ,
qua irruit , ac tertio quadrato ſinuſ anguli incidentiae ,
quippe quaſ rationeſ proximè ad veritatem accedere ex-
perientia teſtatur.

§. 729. Haſ ob rationeſ facile foret eodem modo ,
quo vim aquae determinauimus , vim venti , quam in ve-
la exerit , definire ſi modo figura velorum , a qua viſ
potiſſimum pendet , eſſet cognita. Quoniam vero hanc
figuram ipſam ante inueſtigari oportet , quam ad viſ cog-
nitionem peruenire liceat , haec tractatio aliquanto pluſ
operiſ requirit , atque nonnulla principia ſtaticae ſingularia
poſtulat , ex quibuſ figurae corporum flexibiliuſ a viribuſ
qui-

quibuscunque sollicitatorum determinari queant. Quo autem ad hanc evolutionem via facilius sternatur, conueniet primum animum a flexibilitate velorum abstrahere, eaque tanquam perfecte rigida contemplari. Hancobrem visum est primo loco tabulas rigidas in velorum locum substituire, quae non obstante vi venti eandem figuram conferuent. Atque haec tractatio maxime similis erit ei, qua vim aquae in superficiem quamcunque irruentis definiuimus.

§. 730. Tribuamus primum tabulae rigidae vicem veli sustentis figuram planam, sitque haec tabula in situ quem tenet firmiter alligata, ita vt de suo situ a vi venti deturbari nequeat. Repraesentet recta VC directionem venti per centrum grauitatis tabulae C ductam sitque ce-
Tab. XX.
fig. 4.
 leritas venti debita altitudini v ipsa tabula quiescente. Conci-
 piatur per directionem venti VC ad planum tabulae duci planum normale, VACB, erit ACV angulus incidentiae sub quo ventus, quasi fluuius aereus in tabulam impingit. Sit huius anguli ACV sinus $= m$, cosinus $= n$ posito sinu toto, $= 1$. Porro ponatur planum tabulae $= bb$, atque ex ante expositis primo constat, mediam directionem vis venti esse normalem ad planum tabulae, ac per eius centrum grauitatis B transire; quae itaque re-
 praesentetur recta CW ad planum tabulae in eius centro grauitatis C normali. Huius ergo vis directio CW cum directione venti producta CX constituit angulum WCX cuius sinus $= n$.

§. 731. Ad quantitatem huius vis venti CW definiendam, primum notandum est, si directio venti ad planum tabulae esset normalis, tum vim venti aequualituram esse ponderi cylindri aerei, cuius basis sit superficies

388 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXEERT.

tabulae bb , et altitudo aequalis altitudini, celeritati venti debitae v . Ex quo vis venti CW aequalis foret ponderi massae aeris, cuius volumen est $= bhw$. Iam propter obliquitatem ACV ista vis diminui debet in ratione duplicata sinus totius 1 ad sinum anguli ACV qui est $= m$, vnde in proposito casu vis venti CW aequabitur ponderi massae aerae, cuius volumen $m^2 bhw$. Quodsi ergo pondus voluminis aquei V fuerit $= M$, pondus voluminis aerei V erit circiter $= \frac{1}{800} M$. Quo circa vis quam ventus VC in tabulam AB exerit, in directione CW erit $= \frac{m^2 bhw}{800V} M$; ita vt haec vis per cognitae virium mensuras possit exhiberi. Censetur quidem ratio grauitatum specificarum inter aquam ad aerem tantum vt 750 ad 1. At cum hic intelligatur aqua dulcis, pro aqua marina assumpta ratio 800 ad 1 veritati satis erit consentanea.

§. 732. Quando aduersus plagam venti cursus est instituendus, maxime respiciendum est ad quantitatem anguli WCX ; quo maior enim hic angulus existit, eo propius directio vis CW ad plagam venti CV accedit. Nauis autem, sequi debet cursum in directione CW , si vndique eandem resistantiam in motu suo offenderet. Verum ob multo maiorem resistantiam laterum quam prorae, directio cursus multo propius ad CV adduci potest, quam CW . Videmus autem in casu praesente angulum WCX fieri maximum, si euadat rectus, quippe quo casu fit eius sinus $n = 1$; et directio venti VC radet tabulam ACB velum repraesentantem. At quoniam hic fit $m = 0$, manifestum est vim venti simul euanescere. Erit ergo angulus rectus quasi asymptotus anguli WCX , ad quam quantumvis prope accedere, ipsam vero nunquam attingere poterit

poterit. Multo minus autem directio vis CW ad CV propius accedere potest, si figura veli non sit plana, vti mox videbimus.

§ 733. Ista vis venti determinatio autem locum non habet, nisi superficies tabulae fuerit perfecte plana, hoc est quasi politissima. Quodsi enim fuerit scabra et inaequalitatibus inquinata, vti in *m*, manifestum est, tam ipsam vim venti CW quam eius mediam directionem maxime turbatum iri, eo quod in qualibet prominentia ventus sub alio angulo incidit, ex quo eius vis simul ac directio magnopere mutatur. Cuiusmodi igitur effectum habiturus sit ventus in talem superficiem asperam incidens ex sequente casu poterimus colligere. Incidat ventus in directione VC in superficiem quasi fractam ACB, ita vt in duas superficies planas AC et BC ad C angulum inter se constituentes impingat, et ad vtramque diuersam habeat inclinationem. Exhibebunt scilicet A et B in superficie imaginaria, plana AcB duas eminentias, et angulus ad C finum; ideoque hic casus aptus erit ad vim venti in superficiem asperam irruentis aestimandam etiamsi binas superficies AC et BC planas assumamus, quae figuras quasunque habere possunt

Tab. XX.
fig. 5.

§. 734. Sit anguli AcV , qui foret angulus incidentiae, si figura esset plana AcB et sinuositate careret, sinus $= m$, cosinus $= n$; linea recta $AB = c$, quae simul latitudinem habeat k , ita vt nunc sit $= ck$ quod ante erat $= hb$. Porro sit $AC = a$, et $BC = b$; sinus anguli $CAB = \alpha$, sinus anguli $CBA = \beta$; illius anguli cosinus $= A$ et huius $= B$, erit anguli ACB sinus $= \alpha B + \beta A$ et cosinus $= \alpha\beta - AB$, hinc erit per trigonometriam $a : b : c = \beta : \alpha : \alpha B + \beta A$, et $cc = aa + bb - 2ab (\alpha\beta - AB)$.

C c c 3

Iam

Iam ventus in partem AC impingit sub angulo VCA = VcA - CAc, cuius sinus propterea erit = mA - nα. Deinde in superficiem alteram BC ventus irruit sub angulo VCB = VcB - ABC, cuius sinus est = mB + nβ. Quodsi ergo ponantur EM et FN mediae directiones harum virium a vento exceptarum, erunt eae primum ad AC et BC normales, tum vero per harum linearum AC et BC puncta media E et F transibunt.

§. 735. Si altitudo debita celeritati venti ponatur = v, erit vis EM = (mA - nα)² akv, atque vis FN = (mB + nβ)² bkv, vti ante inuenimus; neglecta ratione, qua ad mensuram absolutam harum virium inueniendam opus est. Erit ergo vis EM ad vim FN = □ sin. ACc. AC : □ sin. BCc . BC = Ac . sin. ACc : Bc . sin. BCc = $\frac{Ac^2}{AC} : \frac{Bc^2}{BC}$, quoniam est sin. ACc : sin. BCc = $\frac{Ac}{AC} : \frac{Bc}{BC}$. Producantur vires EM et FN donec rectae AB occurrant in e et f erit Ac = $\frac{a}{2A}$ et Bf = $\frac{b}{2B}$; sitque harum virium media directio gGW et ipsa vis aequivalens GW; quae effectum venti quaesitum exhibebit. Quamobrem ex natura aequilibrui primum habetur $\frac{eg \cdot Ac^2}{AC} \cdot \frac{AE}{Ae} = \frac{fg \cdot Bc^2}{BC} \cdot \frac{BF}{Bf}$ ideoque $eg : fg = \frac{B \cdot Bc^2}{BC} : \frac{A \cdot Ac^2}{AC} = B \cdot BC (mB + n\beta)^2 : A \cdot AC (mA - n\alpha)^2$; et cum sit BC : AC = b : a = α : β erit $eg : fg = \alpha B (mB + n\beta)^2 : A\beta (mA - n\alpha)^2$. Ex hac analogia determinatur punctum g, in quo media directio vis venti in rectam AB incidit. Cum sit AE = $\frac{1}{2}AC$; et BF = $\frac{1}{2}BC$, erit quoque $eg \cdot \frac{Ac^2}{Ae} = fg \cdot \frac{Bc^2}{Bf}$ vnde facilis constructio puncti g reperitur.

§. 736. Quodsi ducatur recta EF, erit ea parallela ipsi AB, secetur ea a directione media gGW in puncto o erit-

o eritque $EO:FO = eg:fg = \frac{Bc^2}{Bf} : \frac{Ac^2}{Ae}$. At si directio venti VC fecerit rectam EF in γ erit $Bc:Ac = F\gamma:E\gamma$. Tum vero si ex C in EF demittatur perpendicularum Cp erit ob triangula similia $Ae:AE = CE:Ep$, ideoque $Ae = \frac{CE^2}{Ep}$, et propter $Bf:BF = CF:Fp$, erit $Bf = \frac{CF^2}{Fp}$. Ex his itaque sequitur fore $EO:FO = \frac{F\gamma^2 \cdot Fp}{CF^2} : \frac{E\gamma^2 \cdot Ep}{CE^2}$. Postea ad angulum FoW definiendam vires CM et FN resoluendae sunt in normales ad EF et in ipsam EF incidentes. Sufficiet vero quantitates his viribus proportionales assumisse, ex quo cum sit $EM:FN = \frac{E\gamma^2}{CE} : \frac{F\gamma^2}{CF}$ erit vis normalis ex EM orta $= \frac{E\gamma^2 \cdot Ep}{CE^2}$ et ex FN orta $= \frac{F\gamma^2 \cdot Fp}{CF^2}$. Deinde ex vi EM nascitur vis in directione FE $= \frac{E\gamma^2 \cdot Cp}{CE^2}$, et ex vi FN nascitur vis in directione EF $= \frac{E\gamma^2 \cdot Cp}{CF^2}$; quae duae vires inter se sunt contrariae, binae priores vero conspirant.

§. 737. Si igitur vis aequalens GW pariter in eiusmodi vires laterales resoluatur, debet vis ad EF normalis esse $= \frac{E\gamma^2 \cdot Ep}{CE^2} + \frac{F\gamma^2 \cdot Fp}{CF^2}$; altera vero vis in directione oF erit $= \frac{F\gamma^2 \cdot Cp}{CF^2} - \frac{E\gamma^2 \cdot Cp}{CE^2}$, unde anguli FoW tangens erit $= \frac{CF^2 \cdot E\gamma^2 \cdot Ep + CE^2 \cdot F\gamma^2 \cdot Fp}{CE^2 \cdot F\gamma^2 \cdot Cp - CF^2 \cdot E\gamma^2 \cdot Cp}$. Quo appareat quantum haec directio a directione venti VC deflectat, ducatur GX ipsi VC parallela erit angulus deflexionis $WGX = FoW - F\gamma C$. Cum igitur anguli $F\gamma C$ tangens sit $= \frac{Cp}{p\gamma}$ prodibit anguli WGX tangens $= \frac{CF^2 \cdot E\gamma^2 (p\gamma \cdot Ep + Cp^2) + CE^2 \cdot F\gamma^2 (p\gamma \cdot Fp - Cp^2)}{CE^2 \cdot F\gamma^3 \cdot Cp + CF^2 \cdot E\gamma^3 \cdot Cp}$, quae expressio in plurimas alias formas transmutari potest, ope relationis quae inter lineas figurae intercedit. Ceterum si latera AC et BC fuerint aequalia, fiet anguli WGX tangens $= \frac{p\gamma(Ep^2 - 2Cp^2 + p\gamma^2)}{Cp(Ep^2 + 3p\gamma^2)}$.

§. 738. Apparet autem hoc casu angulum deflexionis WGX , quo media directio vis venti GW ab ipsa venti directione VC declinat, nunquam tantum fieri posse, quam si tabula ventum excipiens est perfecte plana AB ; si enim ventus in directione AC impingit, tum solum partem BC percutiet, quae cum minus sit obliqua ad venti directionem, quam superficies plana AB , directio vis venti quoque propius ad ipsius venti directionem accedet. Quodsi autem angulus VCB maior fiat angulo ACB , tum ventus non solum totam superficiem AC non stringet, sed etiam in partem tantum superficiei BC incidet, quo fiet ut eius effectus non solum fiat multo minor sed etiam non tantopere a directione ventij discrepabit, quam si figura tabulae esset perfecte plana. Hinc igitur perspicuum est, inaequalitatem superficiei ventum excipientis magnopere effectum tum ratione quantitatis quam directionis turbare, ita ut calculus supra datus pro effectu venti in superficiem planam incurrentis determinando locum habere non possit, nisi ista superficies sit perfecte polita, et omni inaequalitate destituta.

Fig. 4.

§. 739. Quae hic de figura plana sunt tradita simul declarant in superficie concaua, qualem vela induere solent, effectum venti vehementer differre debere, prouti superficies velorum fuerit magis minusue laeuigata. Quamobrem si vela vento oblique opponantur, uti fit, si curvus aduersus ventum institui debet, ratio superficiei velorum maxime est spectanda; quippe quae, quo minus fuerit polita, eo magis a scopo deflectet. Hinc igitur colligitur, quo memorato incommodo obuiam eamus, maxime expedire, ut superficies velorum interna; quae per-

per se ob filamenta contexta est inaequalis, maxime laevigetur et quasi polita reddatur; quod commodissime praestabitur, si vela pice vel colore crassiore illinantur. Nautae incommodum hoc animadvertentes vela madefacere solent; quo primum quidem impetrant ut vela magis tendantur atque in superficiem planam magis explanentur; tum vero etiam vento omnem transitum per poros velorum adimunt. Quantumvis autem hae duae res ad propositum facere videantur, tamen equidem effectum a humectatione velorum ortum maxime huic causae tribui debere arbitror, quod cavitates inter filamenta interceptae humido repleantur, sicque superficiem magis laevem mentiantur.

§. 740. Inuenta vi, quam vela a vento impulsiva sustinent definiri poterunt vires, quae ad vela in eodem situ continenda requiruntur; ad hoc enim necesse est, ut vires velum continentes cum media vi venti, quam determinauimus, in aequilibrio consistant, nisi ipsum velum sit graue, quo casu in statu aequilibrum simul ponderis ipsius veli ratio est habenda. Teneat, uti primo posuimus, veli vicem tabula plana *AB* grauitatis quidem *expers*, in quam ventus sub directione quacunque allidat, transibit media directio vis venti *CM* per superficiei tabulae centrum grauitatis *C*, eritque ad ipsum planum normalis, quantitatem autem huius vis ita determinauimus cum ex celeritate venti, eiusque obliquitate, tum ex superficie tabulae, ut pondus huic vi aequale assignari possit. Sit *P* pondus huic vi aequale, atque vis venti tabulam vrgentis eo est perducta, ut tabula in directione *CM* sollicitetur vi, quae aequalis sit ponderi *P*. Quare si haec tabula naui fit fir-

Tab. XXI.
fig. I.

miter affixa vel alligata, ipsa nauis sollicitabitur in directione CM a vi, quae aequalis est ponderi P .

§. 741. Cum autem vela ope funium seu cordarum ad malos alligari soleant, conueniet vim determinari, quam hae cordae sustinent. Ponamus tabulam AB ope duarum cordarum Aa et Bb malo vel naui esse alligatam, ita vt cordae secundum longitudinem a vi P in directione CM pellente extendantur. Quo igitur vires in directionibus Aa et Bb agentes cum vi P in aequilibrio consistant, primum oportet directiones Aa et Bb cum directione CM in eodem plano esse positas. Deinde requiritur, vt directiones Aa et Bb , si producantur, sese in eodem rectae CM puncto interfecerint. Tertio denique aequilibrum status postulat, vt ipsae vires Aa et Bb sint inter se in ratione reciproca sinuum angulorum, quos ipsarum directiones productae cum directione CM constituunt; simul vero vna harum virium puta Aa se habeat ad vim P , vt sinus inclinationis alterius directionis Bb ad CM , ad sinum anguli, quem ambae directiones aA et bB inter se constituunt. Atque ex his conditionibus tam directiones cordarum, quam vires, quibus tenduntur definientur.

§. 742. Cum ergo, si tabula AB vicem veli sustinens fuerit plana directio CM sit ad AB normalis; sumtis interuallis CA et CB aequalibus, directiones Aa et Bb aequaliter inclinatae esse debent ad AB ; simulque ambae cordae Aa et Bb aequalibus viribus tendentur. Sit anguli aAC seu bBC sinus $= \mu$ cosinus $= \nu$; et p denotet vim, qua vtraque corda tendetur. His positis erit anguli, quo Aa vel Bb ad CM inclinatur, sinus $= -\nu$; et cosinus $= \mu$; vnde anguli, quo directiones aA et bB
ad

ad se mutuo inclinantur, sinus erit $= - 2 \mu v$. Hinc conditio tertia istam praebit analogiam $p: P = -v: -2\mu v = 1:2\mu$; erit ergo $p = \frac{P}{2\mu}$. Quamobrem erit sinus anguli aAB seu bBA ad sinum totum, uti semissis vis P ad vim p , qua corda Aa vel Bb tenditur. Vnde perspicuum est, cordas a minima vi tendi, si earum directio fuerit perpendicularis ad planitiam veli AB , siquidem velum concipiatur grauitatis expers.

§. 743. Maneant directiones cordarum Aa et Bb ad Fig. 2. planitiam veli normales, atque adeo parallelae directioni vis a vento exceptae CM , sint autem interualla CA et CB inaequalia. Ex natura vectis constat, ad aequilibrium constituendum summam virium Aa et Bb aequalem esse debere vi P ; tum vero vires Aa et Bb reciproce proportionales esse oportere distantis AC et BC . Quodsi ergo vis Aa ponatur $= p$; vis $Bb = q$ erit primo $p + q = P$ tum vero $p \cdot AC = q \cdot BC$, ideoque ob $p \cdot AC = P \cdot BC - p \cdot BC$ erit $p = \frac{P \cdot BC}{AB}$ et $q = \frac{P \cdot AC}{AB}$. Velum igitur planum a vento inflatum a duabus viribus, quarum directiones sint normales ad planum veli, atque cum directione media vis venti CM in eodem plano sitae, in aequilibrio contineri potest. Scilicet recta AB per puncta A et B quibus cordae velo sunt alligatae per centrum grauitatis superficiei veli transire debet.

§. 744. Habeat velum planum figuram triangularem Fig. 3. ABD , erit directio vis venti media normalis ad hoc planum in ipsius centro grauitatis C ; sitque vis venti $= P$. Alligatum iam sit velum hoc in tribus angulis A, B, D , ita ut cordae ad planum trianguli sint normales; atque oporteat vim determinare, quam vnaquaeque corda patitur.

tur. Sit vis cordae in A alligatae $= p$, vis cordae B $= q$ et vis cordae D $= r$. Quaeratur vis aequivalens binis viribus q et r , quae erit $= q+r$ atque in rectae puncto E applicata erit, ita vt fit $BE : DE = r : q$. Quare haec vis $q+r$ in E applicata vna cum vi p in aequilibrio tenere debet vim venti P: ex quo recta AE per centrum grauitatis C transeat neceffe est. Quoniam vero AE per centrum grauitatis trianguli tranfit, erit $BE = DE$, vnde erit $r = q$. Tum vero effe debet haec vis in E applicata $q+r$ ad vim in A, nempe p , vti AC ad CE hoc est vt 2 ad 1; atque infuper habetur $p+q+r = P$. Cum ergo fit $q = r$, et $2p = q+r$ fiet $p = q = r = \frac{1}{3}P$; vires igitur cordarum in fingulis angulis applicatarum erunt inter fe aequales, et vnaquaeque aequabitur trienti vis aequibratae P.

Fig. 4. §. 745. Ponamus iam velum planum habere figuram quadrilateram ABDE, atque cordis quatuor in fingulis angulis A, B, D, et E normaliter ad planum applicatis in aequilibrio contineri debere. Sit vis quam corda A fufinet $= p$; vis cordae B $= q$; vis cordae in D $= r$, et vis cordae in E $= s$; vis autem venti a velo exceptae fit $= P$, quae pariter erit normalis ad planum veli, atque per eius centrum grauitatis C tranfubit. Ad vires igitur p, q, r et s determinandas primum oportet centri grauitatis C positionem definire. Ducantur diagonales AD et BE fe mutuo in O decuffantes: tum vtraque bifecetur in H et I: capiantur porro $Hb = \frac{1}{3}HO$ et $Ii = \frac{1}{3}IO$; ac ex b ducatur diagonali BE parallela bC fimilique modo ex i diagonali AD parallela iC ; erit harum linea

nearum ductarum interfectio C centrum grauitatis quadrilateri, quod quaerebatur.

§. 746. Conferantur iam inter se binae vires sibi diagonaliter oppositae nempe p , r et q , s : ac primo quaeratur vis binis p et r simul sumtis aequiualens, quae erit $= p+r$, et applicanda erit in puncto n , ita vt fit $p \cdot An = r \cdot Dn$: vnde fiet $An = \frac{r \cdot AD}{p+r}$ et $Dn = \frac{p \cdot AD}{p+r}$. Simili modo vis binis q et s aequiualens erit $= q+s$, atque applicanda in puncto m , vt fit $Bm = \frac{s \cdot BE}{q+s}$ et $Em = \frac{q \cdot BE}{q+s}$. Quoniam itaque velum ab his duabus viribus $p+r$ et $q+s$ in n et m applicatis in aequilibrio teneri debet, recta mn per punctum C transibit; vnde erit $mi:Ob = mO:On$; tum vero erit $p+q+r+s = P$ atque $p+r:q+s = mC:nC = mi:Oi$; seu $p+r = \frac{mi \cdot P}{mO}$ et $q+s = \frac{Oi \cdot P}{mO}$. Ex his aequationibus tandem elicientur tres sequentes: I. $\frac{1}{2}(r-p)AD + (r+p)OH = \frac{2}{3}P \cdot OH$ II. $\frac{1}{2}(s-q)BE + (s+q)OI = \frac{2}{3}P \cdot OI$ atque III. $\frac{1}{2}(s-q)BE + \frac{1}{3}(s+q)OI : \frac{2}{3}(s+q)OI = \frac{2}{3}(r+p)OH : \frac{1}{2}(r-p)AD + \frac{1}{3}(r+p)OH$, vel $p+r+q+s = P$.

§. 747. Per has tres aequationes quatuor vires non omnes determinantur: vnde patet quaestionem hanc esse indeterminatam, vnamque cordae tensionem pro lubitu assumi posse, ex qua deinceps reliquae definiantur. Commodissime solutionem generalem autem adornabimus, si sumpta vi quacunque noua u ponamus $r+p = \frac{1}{2}P + u$ et $s+q = \frac{1}{2}P - u$, atque binae priores aequationes dabunt $r-p = (\frac{1}{3}P - 2u) \frac{OH}{AD}$ et $s-q = (\frac{1}{3}P + 2u) \frac{OI}{BE}$. Hinc assumpta pro lubitu vi u quatuor vires cordas tendentes ita determinabuntur, vt fit $p = \frac{1}{2}P \cdot \frac{Ab}{AD} + u \cdot \frac{DO}{AD}$; $q = \frac{1}{2}P \cdot \frac{Bi}{BE} - u$

— $u \cdot \frac{EO}{BE}$, $r = \frac{1}{2} P \cdot \frac{Db}{AD} + u \cdot \frac{AO}{AD}$; $s = \frac{1}{2} P \cdot \frac{Ei}{BE} - u \cdot \frac{BO}{BE}$. Hinc intelligitur, si velum in pluribus quam 4 angulis alligetur, determinationem virium, quibus singulae cordae tenduntur, eo magis fore indeterminatam.

Fig. 5. §. 748. Si velum non fit planum, sed vel ex aliquot superficiebus planis compositum, vel etiam incurvatum, atque id in duobus punctis A et B alligetur, fieri potest, ut media directio vis venti CM in rectae AB punctum quodcumque C incidat et ad eam sub angulo quocumque ACM inclinetur. Sint igitur primo directiones cordarum Aa et Bb in eodem plano cum CM ac posita vi a vento excepta = P, fit vis cordam Aa tendens = p, et vis cordam Bb tendens = q. Porro quia directiones aA et bB productae in eodem puncto rectae CM concurrere debent, fit anguli AMB sinus = α , anguli ACM sinus = σ et cofinus = η : eritque $p : P = \frac{\sin. CMB}{\sin. AMB}$ et $q : P = \frac{\sin. AMC}{\sin. AMB}$ ergo $p = \frac{P \cdot \sin. CMB}{\sin. AMB}$ et $q = \frac{P \cdot \sin. AMC}{\sin. AMB}$. Cum autem fit $\alpha (\sin. AMB) : \sin. CMB = AB : CM$ et $\alpha (\sin. AMB) : \sin. AMC = AB : CM$ et $\alpha (\sin. AMB) : \sin. CBM = AB : CM$ erit $p = \frac{\sigma P \cdot BC}{AB \cdot \sin. CAM}$ et $q = \frac{\sigma P \cdot AC}{AB \cdot \sin. CBM}$. Anguli autem CAM et CBM ita inter se erunt affecti ut fit $\frac{AC \cdot \tan. CAM}{\sigma + \eta \tan. CAM} = \frac{BC \cdot \tan. CBM}{\sigma - \eta \tan. CBM}$ seu $\frac{\sigma \cot. CAM}{AC} + \frac{\eta}{AC} = \frac{\sigma \cot. CBM}{BC} - \frac{\eta}{BC}$ vel $AB \cdot \cot. ACM = AC \cot. CBM - BC \cdot \cot. CAM$.

§. 749. Ratio huius vltimae aequationis, quae relationem continet inter angulos CAM et CBM, ad id ut rectae aA et bB productae se mutuo in ipsa recta CM interfecerent, facile hoc modo perspicietur. Ex M in AB demittatur perpendicularum MP quod instar sinus totius consideretur;

fideretur ; eritque $CP = \cot. BCM = - \cot. ACM = - \frac{2}{\sigma}$.
 Tum vero habebitur $BP = \cot. CBM$, et $AP = \cot. CAM$:
 qui valores si loco cotangentium in vltima aequatione
 substituantur , prodibit $- AB . CP = AC . BP - BC . AP$
 $= - AC . CP - BC . CP$. Hinc ergo fiet $AC (BP + CP)$
 $= BC (AP - CP)$ seu $AC . BC = BC . AC$ quae est ae-
 quatio identica. Sumtis ergo ad hanc normam angulis
 a AB et b BA ipsae vires , quibus cordae tendentur , ex
 superioribus aequationibus definientur.

§. 750. His de velorum planorum vi , quam a ven-
 to excipiunt , expositis , pergamus ad vela incuruata ,
 quae figuram habeant quamcunquae immutabilem , ita vt
 eandem figuram retineant , quantumuis ventus ea sollici-
 tet ; cuiusmodi forent vela , si ex metallo , aliaue mate-
 ria rigida conficerentur. Sit AMB eiusmodi velum cuius
 figura data fit per aequationem inter abscissam $AP = x$
 et applicatam $PM = y$. Irruat in hoc velum ventus ce-
 leritate debita altitudini v in directione VQM , quae cum
 axe AB constituat angulum VQN , cuius sinus fit $= m$
 cosinus $= n$. Ducatur applicata proxima pm , vt fit Pp
 $= dx$; $mm = dy$ et elementum curuae $Nm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$
 $= ds$; in quod ventus impinget sub angulo VMm , vel
 $VMA = NmM - PMQ$, cuius sinus propterea erit $=$
 $\frac{mdx - ndy}{ds}$. Vis igitur , quam elementum Mm a vento su-
 stinet erit vt $\frac{v(mdx - ndy)^2}{ds}$, cuius mensura absoluta , si lati-
 tudo veli in hoc loco ponatur $= u$, et voluminis aquei
 V pondus sit $= M$, erit pondus $\frac{1}{1000} \frac{M}{V} \cdot \frac{uv(mdx - ndy)^2}{ds}$, po-
 namus autem breuitatis gratia a pro quantitate constante
 $\frac{1}{1000} \frac{M}{V}$, ita , vt vis quam elementam Mm latitudinem ha-
 bens u sustinet sit $= \frac{auv(mdx - ndy)^2}{ds}$.

Tab. XXII.
 fig. 1.

§. 751. Vis huius directio autem est normalis ad velum in M, quare si ducatur normalis KMN, vt fit $PN = \frac{ydy}{dx}$, velum vrgebitur in directione NM, vel si vis referatur ad axem AB in directione TN, vi $= \frac{\alpha v(mdx-ndy)^2}{ds}$. Resoluatur haec vis in duas laterales RN et SN, quarum illa ad AB fit normalis, haec in ipsam AB incidat, erit ob triangula TNR et mMn similia, vis NR $= \frac{\alpha v ndx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et vis NS $= \frac{\alpha v dy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$. Summa ergo omnium virium elementarium NS erit $= \alpha v \int \frac{udy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et summa omnium RN $= \alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$. At momentum vis RN respectu puncti A est $\frac{\alpha v(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}$, vnde summa omnium momentorum $= \alpha v \int \frac{v(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}$, quae diuisa per $\alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ dabit punctum C in axe AB, per quod media directio vis venti CW transibit, erit scilicet $AC = \frac{\int v(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{\int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}}$. Atque vis tota venti reducetur ad duas vires CE et CF, quarum illa est $CE = \alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et $CF = \alpha v \int \frac{udy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ ex quarum compositione oritur vis CG vi venti, quam velum AMB sustinet, aequiualens.

§. 752. Quodsi ad angulum attendamus, quo media directio vis venti CW ab ipsa directione venti VQ declinat, facile colligemus, eum angulo recto fore eo minorem, quo magis figura veli AMB fuerit incuruata siquidem ventus totam internam veli superficiem feriat. Si enim ventus directe in velum impingat, tum quidem media directio CM ab ipsa venti directione VQ non discrepabit

bit, ex quo intelligitur discrepantiam cum obliquitate anguli AQV crescere. At vero haec obliquitas ultra certum terminum crescere non potest, quin portio veli quaedam prorsus non a vento impellatur, atque adeo inutilis euadat. Sin autem ventus maxima obliquitate, quam memorata conditio permittit, in velum illabatur, tum portionem quidem aliquam veli vehementer oblique stringet, hincque directio vis venti fere ad angulum rectum discedet a directione venti, simul vero ventus ob curuaturam veli in reliquam portionem magis directe incurret, unde directio vis venti multo magis ad directionem venti reducetur, propterea quod vis venti directe impingentis multo maior est, quam ubi oblique venit. Ex quibus efficitur, vela plana esse aptissima non solum ad maximam vim venti excipiendam, sed etiam ad cursum aduersus ventum instituendum.

§. 753. Quanquam haec per se satis sunt plana, tamen eo magis illustrabuntur, si vim venti, quam in vela flexibila exerit, determinabimus, quo in negotio imprimis necesse est, vt curuatura, quam ventus velo inducit, definiatur, hac enim cognita per solutionem praecedentis problematis, si curuatura inuenta loco figurae AMB substituatur, vis venti eiusque media directio cognoscetur. Quae operatio primo intuitu admodum molesta videtur, cum curua veli prodeat transcendens: at vero huius curuae inuentio ipsa simul monstrabit vim venti in velum exercitam, eiusque mediam directionem; ita vt substitutione non sit opus. Cum enim curuae etiam simplicissimae in calculo superiori substitutae ad aequationes maxime intricatas deducant, ea curua, quae a natura for-

matur, dum ventus velum perfecte flexile inflat, ad simplicissimum casum perducit; etiam si ipsa sit transcendens. Eiusmodi scilicet commoda natura semper suppeditat, ut quo strictius eam sequamur solutiones quidem subinde intricatas attamen ita comparatas obtineamus, ut quaesito commodissime satisfaciant.

Fig. 2. §. 754. Sit igitur filum perfecte flexile BMA , quod loco veli considero, in B fixum, in A autem retineatur sufficienti vi AG , ita ut a vento VM inflatum et in figuram BMA incurvatum, in hoc statu perseveret. Ad hanc curvam BMA , quam filo ventus inducit inveniendam ex A datur ad venti directionem recta normalis AP , quae instar axis consideretur, in quo ponatur abscissa $AP = x$, respondens applicata $PM = y$; et longitudo fili $AM = s$. Quoniam iam filum perfecte flexile ponitur, necesse est, ut omnes vires, quae filum in M inflectere conantur, se mutuo destruant, nisi enim hoc eveniret, filum actu in M magis minusve inflecteretur, ideoque status, quem iam permanentem pono, turbaretur. Quia hic tantum ad flexibilitatem, quam filum in puncto M habet, attendo, in reliquis locis id tanquam rigidum contempler; eritque pars BM omnino immobilis, pars AM vero circa M quasi polum rotari posset, si vis hunc effectum intendens adesset. Patet autem a vi AG si ea sola adesset, filum utique circa A motum iri; ab impulsibus venti autem in partem AM factis filum in partem contrariam replicaretur, quamobrem necesse est, ut hi duo effectus se mutuo destruant.

§. 755. Vires autem, quibus corpus quodcumque circa polum seu axem fixum conuertitur, definiuntur per
momen.

momenta, quae ex viribus respectu illius poli seu axis fixi nascuntur. Sic ad momentum ex vi AG , quae fit $=G$, cognoscendum, resoluatur haec vis in duas laterales AE et AF , axi AP cum congruentes tum normales, ac fit vis $AE=E$ et vis $AF=F$; ita ut fit $G=\sqrt{E^2+F^2}$. Hoc facto ex vi $AE=E$ nascitur momentum filum AM circa M dextrorsum rotans $=Ey$; at ex vi $AF=F$, oritur momentum sinistrorsum rotans $=Fx$, ita ut momentum ex vi G ortum et sinistrorsum vrgens fit $=Fx-Ey$. Tantum ergo esse debet momentum, quo filum circa M a vento dextrorsum sollicitatur: ad quod inueniendum capiatur quaecunque particula fili $Yy=d\omega$, et ordinatae ipsi respondentes ponantur $AX=\xi$, $XY=\Phi$ et ponatur breuitatis gratia vis venti elementum Yy vrgens $=pd\omega$; quae cum fit normalis puta YZ , resoluatur in laterales YR et YS coordinatis parallelas, erit vis $YR=pd\Phi$ at $YS=pd\xi$.

§. 756. Iam a vi $YR=pd\Phi$ oritur momentum dextrorsum vrgens $=pd\Phi(y-\Phi)$, et a vi $YS=pd\xi$ momentum pariter dextrorsum tendens $=pd\xi(x-\xi)$. Illorum igitur momentorum omnium summa erit $=y\int pd\Phi - \int p\Phi d\Phi$, si post integrationem ita peractam, ut integrale evanescat posito ξ et $\Phi=0$, ponatur $\xi=x$ et $\Phi=y$; eadem ergo momentorum summa erit $=y\int pdy - \int py dy = \int dy \int pdy$, si pds denotet vim venti, quam elementum curvae Mm patitur. Simili modo summa alterorum momentorum ab A ad M vsque erit $=x\int pd\xi - \int p\xi d\xi$, si post integrationem debito modo peractam ponatur $\xi=x$: ex quo eadem momentorum summa erit $=x\int pdx - \int px dx = \int dx \int pdx$. A vento ergo fi-

lum AM dextrorsum circa M vrgebitur momento virium $= \int dy sp dy + \int dx sp dx$, cui aequale esse debet momentum $Fx - Ey$, quo idem filum sinistrorsum pellitur. Hinc itaque obtinebitur ista aequatio $Fx - Ey = \int dy sp dy + \int dx sp dx$ seu $Fdx - E dy = dy sp dy + dx sp dx$, qua natura curvae continetur.

§. 757. Quoniam $p ds$ denotat vim, qua elementum $Mm = ds$ a vento normaliter vrgetur, erit $p ds = \frac{\alpha v dx^2}{ds}$, si quidem v denotet altitudinem celeritati venti debitam, et α est quantitas constans supra (§. 750) descripta. Quo autem haec ad mensuras finitas reducantur, necesse est filo latitudinem tribuere seu quasi infinita eiusmodi fila sibi parallela et contigua concipere, quo ipso figura veli quadrangularis rectangularis resultat, cuius longitudo cum sit AMB , ponatur latitudo $= c$ eritque $p ds = \frac{\alpha v dx^2}{ds}$, et nunc α est $\frac{c}{100} \cdot \frac{M}{V}$, vbi M designat pondus massae aqueae, cuius volumen est V . Cum igitur sit $p = \frac{\alpha v dx^2}{ds^2}$, erit $sp dx = \alpha v s \frac{dx^3}{ds^2}$ et $sp dy = \alpha v s \frac{dx^2 dy}{ds^2}$, quia celeritas venti V est constans. Substituuntur hi valores in aequatione supra inuenta, ac prodibit pro curua quaesita haec aequatio $\frac{Fx - Ey}{\alpha v} = \int dy s \frac{dx^2 dy}{ds^2} + \int dx s \frac{dx^3}{ds^2}$: quae autem ter differentiari deberet, antequam a signis integralibus penitus liberetur.

§. 758. Expediet autem aequationem generalem ad formam simpliciorum, et a signis integralibus liberam perducere. Cum igitur sit $Fdx - E dy = dy sp dy + dx sp dx$, erit sumto dx constante $- E dy = d dy sp dy + p ds^2$, et $- E = sp dy + \frac{p ds^2}{dy}$; quae denuo differentiata dat $0 = 3p dy + \frac{ds^2}{dy} - \frac{p ds^2 dy}{dy^2}$, ob $ds ds = dy dy$. Hinc ergo erit $\frac{dp}{p} = \frac{ds^2}{dy} - \frac{ds^2 dy}{ds^2} = \frac{ds^2}{dy} - \frac{3 ds^2}{ds}$ quae integrata dat $p = \frac{C dx dy}{ds^2}$.

$\frac{Cdxddy}{ds^3}$. Quocirca erit $\int p dx = C \int \frac{dx^2 ddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Cdy}{ds} + M$;
 et $\int p dy = C \int \frac{dx dy ddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-Cdx}{ds} + N$. Quibus valoribus
 in prima aequatione substitutis erit $F dx - E dy = \frac{-Cdx}{ds}$
 $+ N dy + \frac{Cdx}{ds} + M dx$, vnde habetur $M = F$ et N
 $= -E$. Sumta ergo constante C , quae est arbitraria
 negatiua fiet $p = -\frac{Cdxddy}{ds^3}$; et $\int p dx = F - \frac{Cdy}{ds}$, atque
 $\int p dy = \frac{Cdx}{ds} - E$. Cum igitur puncto M in A translato
 tam $\int p dx$ quam $\int p dy$ euanescent, erit in A $\frac{dy}{ds} = \frac{F}{C}$ et
 $\frac{dx}{ds} = \frac{E}{C}$; vnde fit $C = G = \sqrt{(EE + FF)}$.

§. 759. Cum iam nostro casu fit $p = \frac{\alpha v dx^2}{ds^2}$; habebimus pro curua AMB hanc aequationem $\alpha v dx ds = -G ddy$, quae integrata dat $\alpha v s dx = -G dy + C dx$; vbi ad constantem C determinandam notasse oportet, facto $s = \alpha$, fieri $\frac{dy}{dx} = \frac{F}{E}$, vnde erit $\frac{dy}{dx} = \frac{C}{G} = \frac{F}{E}$; ideoque $C = \frac{FG}{E}$. Consequenter ista emerget aequatio $\alpha v s dx = \frac{C}{E} (F dx - E dy)$. Quo autem aequatio inter coordinatas, eliminato arcu s , obtineatur, resumatur aequatio $\alpha v dx ds = -G ddy$, quae per $\frac{dy}{ds}$ multiplicata fit $\alpha v dx dy = -\frac{G dy ddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$, cuius integrale est $\alpha v y dx = C dx - G ds$; et translato M in A , quia fit $\frac{dx}{ds} = \frac{E}{C}$, erit $\frac{C}{E} = \frac{F}{G}$ et $C = \frac{G^2}{E}$; ideoque $\alpha v y dx = \frac{G^2 dx}{E} - G ds$. Ergo $E G ds = G^2 dx - \alpha v E y dx$; et $E G dy = dx \sqrt{(F^2 G^2 - 2 \alpha v E G^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}$ siue $dx = \frac{E G dy}{\sqrt{(F^2 G^2 - 2 \alpha v E G^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}}$ et $ds = \frac{dy (G^2 - \alpha v E y)}{\sqrt{(F^2 G^2 - 2 \alpha v E G^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}}$

§. 760. Hinc primum patet directionem vis G velum retinentis cum tangente curuae in A congruere; translato enim M in A fit $dx:ds = AE:AG$. Deinde intelligi-

telligitur curuam AM vbique concauitatatem axi AP ob-
 uertere: ex aequatione generali enim $p = \frac{-Gdxddy}{ds^3}$, fe-
 quitur ddy vbique habere valorem negatiuum, quod est
 signum concauitatis. Hancobrem curua alicubi habebit
 tangentem axi AP parallelam, quod eueniet, vbi fit dy
 $= 0$, seu $ds = dx$. Cum igitur fit $EGds = G^2dx -$
 $\alpha vEy dx$, facto $ds = dx$ fiet $y = \frac{G^2 - EG}{\alpha vE}$; haec est ergo
 applicata maxima in curuatura veli AMB; et curua vl-
 tra hunc locum iterum ad axem AP accedet, donec
 ipsi occurrat. Denique ex aequationibus inuentis assignari
 potest longitudo arcus AM $= s$, per applicatam PM $=$
 y ; erit enim per vltimam aequationem integratam $s =$
 $\frac{FG - \sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha vEG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}}{\alpha vE}$ et radius osculi curuae in M,
 qui est $= \frac{ds^3}{dxddy}$, fiet $= \frac{G}{p} = \frac{Gds^2}{\alpha vdx^2} = \frac{(G^2 - \alpha vEy)^2}{E^2G}$.

Fig. 3.

§. 761. Ponamus iam AMHB esse curuam veli a
 vento in directione VDH incurrente formatam, et quo-
 niam positis AP $= x$; PM $= y$, et AM $= s$, est $dx =$
 $\frac{EGdy}{\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha vEG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}}$ et $ds = \frac{dy(G^2 - \alpha vEy)}{\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha vEG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}}$,
 ducatur ordinata maxima DH, quae nunc instar axis con-
 sideretur; ad quam ex M ducto perpendicularo MQ, po-
 natur HQ $= t$ et MQ $= z$; erit ob HD $= \frac{G^2 - EG}{\alpha vE}$;
 PM $= y = \frac{G^2 - FG}{\alpha vE} - t$; et $dx = -dz$; vnde fit $dy = -$
 dt et $\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha vEG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)} = E\sqrt{(2\alpha vGt$
 $+ \alpha^2v^2tt)}$. Quare erit $dz = \frac{Gdt}{\sqrt{(2\alpha vGt + \alpha^2v^2tt)}}$. Ponatur
 $\frac{G}{\alpha v} = a$, eritque $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at + tt)}}$; et quantitas a erit ra-
 dius osculi curuae in puncto H, quod est quasi vertex
 curuae. Nam quia ob signum radicale eidem valori t
 respondet applicata z tam affirmatiua quam negatiua, erit
 axis HD simul curuae diameter orthogonalis.

§. 762.

§. 762. Ex data ergo curuatura veli AHB, quae inter coordinatas $HQ = t$ et $QM = z$ ista aequatione exprimitur $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at+tt)}}$, innotescit vis, quae ad velum in dato loco A retinendum requiritur. Erit namque haec vis $G = \alpha av$, ideoque constans: vnde ad velum in quocunque loco retinendum eadem requiritur vis, cuius directio cum tangente curuae in eo loco congruere debet. Scilicet si veli latitudo ponatur $= c$; atque massae aquae, cuius volumen fit $= V$, pondus fit $= M$, quia est $\alpha = \frac{c}{100} \frac{M}{V}$; erit vis ad velum in quolibet loco detinendum requisita $= \frac{acv}{100} \cdot \frac{M}{V}$, seu ista vis aequabitur ponderi massae aerae cuius volumen est $= acv$; erit ergo hoc volumen parallelepipedon rectangulum, cuius tres dimensiones sunt; radius osculi curuaturae veli in vertice H; latitudo veli c , et altitudo debita celeritati venti v . Haec eadem vis autem simul praebet tensionem veli in singulis locis, qua superficies veli diruptioni resistit, quae ergo erit in duplicata ratione celeritatis venti, si velum eandem curuaturam conferuet.

§. 763. Quoniam est $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at+tt)}}$ erit integrando $z = a \int \frac{a+t+\sqrt{(2at+tt)}}{a} dt$. Quodsi ergo ponatur $HD = f$ et $AD = b$ erit $b = a \int \frac{a+f+\sqrt{(2af+ff)}}{a} dt$; et si in A ducatur tangens AK axi occurrens in K, erit anguli AKH tangens $= \frac{a}{\sqrt{(2af+ff)}}$; ideoque sinus $= \frac{a}{a+f}$; et cosinus $= \frac{\sqrt{(2af+ff)}}{a+f}$. Si igitur in axe capiatur $HI = a$ erit $DI = a+f$; ideoque habebitur $AK : AD = DI : HI$. Posito porro arcu $HM = s$, erit $ds = \frac{dt(a+t)}{\sqrt{(2at+tt)}}$; atque ipse arcus $HM = s = \sqrt{(2at+tt)}$; vnde erit arcus $AH = \sqrt{(2af+ff)}$. Denique radius osculi in M erit $= \frac{ds^3}{-atdaz}$

$= \frac{(a+f)^2}{a}$; vnde in puncto A erit radius osculi $= \frac{(a+f)^2}{a} = \frac{DI^2}{HI}$; quae sunt praecipue curuae velariae proprietates.

§. 764. Consideremus nunc velum AHB quod vento directe ita exponatur, vt directio venti VH fit ad rectam AB normalis; quae recta AB per veli extremitates A et B, quibus est fixum, transeat. Sit distantia extremitatum AB $= 2b$ et longitudo veli seu curua AHB $= 2g$, quae duae res in praxi solent esse datae; vento ergo in directione VH incurrente velum in curuam ante descriptam incuruabitur, eritque eius vertex in H existente HD diametro curuae. Ponatur radius osculi in H, $= a$; et interuallum HD $= f$; habebimus ad has quantitates a et f determinandas istas duas aequationes $b = a \sqrt{\frac{a+f+\sqrt{(2af+ff)}}{a}}$ et $g = \sqrt{(2af+ff)}$; vnde erit $f = \sqrt{(aa+gg)} - a$. et $b = a \sqrt{\frac{g+\sqrt{(aa+gg)}}{a}}$, ex qua aequatione valor ipsius a erui debet. Quod quo facilius praestari possit expediet logarithmum per seriem exprimere, eritque $b = g - \frac{1 \cdot g^3}{2 \cdot 3 a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot g^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot g^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 a^6} +$ etc. vnde si cognitus esset valor ipsius a , reperiri posset facile valor ipsius b .

§. 765. Ex hac aequatione primum apparet si fuerit $b = g$ seu distantia AB ipsi veli longitudini AHB aequalis, fore $a = \infty$, quod quidem per se est manifestum, quia hoc casu velum in lineam rectam erit extensum, cuius radius curuedinis vbique est infinitus. Quodsi ergo b nonmulto fuerit minor quam g , qui casus solet esse frequentissimus, erit proxime $b = g - \frac{g^3}{6aa}$, ideoque $\frac{g^3}{6aa} = g - b$, vnde prodit $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-b)}}$; hicque erit valor ipsius a , si velum vehementer extendatur, vt longitudo AHB non multum superet rectam AB. Sin autem accuratius

rem definire velimus, fumatur $b = g - \frac{g^3}{6aa} + \frac{3g^5}{40a^4}$, feu $0 = (g-b)a^4 - \frac{g^3aa}{6} + \frac{3}{40}g^5$; et ponatur $a^2 = \frac{g^3}{6(g-b)} + k$, et oriatur $0 = \frac{g^6}{36(g-b)} + \frac{g^3k}{3} - \frac{g^6}{36(g-b)} - \frac{g^3k}{6} + \frac{3}{40}g^5$ feu $0 = k + \frac{9}{20}gg$; vnde erit $aa = \frac{g^3}{6(g-k)} - \frac{9gg}{20}$ atque $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{5(g-b)}} - \frac{9}{40}\sqrt{6g(g-b)}$, qui valor pro praxi ordinaria fatis tuto femper vfurpari poterit.

§. 766. Quodfi ergo velum AH vento ita directe opponatur, vt directio venti VH ad rectam AB fit normalis, ex datis $AB = 2b$ et longitudine veli $AHB = 2g$ definietur radius ofculi in vertice curuae A, quem pofuimus $= a$, hincque finus veli $DH = f = \sqrt{(aa + gg)} - a$. His cognitis fi ducantur in A et B tangentes curuae AK et BK, erit anguli AKD feu BKD tangens $= \frac{a}{\sqrt{(2af + ff)}} = \frac{a}{g}$; et vires, quae requiruntur ad velum in hoc ftatu fuo continendum, in directionibus Aa et Bb agentes erunt $= \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$, cum his igitur binis viribus in aequilibrio erit vis venti a velo excepta. Sit haec vis $= P$, erit ex natura aequilibrii $\frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$; $P = \sin. AKD : \sin. AKB = 1 : 2 \cos. AKD$, hoc eft vt $1 : \sqrt{(aa + gg)}$. Erit ergo vis venti $P = \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{2g}{\sqrt{(aa + gg)}}$. Cum autem fit $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{5(g-b)}} - \frac{9}{40}\sqrt{6g(g-b)}$, erit $\frac{a}{\sqrt{(aa + gg)}} = 1 - \frac{3(g-b)}{g}$ erit $P = \frac{cv(b-g)}{400} \cdot \frac{M}{V}$.

§. 767. Manentibus ergo celeritate venti et latitudine veli c iisdem, vis venti in velum exerta erit vt $3b - 2g$. Sit primum $b = g$, quo cafu velum in planum extenditur et ob a infinitum vires requiruntur infinitae magnae ad velum in ftatu hoc continendum; interim tamen vis a vento excepta erit vt g , qua nauis propelletur. Sit

Pars II.

F ff

iam

410 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

iam $b = \frac{n-1}{n} g$, fiet vis venti vt $\frac{n-1}{n} g$; quae ergo erit ad vim eiusdem veli plani vt $n-3$ ad n . Quamobrem si $n=6$, hoc est si fuerit longitudo AB ad longitudinem veli AHB vt 5 ad 6, tum vis a vento orta duplo erit minor, quam si velum esset in planum extensum; minores valores pro n assumere non licet quia approximatio instituta hoc non permittit. Si velum planum longitudinis $AB = 2b$ concipiatur, foret eius vis a vento accepta vt b hoc est vt $\frac{n-1}{n} g$. Quare vires, quas ventus idem exerit I in velum AHB, II in velum planum AB, et III in velum AHB in planum expansum, erunt vt I, $n-3$; II $n-1$; III, n : sicque duplici modo vis venti in velum incurvatum diminuitur.

§. 768. Per obseruationes autem praeter interuallum AB et longitudinem veli AHB commode innotescit sinuamen veli seu distantia $HD = f$; qua cognita sine valore radii osculi a vis venti in velum exercita definiripotest. Cum enim sit $g = \sqrt{2af + ff}$, fiet $a = \frac{gg - ff}{2f}$ et $\sqrt{aa + gg} = \frac{gg + ff}{2f}$. Quare cum vis a vento excepta sit $P = \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{2g}{\sqrt{(aa + gg)}}$ fiet factis substitutionibus $P = \frac{2gc v M}{800 V} \cdot \frac{gg - ff}{gg + ff}$, vbi est g semissis longitudinis veli AHB. Hinc sequitur fore vim venti in velum AHB, si esset in planum expansum, ad vim venti in idem velum incurvatum AHB vti est 1 ad $\frac{gg - ff}{gg + ff}$ seu vt $gg + ff$ ad $gg - ff$. Si igitur esset sinuamen HD pars decima totius veli longitudinis AHB, ita vt sit $f = \frac{1}{10} g$, erit vis huius veli in planum expansi ad vim eiusdem incuruati vt 1 ad $\frac{21}{20}$, seu vt 13 ad 12, ita vt per hanc incuruationem pars decima tertia vis pereat.

§. 769.

DE VI, QUAM VENTUS IN VELA EXERIT. 411

§. 769. Multo difficilior autem est quaestio, si recta A B extremitates A et B veli iungens cum directione venti VH obliquum faciat angulum BFH; atque longitudo veli AHB data sit: tum enim primo axis seu diameter curvae velariae et ipsa curvae, quam velum induet, positio determinari debet, qua cognita praeter quantitatem vis, quam ventus in velum exerit, eius directio erit definienda, quae aliquantum a venti directione VH discrepabit. Manifestum quidem est, si velum esset planum, hoc est, si longitudo AHB non excederet interuallum A B, tum directionem vis venti normalem futuram esse ad rectam AB; incuruatio autem non solum hanc venti vim diminuet, sed etiam directionem eius propius ad venti directionem VH adducet. Atque ob hanc rationem laxitas velorum plurimum cursui adversus ventum instituendo obest, quippe ad quem cursum requiritur, ut directio vis a vento exceptae plurimum discrepet ab ipsa venti directione; plus autem, quam ad angulum rectum discrepare nequit.

Tab XXII.
fig. 4.

§. 770. Sit igitur interuallum AB = b , et longitudo veli AHB = g , ita ut sit $g > b$; ponatur anguli BFH quem directio venti cum positione rectae AB facit, sinus = m cosinus = n , quae sunt cognita. Tum ex incognitis sit VH axis curvae, quam velum induit, a eius radius osculi in vertice H, atque ad hunc axem ex punctis A et B demissis perpendicularibus AD et BE, ponatur HD = t ; AD = u ; et HE = x ; BF = y ; erit ex natura curvae $u = \int \frac{adt}{\sqrt{(at+tt)}}$ et $y = \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax+xx)}}$; atque arcus AH = $\sqrt{(2at+tt)}$ et arcus BH = $\sqrt{(2ax+xx)}$. Tum vero erit BE + AD = mb et HD - HE = nb ,

412 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

ex quibus resultabunt tres sequentes aequationes $u + y = mb$; $t - x = nb$ et $g = \sqrt{2at + tt} + \sqrt{2ax + xx}$ ita vt habeantur quinque aequationes, ex quibus has quinque incognitas t, u, x, y , et a definiri oportebit, quod opus nisi subsidium adfit, effret maxime laboriosum et prolixum.

§. 771. Quoniam autem in praxi longitudo veli g non multum excedere solet interuallum AB , velum non admodum incuruabitur, eritque id circo radius curuedinis a quantitas praegrandis, ita vt futurum sit proxime $\sqrt{2at + tt} = \sqrt{2at} + \frac{tt}{2\sqrt{at}}$; $\frac{a}{\sqrt{2at + tt}} = \frac{a}{\sqrt{2at}} - \frac{t}{4\sqrt{2at}}$; et $\sqrt{2ax + xx} = \sqrt{2ax} + \frac{xx}{2\sqrt{2ax}}$; $\frac{a}{\sqrt{2ax + xx}} = \frac{a}{\sqrt{2ax}} - \frac{x}{4\sqrt{2ax}}$. Vnde erit $u = \sqrt{2at} - \frac{tt}{6\sqrt{2at}}$ et $y = \sqrt{2ax} - \frac{xx}{6\sqrt{2ax}}$. Ex his definitis fit $\sqrt{2at} + \sqrt{2ax} - \frac{tt}{6\sqrt{2at}} - \frac{xx}{6\sqrt{2ax}} = mb$; $t - x = nb$; et $g = \sqrt{2at} + \sqrt{2ax} + \frac{tt}{2\sqrt{2at}} + \frac{xx}{2\sqrt{2ax}}$. Ergo $g - mb = \frac{2tt}{3\sqrt{2at}} + \frac{2xx}{3\sqrt{2ax}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{2(g - mb)}{2t\sqrt{t} + 2x\sqrt{x}}$; ideoque $\sqrt{2a} = \frac{2t\sqrt{t} + 2x\sqrt{x}}{3(g - mb)}$. Substituatur hic valor pro a inuenta in altera aequatione, prodibitque $g = \frac{2tt + 2xx + 2t\sqrt{tx} + 2x\sqrt{tx}}{3(g - mb)} + \frac{3}{4}(g - mb)$; ideoque erit $(t^{3/2} + x^{3/2})(t^{3/2} + x^{3/2}) = \frac{3(g + mb)(g - mb)}{8}$.

§. 772. Ad has aequationes resoluendas pono $\sqrt{t} + \sqrt{x} = q$, $\sqrt{t} - \sqrt{x} = r$; erit $\sqrt{t} = \frac{q+r}{2}$, $\sqrt{x} = \frac{q-r}{2}$; et $t - x = qr$; atque $t^{3/2} + x^{3/2} = \frac{q^3 + qr^2}{4}$, vnde erit $\sqrt{2a} = \frac{q(q+r+rr)}{6(g - mb)}$ et reliquae aequationes fient $qr = nb$ et $\frac{qq(qq+rr)}{4} = \frac{2(g+mb)(g-mb)}{8}$ seu $qq(qq+3rr) = \frac{3}{2}(g+3mb)(g-mb)$, per priorem vero est $qqrr = mnbb$, ergo illa per hanc diuisa $\frac{qq+3rr}{rr} = \frac{3(g+mb)(g-mb)}{2mnbb}$; vnde est $\frac{qq}{rr} = \frac{3(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}{2nnbb}$, et $\frac{q}{r} = \sqrt{\frac{3}{2}(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}$ vnde denique fit $q = \sqrt{\frac{3}{2}(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}$ et

et $r = \frac{nb}{\sqrt{\frac{1}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}$. Ex his fit

$Vt = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)} + nb}{2\sqrt{\frac{1}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}$ atque

$Vx = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)} - nb}{2\sqrt{\frac{1}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}$.

§. 773. Cum deinde fit $V2a = \frac{g(g+mb)}{6(g-mb)}$; erit $V2a$

$= \frac{g+mb}{4g+3mb} = \frac{4\sqrt{\frac{1}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}{(g+mb)^2}$; atque

$a = \frac{(g+mb)^2}{16\sqrt{\frac{1}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}$; vnde cognoscetur vis, qua

velum in A et B secundum tangentes trahi debet, quo in aequilibrio retineatur, erit scilicet vtraque vis $= \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$.

Ducantur ergo ex A et B tangentes AK et BL, quae se mutuo fecent in O, et quia vires ambae sunt aequales, media directio vis venti GO angulum AOB bisecabit;

erit autem angulus AOB = AKH + BLH; ideoque AOG = $\frac{1}{2}$ AKH + $\frac{1}{2}$ BLH, et angulus OGL = $\frac{1}{2}$ BLH - $\frac{1}{2}$ AKH.

Quodsi autem vis ipsa venti ponatur = P fiet P: $\frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V} =$

fin. AOB: fin. $\frac{1}{2}$ AOB = 2 cof. $\frac{1}{2}$ (AKH + BLH): 1.

ideoque erit vis $P = \frac{acv \text{ cof. } \frac{1}{2}(\text{AKH} + \text{BLH})}{400} \cdot \frac{M}{V}$.

§. 774. Est vero anguli AKH cosinus $= \frac{\sqrt{(2at+tt)}}{a+t} =$

$\frac{\sqrt{2at}}{a} - \frac{tt}{2a\sqrt{2at}}$, et anguli BLH cosinus $= \frac{\sqrt{(ax+xx)}}{a+x} = \frac{\sqrt{ax}}{a} -$

$\frac{3xx}{2a\sqrt{ax}}$; vnde erit fin. $\frac{1}{2}$ AKH = $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2at}}{2a} + \frac{tt}{4a\sqrt{2at}}\right)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2t}}{2a}}$; et cof. $\frac{1}{2}$ AKH = $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2t}}{2a}}$; similique modo

414 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

do fin. $\frac{1}{2} BLH = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{ax}}{2a}}$, et cof. $\frac{1}{2} BLH = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{ax}}{2a}}$. Ex his fit cof. $\frac{1}{2} (AKH + BLH) = \frac{x}{\sqrt{2ax}} + \frac{t}{\sqrt{2at}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} (\sqrt{t} + \sqrt{x}) = \frac{q}{\sqrt{2a}} = \frac{6(g-mb)}{qq+3rr}$ et a cof. $\frac{1}{2} (AKH + BLH) = \frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \frac{q\sqrt{2a}}{2} = \frac{qq(qt+rr)}{12(g-mb)}$; et est $qq(qq+3rr) = \frac{1}{2}(g+3mb)(g-mb)$ ergo a cof. $\frac{1}{2} (AKH + BLH) = \frac{1}{2}(g+3mb)$; vnde prodit vis a vento excepta $P = \frac{cv(g+3mb)}{3200} \cdot \frac{M}{V}$; hacque vi velum a vento in directione GO propelletur.

§. 775. Haec expressio tantum prope est vera, et quoniam sinus et cosinus angulorum $\frac{1}{2} AKH$ et $\frac{1}{2} BLH$ tantum ad duos terminos expressimus neglectis sequentibus omnibus, dum in praecedentibus vterius processimus, nimium conclusio a veritate aberrabit. Quocirca eosdem sinus et cosinus accuratius exhiberi conueniet; extractione radicis autem vterius producta reperietur:

$$\text{fin. } \frac{1}{2} AKH = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{at}}{2a} - \frac{t}{4a\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{t}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7tt}{32aa\sqrt{2}}}$$

$$\text{cof. } \frac{1}{2} AKH = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{at}}{2a} - \frac{t}{4a\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{t}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7tt}{32aa\sqrt{2}}}$$

$$\text{fin. } \frac{1}{2} BLH = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{ax}}{2a} - \frac{x}{4a\sqrt{2}} + \frac{x\sqrt{x}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7xx}{32aa\sqrt{2}}}$$

$$\text{cof. } \frac{1}{2} BLH = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{ax}}{2a} - \frac{x}{4a\sqrt{2}} - \frac{x\sqrt{x}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7xx}{32aa\sqrt{2}}}$$

Ex quibus debito modo combinatis colligitur: cof. $\frac{1}{2} (BLH - AKH) = 1 - \frac{(\sqrt{t} - \sqrt{x})^2}{4a} + \frac{(\sqrt{t} - \sqrt{x})^2(\sqrt{t} + \sqrt{x})}{32aa}$ et cof. $\frac{1}{2} (BLH + AKH) = \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{t} - x\sqrt{x}}{2a\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{x} - x\sqrt{t}}{4a\sqrt{2a}}$.

§. 776. Resumamus superiores substitutiones $\sqrt{t} + \sqrt{x} = q$ et $\sqrt{t} - \sqrt{x} = r$, vnde est $\sqrt{t} = \frac{q+r}{2}$ et $\sqrt{x} = \frac{q-r}{2}$; et fiet $7t + 6\sqrt{tx} + 7x = 5qq + 2rr$. Quibus substitutis prodibit cof. $\frac{1}{2} (BLH - AKH) = \text{cof. OGL} = 1 - \frac{rr}{4a} + \frac{rr(5qq+2rr)}{32aa}$. At ex superioribus est $q = \frac{g+mb}{\sqrt{2a}}$ et $r = \frac{g-mb}{g+mb}$ et $a = \frac{(g+3mb)^2}{16\sqrt{6}(gg+3mb-3mmb-2mb)}$.
Atque

DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT. 415

Atque ex his obtinebitur cof. $OGI = 1 - \frac{8nbh}{(g+3mb)^2} + \frac{240nnbb(g-mb)}{(g+3mb)^3} - \frac{416n^4b^4}{(g+3mb)^4}$. Ad vim ipsam venti P autem inueniendam erit: $a \text{ cof. } \frac{1}{2} (AKH + BLH) = \frac{q\sqrt{2a}}{2} - \frac{q(2t-\sqrt{tx+xx})}{4\sqrt{2a}} = \frac{q\sqrt{2a}}{2} - \frac{q(qq+3rr)}{8\sqrt{2a}}$ ideoque oritur $a \text{ cof. } \frac{1}{2} AOB = \frac{g+3mb}{8} - \frac{3}{4}(g-mb) = \frac{5mb-5g}{8}$. Ex quo inuenitur vis velum in directione GO vrgens = P = $\frac{cv(5mb-5g)}{3200} \cdot \frac{M}{V}$; quae multo propius ad veritatem accedit.

§. 777. Interim tamen patet, hanc approximationem vsurpari non posse, si vel b multo minor sit quam g , vel etiam angulus BFH sensibilibiter a recto discrepet. Quamobrem relicta approximatione praecedente, quae ex hypothefi quod a sit quantitas vehementer magna; quippe quae satis exigua imo nulla esse potest, si obliquitas anguli BFH sit permagna, et iste angulus penitus euanescat, etiamsi b non multo minor sit quam g . Resumamus igitur sine vlla approximatione superiores aequationes, quae erant: $g = \sqrt{2at+tt} + \sqrt{2ax+xx}$; $nb = t-x$; et applicatis u et y per logarithmos integratis fiet $e^{\frac{mb}{a}} aa = (a+t+\sqrt{2at+tt})(a+x+\sqrt{2ax+xx})$, denotante e numerum, cuius logarithmus = 1. Quodsi iam ponatur $t+x=p$, ob $t-x=nb$, prima aequatio reducta dabit $p = -2a + g\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1)}$.

§. 778. Cum igitur sit $t = \frac{p+nb}{2}$ et $x = \frac{p-nb}{2}$ erit $t = -a + \frac{nb}{2} + \frac{g}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1)}$ atque $x = -a - \frac{nb}{2} + \frac{g}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1)}$. Tum vero erit $\sqrt{2at+tt} = \frac{g}{2} + \frac{nb}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1)}$ et $\sqrt{2ax+xx} = \frac{g}{2} - \frac{nb}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1)}$. Qui valores si in tertia aequatione substi-

416 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

substituantur , extracta radice quadrata erit $\frac{2a}{\sqrt{(gg-nnbv)}}$
 $e^{2a} = 1 + \sqrt{\left(\frac{4aa}{gg-nnbv} + 1\right)}$, ex qua aequatione valorem
 ipsius a erui oportet. Ad hoc ponatur breuitatis ergo

$$\sqrt{(gg-nnbv)} = b; \text{ et fiet } 2ae^{2a} = b + \sqrt{(4aa+bb)}$$

feu $\frac{mb}{2a} = 1 + \frac{b + \sqrt{(4aa+bb)}}{2a}$, logarithmo autem in seriem con-
 uerſo fiet $\frac{mb}{2a} = \frac{b}{2a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{b^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 32} \frac{b^5}{a^5} - \text{etc.}$ feu $mb =$
 $b - \frac{b^3}{6 \cdot 4aa} + \frac{b^5}{40 \cdot 16a^4} - \frac{b^7}{112 \cdot 64a^6} + \text{etc.}$

§. 779. Haec series, si b non multo minor fuerit
 quam g , ſemper vehementer conuergit, nam angulus
 BFH propemodum fuerit rectus, erit radius ofculi a ve-
 hementer magnus. Sin autem angulus BFH fiat vehe-
 menter paruus, tum ob n proxime $= 1$, fiet b quanti-
 tas minima; vnde et hoc caſu ſeries valde conuergit, e-
 tiamſi a non ſit quantitas tantopere magna. Ob has ergo
 rationes erit proxime $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b}$. Ponatur autem $\frac{bb}{4aa}$
 $= \frac{6(b-mb)}{b} + r$ erit $\frac{b^4}{16a^4} = \frac{36(b-mb)^2}{bb}$, et $r = \frac{81(b-mb)^2}{5bb}$; vnde
 fiet propius $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b} + \frac{81(b-mb)^2}{5bb}$, hincque $2a =$
 $\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{6(b-mb)}} - \frac{9\sqrt{6}b(b-mb)}{40}$, quo valore tanquam ſatis accu-
 rato tuto vti licebit.

§. 780. Cognito itaque valore ipsius a , erit: ſin. $\frac{1}{2}$
 $AKH = \sqrt{\frac{a+t - \sqrt{(2at+tt)}}{2(a+t)}} = \sqrt{\frac{(g-nb)\sqrt{(4aa+bb)}-b}{2nb+2g\sqrt{(4aa+bb)}}$, cof. $\frac{1}{2}$ AKH
 $= \sqrt{\frac{a+t + \sqrt{(2at+tt)}}{2(a+t)}} = \sqrt{\frac{(g+nb)(\sqrt{(4aa+bb)}+b)}{2nb+2g\sqrt{(4aa+bb)}}$, ſin. $\frac{1}{2}$ BLH $= \sqrt{\frac{a+x - \sqrt{(2ax+xx)}}{2(a+x)}} = \sqrt{\frac{(g-nb)(\sqrt{(4aa+bb)}-b)}{-2nb+2g\sqrt{(4aa+bb)}}$, cof. $\frac{1}{2}$ BLH $= \sqrt{\frac{a+x + \sqrt{(2ax+xx)}}{2(a+x)}} = \sqrt{\frac{(g+nb)(\sqrt{(4aa+bb)}+b)}{-2nb+2g\sqrt{(4aa+bb)}}$. Ex his pro ho-
 rum angulorum ſumma ac differentia reperitur cof. $\frac{1}{2}$ AKH.
 cof. $\frac{1}{2}$ BLH $= \frac{b(\sqrt{(4aa+bb)}+b)}{2\sqrt{(b^2+4aag)}}$, atque ſin. $\frac{1}{2}$ AKH. ſin. $\frac{1}{2}$ BLH $=$
 $\frac{b\sqrt{b}}{b\sqrt{b}}$

$$\frac{b(\sqrt{+aa+7b})-b}{2\sqrt{(b^2+aa_2g)}}; \text{ vnde erit cof. } \frac{1}{2}(\text{AKH}+\text{BLH})=\text{cof. } \frac{1}{2} \text{AOB} = \frac{bb}{\sqrt{(+aa_2g+b^2)}} \text{ et cof. } \frac{1}{2}(\text{BLH}-\text{AKH})=\text{cof. O G K} = \frac{b\sqrt{(+aa+bb)}}{\sqrt{(+aa_2g+b^2)}}.$$

§. 781. Cum igitur recta OG fit directio media vis venti, quam velum AHB sustinet, ea cognoscetur ex angulo OGK, quem haec directio vis venti cum vera venti directione VH facit, cuius anguli cum fit cosinus = $\frac{b\sqrt{(+aa+7b)}}{\sqrt{(+aa_2g+b^2)}}$ erit eiusdem sinus = $\frac{2ncb}{\sqrt{(+aa_2g+b^2)}}$, et tangens = $\frac{2ncb}{b\sqrt{(+aa+bb)}}$. Fit autem substituto valore ipsius *a* ante inuenito: cof. OGK = $\sqrt{\frac{116bb-112mb+81mmb}{116bb-192mb+81mmb}}$ sin: OGK = $\frac{nb\sqrt{5}}{\sqrt{(116bb-192mb+81mmb)}}$; ergo tang. O G K = $\frac{nb\sqrt{5}}{\sqrt{(116bb-192mb+81mmb)}}$. Hinc primo patet si fit $n=0$ et $m=1$, seu si directio venti VH ad AB fit normalis, fore angulum OGK = 0; at si angulus VFA fere euanescat, vt fit proxime $n=1$ et $m=0$ erit tang. OGK = $\frac{b\sqrt{5}}{\sqrt{16(gg-2b)}}$; qui ergo angulus fit rectus si $b=g$, hoc est si velum in planum extendatur.

§. 782. Cum deinde posita vis venti in velum exercitae quantitate = P, fit $P = \frac{cv}{400} \cdot \frac{M}{V} \cdot a \text{ cof. } \frac{1}{2}(\text{AKH}+\text{BLH})$, erit $a \text{ cof. } \frac{1}{2}(\text{AKH}+\text{BLH}) = \frac{abb}{\sqrt{(+aa_2g+b^2)}}$ = $\frac{bb}{2nb}$ sin. OGH = $\frac{bb}{2\sqrt{(116bb-192mb+81mmb)}}$: atque his substitutis fiet $P = \frac{bhc v}{800nb} \cdot \frac{M}{V}$ sin. OGH, vel etiam $P = \frac{bhc v \sqrt{5}}{800\sqrt{(116bb-192mb+81mmb)}}$ existente $bb = gg - nnb$. Si ponatur $m=1$ et $n=0$, quo casu fit recta AB normalis ad directionem venti, erit $b=g$; fitque $P = \frac{gcv\sqrt{5}}{800\sqrt{(16gg-192g+81bb)}}$, et si insuper fiat $b=g$, erit $P = \frac{gcv\sqrt{5}}{800\sqrt{5}}$; quae est ea ipsa expressio, quam supra pro vi venti in velum planum normaliter impingentis inuenimus.

¶ Pars II.

G g g

§. 783.

§. 783. Quoniam b ad g proxime accedit ponamus $b = g - u$ eritque u quantitas valde parua. Hinc fit $bb = mmgg + 2nnngu - nnuu$ et $b = mg + \frac{nnu}{m} - \frac{nnuu}{2m^2g}$; quibus substitutis prodit $\sqrt{(116bb - 192mbb + 81mmhb + 5nnhb)} = \sqrt{(5gg + 30gu - 15uu + \frac{96uu}{mm})}$. Ergo habebitur $P = \frac{McV(mmgg + 2nnngu - nnuu)}{100V\sqrt{(gg + 6gu - 3uu + \frac{96uu}{5mm})}}$. Cum vero fit

$(gg + 6gu - 3uu + \frac{96uu}{5mm})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{g} - \frac{3u}{gg} + \frac{15uu}{g^3} - \frac{48uu}{5mmg^3}$ e-
rit $P = \frac{McV}{100V} (mmg - 3mmu + 2nnu + \frac{uu}{5g} (27mm - 83nn))$ et fin. $OGH = n(1 - \frac{4u}{g} + \frac{18uu}{g^2} - \frac{48uu}{5mmg})$
Quae formulae pro quouis casu satis expedite tam mediam directionem quam ipsam quantitatem vis venti in velum impensae praebebunt.

§. 784. At praeter angulum OGH , quem directio vis venti cum ipsa venti directione facit, ad verum mediae directionis OG situm definiendum nosse oportet punctum C , in quo media directio vis venti OG rectam AB fecat. Est autem ob angulum AOB bifariam sectum, $AC : BC = AO : BO = \sin. ABO : \sin. BAO$; qui anguli ex iam cognitis ita definiuntur, vt fit $\sin. ABO = \sin.(BFH + BLH)$ et $\sin. BAO = \sin.(BFH - AKH)$; ad quos exprimendos est $\sin. BFH = m$; et $\cos. BFH = n$
 $\sin. BLH = \frac{2ab}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$; $\cos. BLH = \frac{bg - nb\sqrt{(4aa + bb)}}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$
 $\sin. AKH = \frac{ab}{nb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$; $\cos. AKH = \frac{bg + nb\sqrt{(4aa + bb)}}{nb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$
Ex quibus per angulorum compositionem impetrabimus
 $\sin. ABO = \sin.(BFH + BLH) = \frac{mbg + nab - mnbb\sqrt{(4aa + bb)}}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$
 $\sin. BAO = \sin.(BFH - AKH) = \frac{mbg - 2nab + mnbb\sqrt{(4aa + bb)}}{nb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$.

§. 785. His finuum expressionibus ad communem denominatorem reductis, reperietur ratio AC : BC = $2nnabbb - 4mnaagb + b(mbb + 2nag) \sqrt{4aa + bb}$: $2nnabbb + 4mnaagb + b(mbb - 2nag) \sqrt{4aa + bb}$; quae commodius per factores ita exhibetur AC : BC = $2nab(nbb - 2mag) + b(mbb + 2nag) \sqrt{4aa + bb}$: $2nab(nbb + 2mag) + b(mbb - 2nag) \sqrt{4aa + bb}$, vnde fit AB : AC - BC = $2nnabbb + mb^3 \sqrt{4aa + bb}$: $-4mnaagb + 2nabg \sqrt{4aa + bb}$. Cum ergo fit AB = b fiet

$$AC - BC = \frac{2nagb(b\sqrt{4aa+bb}-2mab)}{b(b+mb\sqrt{4aa+bb})+2nab} = \frac{2nagb(4aa+bb+mb^2-2abb\sqrt{4aa+bb})}{b^2(4aa+bb)+2nab(4aa+bb)+2mab^2}$$

At est $\frac{\sqrt{4aa+bb}}{2a} = \sqrt{1 + \frac{6(b-mb)}{b} + \frac{5(b-mb)^2}{5bb}}$ ergo AC - BC = $\frac{4nagb(b-mb)(2 + \frac{6(b-mb)}{5b})}{bb(mb+nnb+3m(b-mb)+\frac{18m(b-mb)^2}{5b})} =$

$$\frac{2ng(\frac{1}{3} - (\frac{4m}{3b} + \frac{3}{20b})(b-mb)) \sqrt{\frac{6(b-mb)}{b}}}{bb(mb+nnb+3m(b-mb)+\frac{18m(b-mb)^2}{5b})}$$

Punctum ergo C semper quam minime a rectae AB puncto medio distabit.

§. 786. Sit vt ante posuimus $b = g - u$, atque u quantitas respectu g vehementer parua, erit $b^2 = mmgg + 2nnngu$, neglectis terminis, in quibus u plures vna habet dimensiones, et $b = mg + \frac{nnu}{m}$; vnde erit $b - mb = mu + \frac{nnu}{m} = \frac{u}{m}$, et $\sqrt{\frac{b-mb}{b}} = \sqrt{\frac{u}{mng}}$; ideoque $2a = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{6(b-mb)}} = \frac{mmg\sqrt{g}}{\sqrt{5u}}$ proxime. Hinc autem fiet AC - BC =

$\frac{2ng}{3m} \sqrt{\frac{6u}{g}} = \frac{2n}{m} \sqrt{\frac{2}{3}} gu$. Quoniam porro ipsi a proportionalis est vis, quae requiritur ad velum in statu suo conseruandum, erit vis, quam funes velo in punctis A et B alligati sustinent, vt $\frac{mm}{\sqrt{u}}$, hoc est directe vt quadratum

420 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

sinus anguli VFA, quem directio venti cum recta AB constituit et reciproce vt radix quadrata ex *u*. Vnde constat velum non nisi vi infinita in superficiem planam extendi posse; et hanc ob causam fieri nequit, vt vela vento inflata non incuruentur.

§. 787. In his, quae haecenus sunt tradita, vela instar singulorum filorum, quae omnis latitudinis sint expertia, considerauimus: quanquam enim infinita eiusmodi filorum sibi parallelorum multitudo velum constituere videtur, tamen singula fila velum constituentia non eodem modo a vento afficiuntur, ac si essent solitaria; atque sic, quae de curuatura filorum a vento impulsorum eruiamus, non omni rigore ad vela transferri possunt. Primo enim, si filum solitarium vento exponitur, particulae aeris, postquam impeerunt, liberrime ad latera defluere, sicque effectum insequentium turbare non possunt; id quod in velo latitudine praedito fieri non potest. Aer igitur in vela iam impulsus quodammodo stagnabit, donec ad latera defluat; sicque particulae aeris sequentes non immediate in superficiem veli impingere poterunt, sed aerem stagnantem compriment atque ad latera depellent. Hocque adeo casu vela non per impulsione, sed per solam pressionem aeris magis condensati maximam partem sollicitantur, quae vis non eadem sequetur leges, quas ante vi venti tribuimus.

§. 788. Haec consideratio sola efficit vt effectum venti in vela incuruentis definire non valeamus, quoniam is pendebit a quantitate voluminis aeris in veli cavitare quasi stagnantis et tum ad oras veli prorumpentis, atque a condensatione, quam iste aer a vento insequente patitur; quae

quae res ex iam cognitis principiis ad calculum adhuc revocari non possunt. Filamenta autem, quibus velum constat, longe aliam induent curvaturam, quia iam vis, qua singulae particulae vrgentur, non est vt quadratum sinus obliquitatis, sub qua ad venti directionem sunt positae, sed haec vis, quia compressione aeris adiacentis oritur, vbique fere erit eadem, neque ab obliquitate pendebit. Tum vero non solum fila secundum veli longitudinem disposita incurvabuntur, sed etiam quae secundum latitudinem sunt extensa, quo fit vt in superficiem vndique concavam efformetur. Hoc modo incurvatio filorum latitudinalium perturbabit incurvationem filorum longitudinalium, ita vt determinatio figurae totius veli sit maxime ardua, viresque analysèos longe superet.

§. 789. Superficies autem plana in concavam, qualem vela inflata exhibent, transmutari non potest, nisi ea vel in margine plicas edat, vel fila, ex quibus est composita, extensionem admittant. Quod ad vtrumque incommodum attinet, vela solent robusto filo laxiore cingi, vt dum eius interior pars extenditur, tota superficies in planam abeat, quo remedio nimia velorum cavitas quae alioquin a vento induceretur, diminuitur et maximam partem tollitur. Illa autem filamentorum indoles, qua non solum inflecti sed etiam in maiorem longitudinem extendi se patiuntur, efficit vt velis a vento longe alia figura inducatur, quam fieret, si filamenta omnis extensionis essent expertia. Ob hanc causam etiam determinatio vis a vento exertae aliam sequetur legem, ita vt, quae haecenus de hac re sunt tradita non nisi vero prope, idque sensu satis laxo transferri queant. Cum autem

422 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

in hoc negotio practico determinatio non nimis longe a vero aberrans sufficere possit, etiam his subtilioribus inuestigationibus, per se vires calculi superantibus, supercedemus, ad alia progressuri, quae calculum non respuant.

§. 790. Imprimis autem grauitatis ratio erit habenda quae hactenus est praetermissa; qua fit vt velorum figura a vento orta non solum multum immutetur, sed etiam vis venti se alio modo exerat. Quod discrimen clarissime se manifestabit, si loco veli tabulam OA consideremus, quae circa axem horizontalem O instar penduli sit mobilis, in quam ventus secundum directionem VC , ad quam axis O sit normalis, impingat. Si enim haec tabula esset grauitatis expers, tum ventus eam mox in situm horizontalem circa O deduceret, ita vt nulla amplius vis venti sollicitans extaret. Sin autem grauitas adfit, per eam tabula situm quendam obliquum OA retinebit, ventumque, quasi in A esset alligata, excipiet; vnde naus ad motum vrgeatur; cuiusmodi sollicitatio abesset, si tabula pondere careret. Hocque idem discrimen locum habebit, si tabula non fuerit rigida, sed instar fili perfecte flexilis, hoc enim casu grauitas pariter impedit, quo minus ea in situm horizontalem extendatur, sed curuam formabit conuexam versus venti plagam, in quam ventus vim nauem propellentem exercebit.

§. 791. Inquiramus igitur primum in effectum, quem ventus in tabulam rigidam exercent, sitque superficies tabulae $= bb$; cuius centrum grauitatis existat in puncto C , vbi simul situm sit centrum grauitatis tabulae, ponatur autem tabulae pondus $= P$. Tum vero sit celeritas venti debita altitudini v , cum qua in directione VC in tabu-

tabulam irruat. Iam ponatur anguli BOA, in quo tabula a vento et grauitate simul sollicitata persistet, sinus $= x$, et cofinus $= \sqrt{1 - xx} = y$, erit media directio venti CM normalis ad tabulae superficiem; vis autem, qua ventus tabulam in hac directione vrgebit erit vt $v bb. (\sin. VCO)^2 = v bbyy$. Scilicet si massae aquae, cuius volumen $= V$ pondus fit $= M$; aequabitur ista venti vis ponderi $= \frac{M}{800V} \cdot v bbyy$. Praeterea vero tabula a grauitate vrgetur vi $= P$ in directione verticali CP, quae duae vires, vt se mutuo in aequilibrio teneant necesse est, vt earum momenta respectu axis O sint aequalia. Erit ergo $\frac{M}{800V} \cdot v bbyy. OC = P. OC. \sin. PCA = Px. OC$, ideoque $\frac{M}{800V} \cdot v bbyy = Px$. Ex qua aequatione angulus BOA determinabitur.

§. 792. Quoniam pes cubicus aquae circiter pondus habet 64 libr; si fierit V vnus pes cubicus, erit $M = 64$ libr, et $\frac{800V}{M} = \frac{2}{25}$ libr. Quare si superficies bb in pedibus quadratis, altitudo vero v celeritati venti debita in pedibus, simulque pondus tabulae P in libris exprimatur, habebitur ista aequatio ad mensuras notas reuocata $\frac{2vbb}{25} yy = Px$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{2vbb}{25} = \alpha$, et ob $yy = 1 - xx$ habebitur $\alpha - \alpha xx = Px$, ideoque $xx = \frac{-Px + \alpha}{\alpha}$, vnde fit $x = \frac{-P + \sqrt{(PP + 4\alpha\alpha)}}{2\alpha}$. Duplicem haec solutio praebet valorem pro x seu sinu anguli BOA; at cum alter valor negatiuus fiat vnitatem, qua sinus totus indicatur, maior, erit iste angulus imaginarius. Quare habebitur anguli BOA sinus $x = \frac{\sqrt{(PP + 4\alpha\alpha)} - P}{2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha} - \frac{P}{2\alpha}}$, vnde, cum α et P quantitates homogeneas pondera scili-

424 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

scilicet denotent, angulus BOA definiri poterit. Vt si fuerit $P : \alpha = 3 : 2$ erit $x = \frac{1}{2}$ et angulus BOA fiet 30° .

§ 793. Quo autem pateat, quantam vim ipsa naus, in qua eiusmodi tabula fuerit suspensa, sustineat, videndum est, quanta vis requiratur ad tabulam in situ hoc, in quem a vento redigitur, conseruandam. Scilicet si tabula in O ope funis ad malum fuerit alligata, inuestigandum est, quanta vi et in quam directione hic funis vrgeatur. Ad hoc resoluatur vis grauitatis P in binas laterales, alteram in directione CA, alteram in directione ad hanc normali, atque perspicuum hanc posteriorem a vi venti CM omnino destitui. Restat ergo prior vis ex resolutione grauitatis orta, cuius directio est CA, quae erit $= Py$: haec itaque vis a fune debet sustineri; ex quo perspicitur funem in directione tabulae Oa extendi vi $= Py$; ex cuius resolutione in Ob et Oa sequitur nauem in O propulsam iri vi $= Pxy$. Cum vero fit $x = \sqrt{\left(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha}\right) - \frac{P}{2\alpha}}$ erit $yy = \frac{P}{\alpha} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha}\right) - \frac{P}{2\alpha}}\right)$ ideoque naus propelletur vi $= P\left(\sqrt{\left(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha}\right) - \frac{P}{2\alpha}}\right)^2 \sqrt{\frac{P}{\alpha}}$.

§. 794. Hinc patet a posteriori, hoc est ex angulo BOA ad quem tabula a vento inclinatur, cognosci posse vim, qua naus propelletur. Cum enim haec vis sit $= Pxy$, atque $2xy$ praebeat sinum dupli anguli AOB, erit haec vis ad dimidium pondus tabulae, vti sinus dupli anguli AOB ad sinum totum. Haec ergo vis erit ceteris paribus maxima, si angulus AOB fuerit semirectus, hocque casu vis nauem propellens aequabitur semissi ponderis tabulae. Erit ergo $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, hincque $\frac{v^2 h^2 \sqrt{2}}{2\alpha} = P$. Quamobrem si tabulae tam pondus quam superficies fuerint data, de-

DE VI, QUAM VENTUS IN VELA EXERIT. 425

determinari poterit certa venti celeritas, qua navis vehementissime propelletur, quae resultabit ex aequatione $v = \frac{25P}{bb\sqrt{2}}$; quae cum P detur in libris et bb in pedibus quadratis ostendit eum ventum maximum producere effectum qui vno minuto secundo percurrat spatium $= \sqrt{1104, 854} \frac{P}{bb} = 33, 2393 \sqrt{\frac{P}{bb}}$ pedum. Quodsi autem celeritas venti sit data atque ventus vno minuto secundo n pedes conficiat, quo tabula maximam vim excipiat debet esse $\frac{P}{bb} = \frac{nn}{1104, 854} = \frac{905097 \cdot nn}{1000000000}$.

§. 795. Huiusmodi igitur tabula commode adhiberi poterit ad venti celeritatem absolutam explorandam. Cognitis enim pondere tabulae P in libris, quam eius superficie bb in pedibus quadratis, obseruetur angulus BOA, ad quem tabula inclinatur, cuius sinus sit $=x$ et cosinus $=y$; posito sinu toto $=1$ hinc statim eruitur altitudo venti celeritati debita $v = \frac{25P}{2bbxy}$; atque ideo ventus vno minuto secundo conficiet spatium $27, 9508 \sqrt{\frac{x}{yy} \cdot \frac{P}{bb}}$ pedum. Quo autem anguli declinationum BOA a ventis maxime consuetis neque nimis fiant magni neque nimis parui, fiat circiter $\frac{P}{bb} = 1$; quo facto celeritas venti ex obseruato angulo BOA ita cognoscetur. Fiat vt radix quadrata ex cosinu anguli BOA ad radicem quadratam ex tangente anguli BOA ita numerus $27, 9508 \sqrt{\frac{P}{bb}}$ ad quartum, qui numerus designabit numerum pedum, quem ventus vno minuto secundo absoluit, quae operatio per logarithmos facillime expediatur.

§. 796. Anemometron hoc in suo genere perfectissimum praedicare haud dubito, cum non solum vtrum alius ventus alio sit fortior, ostendat, sed etiam quantum spatium datus ventus vno minuto secundo percurrat, in-

Pars II.

Hhh

dicet.

426 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

dicet. Constructioni eius practicae hic non admodum immorari conuenit, cum artifex intelligens facile perspi-
 ciat, quomodo eius perfectio augeri queat. Hic tantum
 annotasse sufficiat, hoc anemometrum cum solitis tritoni-
 bus, quibus plaga venti indicari solet, ita combinari pos-
 se, vt tabula OA perpetuo directe vento opponatur; hocque pacto eodem instrumento tam plagam venti, quam
 ipsam eius celeritatem cognoscere licebit. Praeterea expe-
 diet tabulae OA figuram oblongam potius tribuere, quam
 curtatam, quo pro eadem superficie interuallum OA lon-
 gius reddatur, sicque quantitas anguli BOA facilius dignosci
 queat, quod ope arcus circularis in gradus diuisi et in B
 fixi satis commode fiet, tum vero si in vno huius arcus
 latere gradus notantur, in altero latere numerus pedum
 quos ventus hanc inclinationem producens, vno minuto
 sec. percurrit, congrue adscribetur.

§. 797. Imprimis autem hic notandum est, centrum
 grauitatis ipsius tabulae et centrum grauitatis superficiei
 eius in idem punctum incidere debere, id quod, si tabu-
 la ex materia homogenea conficiatur^r et vbique eadem
 praedita sit crassitie quam minima, sponte vsu venit.
 Quodsi autem centrum grauitatis tabulae discrepet a centro
 grauitatis superficiei ipsius alius prorsus orietur effectus ac
 diuersus ab eo, quem modo determinauimus. Sit igitur
 primo, vt ante posuimus, pondus tabulae $OA = P$, eius
 superficies $= hb$, celeritas venti in directione VC impin-
 gentis sit debita altitudini v , et anguli BOA, ad quem
 tabula a vento declinatur, sit sinus $= x$ cosinus $= y$.
 Deinde vero sit C centrum grauitatis superficiei tabulae
 et eius ab axe O distantia $OC = a$; centrum grauitatis
 autem

Tab. XXIII.
 fig. 2.

DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT. 427

autem soliditatis tabulae fit in G , eiusque ab axe O distantia $OG = b$. His positis videamus, quantum et in aequalitas interuallorum a et b determinationes ante inventas fit perturbatura.

§. 798. Ex vi venti $CM = \frac{M}{800\gamma} \cdot vbhyy$ nascitur ad tabulam circa O conuertendam momentum $\frac{M}{800\gamma} \cdot avbhyy$, cui aequale esse debet momentum ex vi grauitatis ortum, quod est $= Pbx$, vnde habetur ista aequatio $\frac{M}{800\gamma} avbhyy = Pbx$, vel si pondus P in libris et magnitudines in pedibus exprimantur haec $\frac{2a vbh}{25b} yy = Px$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{2avbh}{25b} = \alpha$, habebitur vt ante $\alpha yy = Px$, hincque $x = \sqrt{\left(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha}\right) - \frac{P}{2\alpha}}$. Resoluatur vis grauitatis P in laterales GQ et GA inter se normales, erit vis $GQ = Px$ et vis $GA = Py$; hinc ad tabulam in O continendam requiritur primum vis Op in directione AO , $= Py$, tum vero insuper vis normalis $Oq = vi CM - vi GQ = \frac{2vbh}{25} yy - Px = \frac{\alpha b}{a} yy - Px$; a quibus viribus nauis propelletur vi $= Pxy + \frac{\alpha b}{a} y^2 - Pxy = \frac{b}{a} Pxy$. Erit ergo vt ante vis propellens ceteris paribus vt sinus dupli anguli AOB , at cum hac ratione insuper coniungi debet ratio $\frac{OG}{OC}$.

§ 799. Sit nunc tabula, quam haecenus rigidam Tab. XXIII. posuimus, perfecte flexilis, seu fit filum graue $BMYA$ fig. 3. in B suspensum, ventum in directione horizontali VY excipiens, cuius celeritas debita sit altitudini v , in A autem filum hoc firmiter fit alligatum; seu sollicitetur duabus viribus $AE = E$ et $AF = F$ quae sint tantae, vt filum BMA in hoc statu incuruato, qui ipsi cum a vento tam a gravitate inducitur, continere valeant, quarum virium al-

428 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

tera AE fit verticalis, altera AF horizontalis, quibus simul sumtis aequiualebit vis AG per diagonalem parallelogrammi EF indicata. Sumatur recta verticalis AP pro axe, ac ponatur abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$; atque longitudo curuae $AM = s$. Tribuatur huic filo latitudo $= c$, vt velum repraesentet, sitque tota longitudo $AMB = a$, ideoque superficies $= ac$; totius autem veli pondus fit $= P$; vnde cum velum vniformiter crassum vbique ponatur; erit pondusculum cuiuslibet elementi $Mm = ds$, ad pondus P vti est ds ad a ; consequenter elementi ds pondusculum erit $= \frac{Pds}{a}$.

§. 800. Quoniam velum ponitur perfecte flexile, vt in statu permanente versetur, necesse est, vt virium sollicitantium momenta, quae ad filum flectendum tendunt, vbique se destruant. Vidimus autem supra (757) summam momentorum omnium a vento ortorum, quibus filum circa M dextrorsum vrgeatur esse $= \int dx \int p dx + \int dy \int p dy$, existente $p = \frac{cv}{800} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{dx^2}{ds^2}$; ponatur breuitatis gratia $\frac{cv}{800} \cdot \frac{M}{V} = \alpha$, vt fit $p = \frac{\alpha dx^2}{ds^2}$; eritque a vi venti momentum dextrorsum inflectere conans $= \alpha \int dx \int \frac{dx^3}{ds^2} + \alpha \int dy \int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$. A viribus autem E et F oritur momentum filum circa M sinistrorsum inflectere annitens $= Fx - Ey$; vnde nisi grauitas adesset, haec duo momenta inter se aequalia esse oporteret. Sicque prodiit supra illa aequatio, qua natura curuae, quae velo grauitatis experti a vento imprimitur, determinabatur. Haec autem curua vehementer ab actione grauitatis, vnde pariter momentum filum dextrorsum inflectere conans, nascitur.

§. 801.

§. 801. Ad hoc momentum a grauitate oriundum debito modo definiendum fumatur quoduis fili elementum intermedium Yy pro quo fit $AX = \xi$; $XY = \Phi$; et $Yy = d\omega$; erit vt ante vidimus pondusculum elementi $Yy = \frac{P d\omega}{a}$, quo verticaliter deorsum secundum directionem YR sollicitatur; hinc filum circa M dextrorsum vrgebitur momento $= \frac{P d\omega}{a} (y - \Phi)$. Omnium ergo horum momentorum summa erit $= \frac{P}{a} (y \int d\omega - \int \Phi d\omega)$ quae quidem a grauitate portionis AY oritur. Integrum ergo momentum a toto filo AM ortum prodibit, si punctum Y in M transferatur, quo fit $\omega = s$; et $\Phi = y$. Hinc erit momentum totum a grauitate ortum, et filum dextrorsum circa M flectere conans $= \frac{P}{a} (y \int ds - \int y ds) = \frac{P}{a} \int s dy$. Quae vis si soia adesset, seu ventus flare cessaret, filo induceret curuam catenariam, quae a velaria aliter non differt, nisi quod illius axis fit verticalis huius vero horizontalis.

§. 802. His igitur momentis rite collectis pro curua AMB ista conficietur aequatio $a \int dx \int \frac{dx^3}{ds^2} + a \int dy \int \frac{dx^2 dy}{ds^2} + \frac{P}{a} \int s dy = Fx - Ey$. Ad quam commodius tractandam ponatur breuitatis gratia $\frac{ax^2}{ds^2} = p$, vt fit $\int dx \int p dx + \int dy \int p dy + \frac{P}{a} \int s dy = Fx - Ey$. Differentietur haec aequatio, et habebitur: $dx \int p dx + dy \int p dy + \frac{P s dy}{a} = F dx - E dy$, quae posito dx constante denuo differentiata dat: $p dx^2 + p dy^2 + ddy \int p dy + \frac{P s ddy}{a} + \frac{P ds dy}{a} = - E ddy$; siue si per ddy diuidatur $\frac{p dx^2}{ddy} + \int p dy + \frac{P s}{a} + \frac{P ds dy}{a ddy} + E = 0$. Differentietur tertio prodibitque ob $ds dds = ddy$ haec aequatio $2 p dy - \frac{p ds^2 d^3 y}{ddy^2} + \frac{ds^2 dp}{ddy} + p dy + \frac{2 P ds}{a}$

430 DE VI, QUAM VENTVS IN VELA EXERIT.

$$\frac{2Pds}{a} + \frac{Pdy^2}{as} - \frac{Pdsdyd^3y}{ady^2} = 0; \text{ quae per } \frac{ddy}{ds^2} \text{ multiplicata}$$

$$\text{dat } dp + \frac{2Pdyddy}{as^2} - \frac{pd^3y}{ddy} + \frac{2Pday}{as} + \frac{Pdy^2ddy}{ads^3} - \frac{Paya^3y}{adsddy} = 0.$$

§. 803. Aequatio haec respectu ad p habito ergo integrabilis reddetur, si multiplicetur per $\frac{ds^3}{ddy}$ eritque $\frac{pds^3}{ddy} + \frac{Pds^2dy}{addy} + \frac{Pxdx}{a} = Cdx$ vnde $pds^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdddy}{ads} = \frac{Cdxddy}{ds}$. Cum autem fit $pds^2 = adx^2$ erit $adx^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdxddy}{ads} = \frac{Cdxddy}{ds}$. Ponamus $dy = qdx$ erit $ds = dx\sqrt{1+qq}$ et $ddy = dqdx$; quibus substitutis fit $adx + \frac{Pqdx\sqrt{1+qq}}{a} + \frac{Pxdq}{a\sqrt{1+qq}} = \frac{Cdq}{\sqrt{1+qq}}$, quae per $a + \frac{Pq\sqrt{1+qq}}{a}$ diuisa dat $dx + \frac{Pxdq}{(a+Pq\sqrt{1+qq})\sqrt{1+qq}} = \frac{Cdq}{(a+Pq\sqrt{1+qq})\sqrt{1+qq}}$ vnde fit $\frac{dx}{Ca-Px} = \frac{dq}{(a+Pq\sqrt{1+qq})\sqrt{1+qq}}$, ex qua aequatione cum variables x et q sint a se inuicem separatae, determinari poterit valor ipsius x per q ; hincque etiam y et s dabitur per q propter $dy = qdx$ et $ds = dx\sqrt{1+qq}$.

§. 804. Erit ergo $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{-Pdq}{(a+Pq\sqrt{1+qq})\sqrt{1+qq}}$. Ponatur $\sqrt{1+qq} = q+r$, erit $r = \sqrt{1+qq} - q$ et $q = \frac{1-rr}{2c}$ porroque $\sqrt{1+qq} = \frac{1+rr}{r}$ et $dq = \frac{dr(+rr)}{2rr}$, ex quibus substitutionibus fit $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{+Prdr}{P+aa rr - Pr^4} = \frac{-4P^2rdr}{P^2r^4 - 4aaPr r - PP}$. Cum autem fit $P^2r^4 - 4aaPr r - PP = (Pr r - 2aa + \sqrt{P^2 + 4a^2a^2})(Pr r - 2aa - \sqrt{P^2 + 4a^2a^2})$, erit $\frac{-Prdr}{Ca-Px} = \frac{2Qrdr}{Pr r - 2aa + \sqrt{P^2 + 4a^2a^2}} - \frac{2Qrdr}{Pr r - 2aa - \sqrt{P^2 + 4a^2a^2}}$, fitque $Q = \frac{P}{\sqrt{P^2 + 4a^2a^2}}$. Qua propter per logarithmos integrando prodibit $\int \frac{Ca-Px}{Da} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + 4a^2a^2}} \int \frac{Pr r - 2aa + \sqrt{P^2 + 4a^2a^2}}{Pr r - 2aa - \sqrt{P^2 + 4a^2a^2}}$ vnde ad numeros regrediendo fit $Ca - Px = Da$

($\frac{Pr r}{Pr r}$.)

$\left(\frac{Pr r - \alpha a + \sqrt{(P^2 + \alpha^2 a^2)}}{Pr r - \alpha a - \sqrt{(P^2 + \alpha^2 a^2)}}\right) P : \sqrt{P^2 + 4\alpha^2 a^2}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{P}{\sqrt{(P^2 + \alpha^2 a^2)}} = m$ et $\frac{2\alpha a}{\sqrt{(P^2 + \alpha^2 a^2)}} = n$ erit $m^2 + n^2 = 1$, et m et n considerari poterunt tanquam finus et cosinus anguli cuiusdam determinati, eritque $Ca - Px = Da$
 $\left(\frac{mrr - n + 1}{mrr - n - 1}\right) m$.

§. 805. Ex hac aequatione porro fit $\frac{mrr - n + 1}{mrr - n - 1} = \left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}}$

et $rr = \frac{(n + 1) \left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} - n + 1}{m \left(\left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)}$, dabitur ergo r per x ,

et cum fit $q = \frac{1 - rr}{2r}$, reperietur q per x ; quo cognito oritur $y = \int q dx$ et $s = \int dx \sqrt{1 + qq} = y + \int r dx$; ficque adeo curua quaesita construi poterit. Ad constantes vero C et D determinandas ex aequationum (802) prima et secunda constat factis x et $y = 0$, fore $\frac{F}{E} = \frac{dy}{dx} = q$; ex tertia autem factis $x = y = a$, fit $p ds^2 + \frac{p ds dy}{a} = -Eddy$, et ex (803) est in eadem hypothefi $p ds^2 + \frac{p ds dy}{a} = \frac{C dx ddy}{ds}$; vnde fit $C = \frac{-E ds}{dx} = -E \sqrt{1 + qq}$. Cum autem fit $q = \frac{F}{E}$, si vim totam $A G = \sqrt{E^2 + F^2}$ ponamus $= G$ erit $\sqrt{1 + qq} = \frac{G}{E}$; ideoque $C = -G$. Deinde ob $r = \sqrt{1 + qq} - q$, factis $x = 0$ erit $r = \frac{G - F}{E}$ ex aequatione autem vltima

ob $C = -G$, fit $\frac{mrr - n + 1}{mrr - n - 1} = \left(-\frac{G}{D}\right)^{\frac{1}{m}}$ ideoque $\frac{-G}{D} = \left(\frac{m(G - F)^2 + (1 - n)E^2}{m(G - F)^2 - (1 + n)E^2}\right)^{\frac{1}{m}}$, ac propterea $D = -G$
 $\left(\frac{m(G - F)^2 - (1 + n)E^2}{m(G - F)^2 + (1 - n)E^2}\right)^{\frac{1}{m}}$.

§. 806. His definitis constantibus C et D aequationem pro curua ingredientibus, fiet $\frac{Ca-Px}{Da} = \frac{Ca+Px}{Ga} \left(\frac{m(G-F)^2+(i-n)E^2}{m(G-F)^2-(i+n)E^2} \right)^m$,

ideoque $\left(\frac{Ca-Px}{Da} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m(G-F)^2+(i-n)E^2}{m(G-F)^2-(i+n)E^2} \left(\frac{Ca+Px}{Ga} \right)^{\frac{1}{m}}$ pro quo valore determinato si scribamus X erit $r = \frac{n(X-1)+X+i}{m(X-1)}$, et $r = \frac{\sqrt{mn(X-1)^2+m(X^2-1)}}{m(X-1)}$, vnde fit $q = \frac{i-rr}{2r} = \frac{(m-n)(X-1)-X-1}{2\sqrt{mn(X-1)^2+m(X^2-1)}}$; et $\sqrt{(1+qq)} = \frac{i+rr}{2r} = \frac{(m+n)(X-1)+X+i}{2\sqrt{mn(X-1)^2+m(X^2-1)}}$. Fiet ergo $q = \frac{dy}{dx} = 0$ feu tangens curuae verticalis, vbi fit $(m-n)(X-1) = X+1$ feu $(m-n-1)X = m-n+1$; ideoque $X = \frac{m-n+1}{m-n-1}$. Hoc ergo casu valor ipsius x innotescet ex hac aequatione $1 + \frac{Px}{Ga} = \left(\frac{m(G-F)^2-(i+n)E^2}{m(G-F)^2+(i-n)E^2} \right)^m \left(\frac{m-n+1}{m-n-1} \right)^m$. Tangens curuae autem fit horizontalis si vel fit $X = 1$ vel $X = \frac{n-1}{n+1}$.

§. 807. Quoniam puncto M in A translato fit $\frac{dy}{dx} = \frac{r}{E}$, perspicuum est directionem vis AG esse tangentem curuae in A. Hinc cognita ratione E:F in quouis curuae puncto M inclinatio tangentis ad horizontem potest inueniri, eo quod $\frac{dy}{dx} = q$ per abscissam x determinatur. Ponamus autem vim velum in A retinentem euanescere, ita vt fit $G = 0$; qui casus locum habebit si velum in B instar penduli suspendatur, ventusque in id incurrat. Erit ergo ob P quantitatem finitam $\frac{Ca+Px}{Ga}$ quantitas infinita, hincque $X = \infty$; vnde prodibit $q = \frac{dy}{dx} = \frac{m-n-1}{2\sqrt{m(n+1)}}$ quantitati constanti. Ex quo intelligitur velum in planum extendi atque a vento instar tabulae rigidae a situ verticali declinari. Quod quidem ex supra allatis facile perspicitur cum si tabula sit vbique vniformiter crassa, in statu inclinato vis venti cum grauitate ita
in

in aequilibrio consistat, vt inde nulla oriatur vis, quae tabulam, etiamsi flexilis esset, inflectere conaretur.

§. 808. Quando autem vis filum in A retinens G Tab XXIII. fig. 4. non est nulla, tangens curuae alicubi erit verticalis, nisi grauitas sit nulla, in hoc ergo loco capiatur punctum A, eritque vis $F = 0$ et $E = G$; ideoque $X = \frac{m-n+1}{m-n-1}$

$\left(\frac{Ga+Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m-n+1}{m-n-1} \left(1 + \frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$; quae quantitas idcirco ob m et n vnitatem minores, erit negatiua; applicatae autem PM et pm pariter ob situm contrarium erunt negatiuae. Hinc

$$\text{igitur fit } rr = \frac{(n+1)(m-n+1)\left(1 + \frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} - (1-n)(1+n-m)}{m(m-n+1)\left(1 + \frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + m(1+n-m)}$$

$$\frac{(1+m+n)\left(1 + \frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + 1-m-n}{(1+m-n)\left(1 + \frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + 1-m+n} \text{ ob } 1-nn = mm.$$

Sit breuitatis gratia $S = \left(1 + \frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$ erit $rr = \frac{(1+m+n)S+1-m-n}{(1+m-n)S+1-m+n}$ et $r = \frac{\sqrt{(2m(1+m)SS+4nnS-2m(1-m))}}{(1+m-n)S+1-m+n}$ hincque $q = \frac{1-rr}{2r} = \frac{n-nS}{\sqrt{(2m(1+m)SS+4nnS-2m(1-m))}}$, qui valor ob $S > 1$ negatiuus luculenter indicat $\frac{dy}{dx}$, hincque ipsam applicatam y esse negatiuam. Meminisse autem oportet esse $\frac{m}{n} = \frac{P}{2\alpha a}$, et $\alpha = \frac{cv}{800} \cdot M$.

§. 809. Cum fit $r = \sqrt{(1+qq)} - q = \frac{ds-dy}{dx} = \sqrt{\frac{ds-dy}{ds+dy}}$ erit curuae tangens horizontalis, vbi est $r = 0$, vel etiam $n = \infty$. Hoc ergo euenit si capiatur $S = \frac{m+n-1}{m+1+1}$ vel $S = \frac{m-n-1}{m-n+1}$ vtroque enim casu fit $q = \infty$; est vero alter ipsius S valor affirmatiuus alter negatiuus;

qui posterior, cum potestati positivae $(1 + \frac{Px}{Ca})^{\frac{1}{m}}$ aequari nequeat, est imaginarius. Erit ergo $\frac{m+n-1}{m+n+1} = (1 + \frac{Px}{Ca})^{\frac{1}{m}}$ et $\frac{Px}{Ca} = (\frac{m+n-1}{m+n+1})^m - 1$, ideoque $x = \frac{Ca}{P} (\frac{m+n-1}{m+n+1})^m - \frac{Ca}{P}$ qui valor est negativus; habebit ergo curua *BAb* in ramo inferiore *Ab* tantum puta in *b* tangentem horizontalem, a quo loco curua rursus ascendit. Ramus autem superior *AB* in infinitum ascendit, facto enim $x = \infty$, fit quoque $S = \infty$, ideoque $q = \frac{dy}{dx} = \frac{-n}{\sqrt{2m(1+m)}} = -\sqrt{\frac{1-m}{2m}}$; tum scilicet tangens cum horizontali *VA* faciet angulum cuius tangens $= \sqrt{\frac{2m}{1-m}}$; ideoque sinus $= \sqrt{\frac{2m}{1+m}}$ et cosinus $= \sqrt{\frac{1-m}{1+m}}$.

Tab. XXIII. §. 810. Si ventus desuper in directione verticali *PA* fig. 5. in velum *MAm* incideret, tum ipsi, si gravitate careret, eandem imprimeret curuam, quam sola gravitas demto vento produceret, id quod congruentia inter curuas catenariam et velariam docet. Quodsi ergo tum gravitas quam ventus iste desuper veniens simul agant, dubium est nullum, quin velo eadem curvatura inducatur, quam ab utraque vi seorsim reciperet. Ad hunc ergo casum calculum accommodemus, quo clarius eius consensus cum veritate perspiciatur. Sit igitur axe *AP* per curvae punctum imum *A* sumto, quo casu fit $E=0$ et $F=G$, abscissa $AP=x$, $PM=y$ et arcus $AM=s$, reliquae vero litterae *a*, *P*, et α easdem retineant significationes, quas supra habebant; quibus positis manifestum est, calculum in (802) datum huc transferri, si modo ponatur $p = \frac{ady^2}{ds^2}$ loco $\frac{adx^2}{ds^2}$, quippe quo pacto directio venti ad angulum rectum mutatur.

§. 811. Cum igitur ob $C = -G$ peruentum fit ad hanc aequationem $pds^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdxddy}{ads} + \frac{Gdxddy}{ds} = 0$, erit $\alphaady^2 + Pdyds + \frac{Pxdxddy + Gdxddy}{ds} = 0$. Ponatur $dy = qdx$, sitque $V(1 + qq) = q + r$ seu $q = \frac{1-rr}{2r}$, fiet facta substitutione $\frac{dx}{Ga + Px} = \frac{rdr}{(1-rr)(P + \alpha a + (P - \alpha)r)}$, cuius integrale est $\frac{1}{P} \int \frac{Ga + Px}{Da} = \frac{1}{P} \int \frac{P + \alpha a + (P - \alpha)r}{1 - rr}$, fit autem, cum posito $x = 0$ fieri debeat $r = 0$, constans $D = \frac{G}{P + \alpha}$; quare erit $\frac{Ga + Px}{Ga} = \frac{P + \alpha a + (P - \alpha)rr}{(P + \alpha)(1 - rr)}$ hincque $rr = \frac{(P + \alpha)x}{2Ga + (P + \alpha)x}$. Tum vero prodit $q = \frac{dy}{dx} = \frac{Ga}{\sqrt{(2Ga + (P + \alpha)x + (P + \alpha)^2 xx)}}$. Scribatur breuitatis ergo b pro $\frac{Ga}{P + \alpha}$, erit $dy = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx + xx)}}$ quae aequatio manifesto est pro curua catenaria; quemadmodum id quidem recte ex congruentia curuae velariae cum catenaria coniectauimus.

DE MALORVM CONSTITVTIONE.

§. 812.

Si nauis velorum ope, in quae ventus incurrat, propelli debeat, nauem ita instrui oportet, vt vela firmiter expandi, sicque vento exponi atque pro lubitu dirigi queant. Quem in finem mali in nauibus constitui debent, qui cum supra nauem ad insignem altitudinem asurgant, loca praebent idonea, quibus vela alligentur, atque extendantur. Vim igitur quam ventus in vela exerit, quoniam cum malis sunt connexa, immediate mali sustinebunt, hocque modo nauis perinde promouebitur, ac si vis aequalis malis esset applicata. Quo circa necesse est, vt mali in naui firmissime collocentur, et cum naui, quasi vnum corpus omnis flexionis expers constituent, vt ipsa nauis eandem vim sentiat, qua mali sollicitantur. Cum igitur primum mali in spina nauis ceu parte fortissima sunt collocati, tum ope funium satis robustorum tam vtrinque ad latera nauis, quam proram ac puppim versus alligantur, vt in nullam plagam inclinari queant, quin simul funes ad oppositam plagam extensi rumpantur. Quodsi ergo funes sint satis fortes, mali firmiter in statu suo perseuerabunt, atque ad nauem propellendam erunt accommodati.

§. 813. Quo maiorem autem vim mali sustinent, eo non solum firmiter funium robustorum ope alligati atque ad nauem affirmati esse debent, sed etiam ipsi mali satis fortes esse, atque adeo ex valido arboris trunco confici debent, vt ne ipsi a viribus sollicitantibus flectantur, vel adeo dirumpantur. Quamobrem in maioribus nauibus; cum singuli arborum trunci satis virium non habeant; plures sibi inuicem

inuicem secundum longitudinem inferuntur, vt hoc modo mali multo maioris altitudinis, quam erant arbores, obtineantur; quin etiam subinde crassities malorum duabus pluribusue arboribus coniungendis augeri solet. Sic in maximis nauibus mali ex ternis arboribus sibi inuicem superimpositis constant, quae arbores propterea fortissime inter se coniungi debent, vt iunctura cuiusue generis impetibus sustinendis par sit. Summa ergo cura erit adhibenda, vt mali, tam fati habeant roboris ipsi, quam vt ope funium firmissime alligentur, hocque modo quasi cum naui vnum corpus rigidum constituent, adstruantur.

§. 814. Quamuis autem ex theoria vtilia praecepta deriuari possent ope funium malos quam firmissime alligandi, tamen cum hoc argumentum, per experientiam fati inuestigatum videatur, id praetermitto; atque tanquam postulatum hic assumo naues iam ita malis esse instructas, vt vires sollicitantes malos neque inflectere, neque adeo subuertere valeant. Ad malos igitur vela antennarum ope alligantur atque in datam plagam extenduntur, vt ventum siue directe siue sub data obliquitate excipiant. Velis autem quantum fieri potest extensis, vt a vento quamminime incuruentur innotescet tam media directio quam magnitudo vis, quam ventus in singula vela exerit; quae vis cum a malis sustineatur, ipsa naus ab eadem vi et secundum eandem directionem ad motum sollicitabitur. Quotcunque igitur fuerint vela, vires quas singula sustinent, in vnã summam colligi, atque adeo vna vel duae vel ad summum tres vires omnibus aequiuales exhiberi poterunt, quibus naus sollicitetur; hocque mo-

do sollicitatio nauis a velorum consideratione reuocabitur atque ad vires absolutas reducetur.

Tab. XXIV.
fig. 1.

§. 815. Collocentur autem mali in medio nauis, seu in plano verticali nauem secundum longitudinem in duas partes similes et aequales diuidente; hancobrem si vela vtrinque circa malum quemque aequaliter essent extensa, media directio vis venti in vela exsertae per medium cuiusque mali transfret. Euenit autem plerumque in minoribus et saepe numero etiam in maioribus nauibus, vt vela ad vnam tantum mali partem extendantur, vti figura citata indicat; quo casu media directio vis venti non per malum MN, sed per centrum grauitatis g , veli $acdb$ transibit; ad cuius superficiem erit normalis, si quidem fuerit maxime extensum. Vtroque autem casu, siue vela vtrinque aequaliter extendantur, siue ad vnam tantum partem, plerumque situm verticalem tenere solent, ita vt media directio vis venti fiat horizontalis; sic igitur quocumque velis nauis fuerit instructa, vis totalis, qua vrgebitur, habebit directionem horizontalem; quae est maxime idonea ad nauem propellendam. Atque ob hanc causam non conuenit vela ad horizontem inclinari; quia tali situ inclinato et minor vis a vento, quippe cuius directio est horizontalis, exciperetur, et minor vis ad nauem propellendam resultaret, nisi ingens commodum inde proficiscatur.

§. 816. His notatis, quo facilius doctrinam de malis pertractare, et quicquid ex idonea malorum constitutione ad perfectionem nauigationis redundat, perscrutari queamus, conueniet seorsim vtrumque cursum nauis tam directum quam obliquum euoluere. In cursu enim obliquo praeter formam

formam nauis malorum positio plurimum confert, vt nauis maxime aduersus ventum procedere queat; qui cursus, cum in nauibus vento propulsis praecipue intendatur, eo magis erit elaborandum, vt per idoneam malorum collocationem aptior reddatur ad cursum aduersus venti plagam tum propius tum etiam celerius instituendum. Atque in hoc cursu imprimis gubernationem spectari oportet, quae per malorum positionem vel adiuuari vel impediri potest. In cursu autem directo efficiendum erit, vt nauis a dato vento quam celerrime promoueatur, idque sine securitatis detrimento; in utroque enim cursu maxime est cauendum, ne a viribus, quas ventus in vela exerit, nauis nimium inclinetur. Quibus requisitis quemadmodum maxime satisfieri possit, ex tractatione bipartita, qua primum cursum directum tum obliquum sumus contemplaturi, commodissime cognoscere poterimus.

§. 817. Ad cursum directum instituendum necesse est, vt directio vis sollicitantis a puppi proram versus tendat atque nauis axi longitudinali sit parallela. Quare vel singulae velorum vires hanc directionem habere debent, vel saltem omnium media directio ita comparata esse debet, vt sit axi nauis parallela. Quodsi ergo singula vela fuerint in planum extensa, quia tum media directio vis venti ad ea est normalis, planities velorum ad axem nauis longitudinalem in cursu directo debet esse normalis; vel quantum alia ab hoc situ differant, tantundem alia in oppositum discrepare debent. Cum igitur in cursu directo tota vis nauem propellens directionem habeat axi nauis longitudinali parallelam, praeter ipsam huius vis quantitatem, contemplari oportet eius momenta

in axes nauis longitudinalem et verticalem per centrum grauitatis ductos ; in axem enim longitudinalem eius momentum erit nullum, quia directio vis huic axi est parallela. Atque ex his momentis patebit, quantum nauis cum antrorsum inclinetur tum in gyrum agatur circa axem verticalem.

§. 818. Sit igitur vis tota a vento velorum ope excepta = P , cuius directio sit horizontalis atque axi nauis longitudinali parallela, huius ergo vis primus ac praecipuus effectus in nauis promotione secundum hanc eandem directionem consumetur. In huius effectus production tantum quantitas vis P spectatur, et perinde est in quonam loco sit applicata, dummodo eius directio sit axi nauis longitudinali parallela. Cum igitur nauis cursum directum ab hac vi nanciscatur; considerari oportet resistentiam prorae, quae aequalis sit resistentiae plani ff , quod pari velocitate directe contra aquam impingat. Ponatur celeritas quam nauis ab hac vi P accipit debita altitudini v , et aequabitur vis resistentiae ponderi massae aqueae, cuius volumen = ffv . Vnde si nauis totius pondus sit = M et volumen aquae immersum = V , erit vis resistentiae = $\frac{Mffv}{V}$, cui cum vis propellens P sit aequalis, habebitur haec aequatio $P = \frac{Mffv}{V}$; ex qua patet celeritatem nauis acquisitam tenere rationem subduplicatam vis propellens P .

§. 819. Ex vi igitur propellente P et resistentia nauis absoluta ff inuenitur altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{PV}{Mff}$; ideoque ipsa celeritas. Indidem vero ex nauis celeritate et vi propellente P reperietur resistentia absoluta $ff = \frac{Pv}{M}$; quae quidem omnia iam satis sunt manifesta. Videamus

mus igitur quomodo ex venti celeritate et directione vna cum velorum superficie ipsa vis P exprimatur, quo facilius motus nauis datis velis instructae a dato vento oriundus determinari queat. Sit ergo BA axis nauis longitudinalis, Tab. XXI V.
fig. 2. ad quem superficies velorum, quam in planum extensam assumo, sit normalis; et repraesentet recta EF velorum superficies, quae sit $= gg$. Tum vero ventus flet in directione VC celeritate debita altitudini k ; atque anguli VCE, sub quo ventus in vela incurrit, sit sinus $= m$ et cosinus $= n$; grauitas vero specifica aeris sit ad grauitatem specificam aquae vt 1 ad i ; erit quasi $i = 800$.

§. 820. His iam positis, si nauis cum velis quiesceret foret vis venti in vela exerta aequalis ponderi massae aereae, cuius volumen $= mmggk$, hincque aequalis ponderi massae aquae, cuius volumen $= \frac{mmggk}{i}$, ex quo vis venti foret $= \frac{Mmmggk}{iV} = P$: At quoniam nauis non quiescit, sed secundum directionem BA progreditur celeritate debita altitudini ψ , hoc motu sese impetui venti quodammodo subducit, minoremque vim excipit, quam si quiesceret. Ad hanc vim determinandam capiatur in axe BA portio CN, quae sit ad CV vt celeritas nauis ad celeritatem venti, nempe $CV : CN = V k : V \psi$: tum compleatur parallelogrammum VCN ψ et diagonalis C ψ repraesentabit tum directionem tum celeritatem venti, quem vela in hoc motu constituta actu sentient. Erit ergo vis venti in vela nauis motae exerta $P = \frac{M(\sin vCE)^2 gg \cdot Cv^2 \cdot k}{iV \cdot Cv^2}$; angulus enim in superiori casu VCE abit in ψCE ; et cum ante altitudo venti celeritati debita effet $= k$ erit nunc $= \frac{Cv^2 \cdot k}{Cv^2}$.

Pars II.

K k k

§. 821.

§. 821. Cum autem in triangulo CVv fit ang. CVv cofinus = sin. $VCE = m$ erit $Cv^2 = CV^2 + Vv^2 - 2 CV \cdot Vvm$ et fin. $vCE = -\text{cof. } VvC = \frac{CV^2 - Vv^2 - Cv^2}{2Vv \cdot Cv} = \frac{m \cdot CV - Vv}{Cv}$ ideoque hoc valore loco sin vCE substituto prodibit $P = \frac{M(mCV - Vv)^2 g g k}{iV \cdot CV^2}$. At ob $Vv = CN$ erit $CV : Vv = \sqrt{k} : \sqrt{v}$; ideoque $P = \frac{Mg g (m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2}{iV}$; vnde patet vim a vento exceptam P continuo fore minorem, quo celerius nauis progrediatur, atque adeo euanesceret, si nauis tanta celeritate progredereetur, vt esset $\sqrt{v} = m\sqrt{k}$, hoc est si celeritas nauis esset ad celeritatem venti, vt sinus anguli VCE ad finum totum. Euanescente autem nauis celeritate \sqrt{v} fit vti supra iam ostendimus $P = \frac{Mm m g g k}{iV}$. Sic igitur, cum nauis iam quamcunque nacta fuerit celeritatem, vis dati venti in vela determinabitur.

§. 822. Cum igitur pro nauis celeritate habeamus aequationem $P = \frac{Mfv}{v}$ erit nunc $ffv = \frac{1}{i} gg(m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2$ hincque $fVi = mg\sqrt{k} - g\sqrt{v}$; et $\sqrt{v} = \frac{mg\sqrt{k}}{g + fVi}$, vbi erit proxime $Vi = 28$. Si igitur ad obliquitatem directionis venti solum respiciamus, quia m est cofinus anguli VCB , quem directio venti cum directione nauis constituit, erit ceteris paribus celeritas nauis vt cofinus anguli, quem venti directio cum directione nauis comprehendit. Sin autem celeritatem venti tantum spectemus, erit celeritas nauis \sqrt{v} celeritati venti \sqrt{k} proportionalis. Quare si superficies velorum gg et resistentia nauis absoluta ff seu figura prorae maneant eadem; erit celeritas nauis in ratione composita cofinus anguli VCB et celeritatis venti \sqrt{k} . Maximam ergo celeritatem nauis ab vento aeque celeritatem, si a puppi spiret; nullam vero habebit celeritatem,

tem, si directio venti ad directionem cursus fuerit normalis.

§. 823. Maneat nunc celeritas venti eiusque directio inuariata, et manifestum est si superficies velorum gg in infinitum augeatur, nauem tamen maiorem celeritatem adipisci non posse quam $=m\sqrt{k}$. Sin autem esset $g=f\sqrt{i}=28f$ ideoque $gg=784ff$, quae quidem velorum superficies esset vehementer magna, tamen nauis dimidiam tantum venti celeritatem acciperet, si quidem ventus directe in vela irrueret, ut esset $m=1$. Posito autem $m=\alpha$ fit $\sqrt{v}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{k}$ erit $\alpha g=g+28f$, ideoque $g=\frac{28f}{\alpha-1}$ et tota velorum superficies $gg=\frac{784ff}{(\alpha-1)^2}$. Ad datam igitur celeritatis venti partem nauis imprimendam, oportet ut superficies velorum gg ad resistentiam absolutam ff datam teneat rationem: quare quo minor fuerit resistentia absoluta, eo minori opus erit copia velorum, ut nauis eandem assequatur celeritatem: aucta autem resistentia, velorum superficies in eadem ratione augeri debet.

§. 824. Quo haec clarius illustrentur, consideremus nauem ad profunditatem 20 pedum aquae immerfam, erit eius latitudo circiter 50 pedum, et sectio transuersa amplissima 800 ped. quadratorum. Quare si ponamus resistentiam absolutam ob allongationem prorae octies fieri minorem, erit $ff=100$, et $f=10$. Velis autem, quae ad vnum marum extenduntur, tribuamus latitudinem 80 ped. et altitudinem parem 80 ped. ut esset $gg=1600$ ped. quadr. Quamuis enim altitudo pro hac latitudine multo maior esse soleat, tamen latitudo velorum continuo diminuitur, ut tota superficies vix sit superatura 1600 ped. quadr. Erit ergo $g=40$. Quodsi nunc ventus di-

recte in vela impingat, erit $Vv = \frac{40\sqrt{k}}{40+280} = \frac{1}{8} V k$; seu hoc casu nauis acquirat octauam partem celeritatis venti. Hinc vt haec nauis singulis horis vnum milliare germanicum conficiat, qua celeritate singulis minutis secundis 6 pedes absoluuntur, requiritur ventus, qui singulis secundis 48 ped. percurret.

§. 825 Quae autem hic de diminutione effectus venti a motu nauis orta exponuntur, celeritatem venti absolutam spectant, non eam, quae in ipsa nauis sentitur, scilicet si in loco extra nauem fixo obseruetur venti celeritas $= V k$, et anguli, quem directio venti cum nauis directione constituit, cosinus sit $= m$, tum erit vti vidimus $Vv = \frac{m\sqrt{vk}}{g+j\sqrt{i}}$. At qui in nauis versantur neque veram venti celeritatem neque eius directionem sentiunt, atque ipsa vexilla nauis, iam illam alteratam venti directionem monstrant, quae a motu nauis proficiscitur. Quare si Vk denotet venti celeritatem, quae in nauis percipitur, et m sit sinus anguli, sub quo ventus hic apparens in vela impingit, erit vtique $Vv = \frac{mg\sqrt{vk}}{j\sqrt{i}}$. Eritque adeo celeritas nauis vt celeritas venti et sinus m coniunctim et vt radix quadrata ex superficie velorum per resistentiam absolutam ff diuisa. Haec ergo regula simplicior adhiberi debet; si motus nauis ex vento, qualis in nauis apparet, defini debet.

Tab. XXIV.
fig. 3.

§. 826. Hinc expeditum nanciscimur modum veram cuiusque venti celeritatem explorandi, ac spatium assignandi, quod quisque ventus dato tempore absoluit. Veniat enim ventus in directione VC et sit eius celeritas, quae quaeritur, $= V k$. Construatur machina EFG vexillo, circa axem C liberrime mobili instructa, cuiusmodi ad venti

venti directionem explorandam fieri solent ; haecque machina si in situ C quiesceret , ope indicis CG , cum vexillo mobilis indicaret veram venti directionem VG. Nunc autem haec machina secundum directionem AB ad ventum normali promoueatur data velocitate , qui motus ope instrumenti tractorii ad lubitum facile producet. Sit haec celeritas machinae cognita $= \sqrt{v}$, qua vno minuto secundo spatium datum $= a$ absoluetur ; atque vexillum durante hoc motu posteriora versus declinabit situmque CM tenebit. Quare si durante motu index vexillo annexus sistatur , eius situs CM innotescet , hincque angulus GCM. Quo cognito erit celeritas venti \sqrt{k} ad celeritatem machinae \sqrt{v} vt CN : MN $=$ sin. tot. ad tang. GCM , erit ergo $\sqrt{k} = \frac{\sqrt{v}}{\text{tang. GCM}}$: ventus vno minuto secundo absoluet spatium $= \frac{a}{\text{tang. GCM}}$.

§. 827. Supra quidem iam modum exposuimus venti celeritatem explorandi , ope tabulae circa axem horizontalem mobili , cuius inclinatio a situ verticali celeritatem venti indicabat. Quoniam vero hic modus supra traditus pendet a theoria resistentiae , atque isto nititur principio , quod impetus fluidi contra obstaculum planum irruentis sit in duplicata ratione celeritatis fluidi et sinus anguli incidentiae ; propter hanc causam dubius videri potest. Hic autem posterior modus nulla eiusmodi hypothesi , quae in dubium vocari queat , nititur , et hanc obrem veram celeritatem venti ita monstrabit vt extra omne dubium collocetur. Quamobrem per hunc ipsum modum hic traditum , ille qui supra est propositus commode explorari , atque ex consensu vel dissensu ipsa hypothesis , cui prior est superstructus , vel confirmari vel euerti poterit ; quo

ipſo theoria impetus fluidorum magnopere perficietur.

§. 828. Si igitur ventus fuerit borealis, ſeu a borea auſtrum verſus progrediatur, atque nauis ab occaſu in ortum moueatur, his qui in nauis ſunt ventus non borealis ſed verſus ortum declinans apparebit. Contra vero ſi nauis ab ortu in occaſum currat, ventus idem occaſum verſus declinare videbitur. Quodſi ergo ſpirante aquilone duae naues ſibi occurrant, quarum altera in ortum, altera in occaſum curſum dirigat ſuum, quamuis ambae ab eodem vento impellantur, tamen putabunt ventum in eadem regione diuerſum extare: atque altera alterius ventum ſibi potius optabit quam ſuum. Quae nauis enim verſus ortum progreditur, ventum mallet ab aquilone occaſum verſus declinantem, quali alteram nauem propelli exiſtimat: ſicque viciffim haec altera nauis ſibi ventum, quo priorem vrgeri videt, expetet. Eo maius autem hoc diſcrimen apparebit, quo celerius vtraque promouetur.

§. 829. In nauis igitur mota neque vera venti celeritas neque eius vera directio percipitur, et hancobrem ipſum nauis motum ex venti tam celeritate quam directione apparente definiri conueniet. Cum autem hoc pacto motus venti relatiuus ſentiat, qualis eſt reſpectu nauis, manifeſtum eſt ab hoc motu relatiuo eundem in nauis oriri debere effectum atque in nauis quieſcente a vento, cuius motus abſolutus cum iſto relatiuo conſentiat. Quamobrem ſi celeritas venti in nauis aeſtimata ſit debita altitudini k , atque ſinus anguli, ſub quo ventus in vela incidere obſeruatur, ſit $= m$, erit celeritas nauis abſoluta $\sqrt{v} = \frac{mg\sqrt{k'}}{f\sqrt{i}}$; ceteris ergo paribus erit celeritas nauis vt ſinus m anguli, quem directio venti cum planitie velorum
facere

fācere obseruatur, seu vt cosinus anguli, quem directio venti apparens cum ipsius nauis longitudine constituit. Haec vero regula tantum locum habet, si omnia vela ad vnum malum fuerint extensa et iuxta se posita, neque vnum impediat, quominus ventus in reliqua incurrat; quod euenit, si vela per plures malos sint extensa. Hunc ergo casum seorsim euolui oportet.

§. 830. Instructa sit nauis duobus velis EF et ef , Fig. 4.
 æqualibus inter se, atque ad axem nauis AB normaliter
 extensis, sit autem vtriusque veli figura parallelogrammum
 rectangulum, cuius latitudo $EF = ef = g$, et vtriusque alti-
 tudo $= a$; sitque porro distantia horum velorum $Cc = c$,
 et resistentia nauis absoluta ponatur $= ff$. Venti autem
 celeritas vera sit debita altitudini k . Veniat primum ven-
 tus directe a puppi in directione BC , atque manifestum
 est, velum posterius EF ventum ita esse excepturum, vt
 in anterius ef nulla venti portio incurrat; nauisque igitur
 perinde promouebitur, ac si solum velum posterius EF
 effet extensum, cuius superficies est $= ag$. Si igitur ce-
 leritas nauis ab hoc vento acquisita ponatur debita altitu-
 dini v , erit venti celeritas, qua in velum EF irruit $=$
 $\sqrt{k} - \sqrt{v}$, vnde fiet $ffv = \frac{1}{i} ag (\sqrt{k} - \sqrt{v})^2$ et $f\sqrt{v} =$
 $\frac{\sqrt{agk}}{\sqrt{i}} - \frac{\sqrt{agv}}{\sqrt{i}}$. Quamobrem erit celeritas venti $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{agk}}{\sqrt{ag + f\sqrt{i}}}$,
 vbi valor ipsius \sqrt{i} est circiter $= 28$.

§ 831. Quam primum autem ventus a directione
 BC deflectit, praeter velum posterius EF quoque aliquam
 portionem veli anterioris stringet; quae portio eo maior
 erit, quo maior primum fuerit angulus BCV , tum vero
 etiam quo celerius nauis progrediatur. Si enim directio
 venti vera sit VC , quae cum axe nauis AB faciat an-
 gulum

gulum VCB , cuius finus $= n$, et cofinus $= m$; tum primo instanti quo naus etiam nunc quiescit, anterioris veli portio ek a vento stringetur, vt sit anguli Eke finus $= m$, cofinus $= n$, ideoque $\frac{ek}{Ee} = \frac{n}{m}$, seu $ek = \frac{nc}{m}$. Statim vero ac naus aliquam acquirit celeritatem directio venti relatiua mutatur, eiusque obliquitas augetur, ita vt ventus in directione vC in vela impingere censendus sit. Hinc igitur ob maiorem angulum vCB cui angulus Eke est aequalis, maior pars ek veli anterioris stringetur; ideoque ob duplicem rationem impetus venti obliqui erit maior, si naus duobus velis sit instructa.

§. 832. Ad verum igitur venti obliqui effectum determinandum, sumta CN , quae fit ad VC vt celeritas naus Vv ad celeritatem venti veram Vk , compleatur parallelogrammum $CVvN$, et diagonalis vC repraesentabit cum directionem venti relatiuam, tum eius celeritatem. Sit anguli BCv finus $= \nu$; et cofinus $= \mu$; et ducta uEk ipsi vC parallela, erit ek portio veli anterioris a vento percursa, ideoque habebitur $ek = \frac{vc}{\mu}$: ex quo tota velorum superficies, quae impetum venti sentiet erit $= a(g + \frac{vc}{\mu})$. Cum igitur anguli incidentiae vCE finus sit $= \mu$, et altitudo celeritati debita $= \frac{Cv^2 \cdot k}{CV^2}$, erit vis venti in vela excerta $= \frac{Cv^2 \cdot k}{CV^2} \mu \mu a(g + \frac{vc}{\mu})$, quae aequalis est resistentiae naus *iff* v denotante i : \mathbf{r} rationem grauitatis specificae aquae ad aerem. Vel si ponatur $CV = Vk$, et $CN = Vv$, quia in parallelogrammo $CVvN$ ratio tantum laterum spectatur erit *iff* $v = Cv^2 \cdot \mu \mu a(g + \frac{vc}{\mu})$; vbi valores lineae Cv et finuum μ, ν , in quantitibus cognitis k, v, m et n exprimi debent.

§. 833. Sit $Cv = \sqrt{z}$, et quia in triangulo CNv est finus anguli $CNv = n$, et $\text{cof. } CNv = m$; itemque fin. $BCv = v$ et $\text{cof. } BCv = \mu$; erit $n : v = \sqrt{z} : \sqrt{k}$. Deinde vero ex natura triangulorum erit $z = k + v - 2m\sqrt{kv}$; et $k = z + v + 2\mu\sqrt{zv}$; vnde $\mu = \frac{k-z-v}{2\sqrt{zv}} = \frac{m\sqrt{kv}-v}{\sqrt{zv}} = \frac{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}{\sqrt{z}}$. Cum igitur sit $\text{iff } v = \mu\mu za (g + \frac{vc}{\mu})$; erit $\text{iff } v = (m\sqrt{k}-\sqrt{v})^2 a (g + \frac{vc}{\mu})$; atque ob $v = \frac{n\sqrt{k}}{\sqrt{z}}$ erit $\frac{v}{\mu} = \frac{n\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}$, quo valore loco $\frac{v}{\mu}$ substituto habebitur $ek = \frac{nc\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}$ et $\text{iff } v = ag (m\sqrt{k}-\sqrt{v})^2 + ac (m\sqrt{k}-\sqrt{v}) n\sqrt{k} = mmagk - 2mag\sqrt{kv} + agv + mnack - nac\sqrt{kv}$; adeoque $v = \frac{-2mag\sqrt{kv} - nac\sqrt{kv} + mmagk + mnack}{-2mag - nac + \sqrt{(nnaacc + 2iaff(mg+nc))}}$ et $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{2iff - 2ag}{2m\sqrt{k} + nc}$. Sin autem fuerit

$$ag = \text{iff} \text{ erit } \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{m(mg+nc)}{2m\sqrt{k}+nc}.$$

§. 834. Ex casu hoc quo $ag = \text{iff}$ intelligitur navem a vento cum quadam obliquitate incurrente celerius propelli quam a vento directo: si enim angulus BCV fuerit minimus $= \Phi$ erit $n = \Phi$ et $m = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$, reiectis ob paruitatem altioribus ipsius Φ potestatibus. Hinc erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{(1-\Phi\Phi)g + \Phi c}{(1-\Phi\Phi)g + \Phi c} = \frac{1}{2} + \frac{\Phi c}{4g} - \frac{\Phi\Phi(2gg+cc)}{8g^2}$, quae expressio maior est, quam si effet $\Phi = 0$, foret enim tantum $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2}$. Crescente ergo obliquitate venti crescit celeritas navis vsque ad datum terminum, quem cum attigerit celeritas iterum decrefcit: ideoque dabitur certus obliquitatis angulus, cui maxima celeritas navis respondet, qui ex formula $\frac{mmg+mc}{2m\sqrt{k}+nc}$ differentiata elicitur. Prodit autem $0 = 2mmngg + 2mncg - m^3cg + n^3cc$, vel si tangens anguli quaesiti BCV ponatur $= t$ vt sit $t = \frac{n}{m}$

erit $cct^3 + 2cgtt + 2ggt - cg = 0$, vnde fit $\frac{c}{g} = \frac{1-2tt + \sqrt{(1-4tt-4t^4)}}{2t^3}$.

§. 835. Debet ergo esse $1-4tt-4t^4$ quantitas positiva, quae fit $= \alpha$, vt fit $1-4tt-4t^4 = \alpha$, vnde fiet: $(1+2tt)^2 = 2-\alpha$ et $t = \sqrt{\frac{\sqrt{(2-\alpha)}-1}{2}}$. Patet itaque α minus esse debere quam 2, ne $\sqrt{(2-\alpha)}$ fiat imaginarium; insuper vero esse debet $\alpha < 1$, ne valor ipsius t fiat imaginarius. Cum autem t crescat, decrescente α , angulus obliquitatis BCV, cui maxima nauis celeritas respondet, erit maximus, si fiat $\alpha = 0$; quo casu erit $t = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = 0,455089$, et angulus BCV $= 24^\circ, 28', 11''$; maior ergo esse nequit angulus BCV, cui maxima nauis celeritas respondet, si quidem fuerit $ag = iff$. Hoc vero casu erit $\frac{c}{g} = \frac{1-2tt}{2t^3} = \frac{\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{(\sqrt{2}+1)} = 3,106$, nempe distantia velorum Cc $= c$ maior esse debet, quam latitudo velorum g ter sumpta, fitque hoc casu $\frac{\sqrt{v^2}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)}}$ $= \frac{1}{1,553} = 0,643$.

§. 836. Quae cum ita se habeant casu $iff = ag$, videamus sub quonam obliquitatis angulo idem ventus nauis maximam celeritatem inducat generaliter; fit itaque $iff = \delta ag$, et erit $\frac{\sqrt{v^2}}{\sqrt{k}} = \frac{-2mg-nc + \sqrt{(nncc + 4\delta mmgg + 4\delta mn cg)}}{2g(\delta-1)}$, quae differentiata posito m et n variabili, et sumto $t = \frac{n}{m}$ deducet ad hanc aequationem $(2gt-c)\sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)} = 2\delta cgtt + 4\delta ggt - cct - 2\delta cg$; hincque sumtis vtrinque quadratis habebitur $(\delta+1)c c g t^4 + 4\delta c g g t^3 + 4\delta g^3 t t - 4\delta c g g t + \delta c c g = 0$ ita vt $\frac{1}{-c^3} \frac{-2\delta c c g}{-2\delta c c g}$ tangens t anguli quaesiti BCV definiatur per aequationem biquadratam, quae si $\delta = 1$, diuidi potest per $2gt-c$ et depre-

deprimitur ad aequationem cubicam praecedentem. Sub hoc igitur obliquitatis angulo, cuius tangens = t , naus celerrime propelletur nisi forte portio veli ek maior evadat quam tota latitudo veli g . Cum autem fit $ek = \frac{nc\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}$ erit pro $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ valore superiori substituto, $ek = \frac{c(\delta-1)cgf}{2\delta g + ct - \sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)}}$ qui valor si effret $>g$, confequentia de motu celerrimo non amplius valeret.

§. 837. Ponamus ergo esse $ek = g$, quo vis venti fiat maxima, simulac totum velum anterius percutit; atque habebimus praeter superiorem aequationem inuentam, hanc $2\delta ct - 2ct = 2\delta g + ct - \sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)}$ seu $\sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)} = 2\delta g + 3ct - 2\delta ct$, qui valor rationalis loco furdi in superiori aequatione substitutus dabit $(2gt - c)(2\delta g + 3ct - 2\delta ct) = 4\delta ggt - 2\delta cg + 6cgtt - 3cct - 4\delta cgtt + 2\delta cct = 2\delta cgtt + 4\delta ggt - cct - 2\delta cg$, seu reducendo $6\delta cgtt - 6cgtt + 2cct - 2\delta cct = 0$, hinc per $2(\delta - 1)ct$ diuidendo fit $3gt = c$, et $t = \frac{c}{3g}$. Substituatur hic valor in vna praecedentium, eritque $\sqrt{(c^2 + 12\delta ccgg + 36\delta g^2)} = 6\delta gg - 2\delta cc + 3cc$, vnde elicitur $9\delta g^2 - 6\delta ccg + \delta c^2 - 2c^2 = 0$ seu $(3\delta gg - \delta cc)^2 = 2\delta c^2$ et $\frac{gg}{cc} = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta}}{3\delta} = \frac{\sqrt{\delta} \pm \sqrt{2}}{3\sqrt{\delta}}$. Confequenter habebitur $\frac{g}{c} = \sqrt{\frac{\sqrt{\delta} \pm \sqrt{2}}{3\sqrt{\delta}}}$ et $t = \sqrt{\frac{\sqrt{\delta}}{3\sqrt{\delta} \pm \sqrt{2}}}$ vbi si $\delta > 2$ duplex solutio locum habet.

§. 838. Quantam autem celeritatem naus, si vela ad hanc normam fuerint difpofita, a vento obliquo fit acceptura, commodiffime ex aequatione $ek = \frac{nc\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}} = g$ colligetur; quippe quae statim praebet $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = m - \frac{nc}{g} =$

$m - 3nt$ ob $t = \frac{c}{3g}$. Cum vero fit $n = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}$ et $m = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$ erit $\frac{v}{k} = \frac{1-3tt}{\sqrt{(1+tt)}}$, quae ob $tt = \frac{v\delta}{3\sqrt{\delta} + 3\sqrt{2}} = \frac{v\delta}{3\delta + \sqrt{2}\delta}$, hincque $1 - 3tt = \frac{v\delta}{\delta + \sqrt{2}\delta}$; et $1 + tt = \frac{4\delta + \sqrt{2}\delta}{3\delta + 3\sqrt{2}\delta}$ dabit $\frac{v}{k} = \frac{6\delta}{(\delta + \sqrt{2}\delta)(4\delta + 3\sqrt{2}\delta)}$ et $\frac{v}{k} = \frac{v_6}{\sqrt{(4\delta + 6 + 7\sqrt{2}\delta)}}$ Quodsi autem ventus eadem celeritate a puppi in vela incurreret foret $\frac{v}{k} = \frac{vag}{\sqrt{ag+fv}} = \frac{1}{1+\sqrt{\delta}}$; ob $iff = \delta ag$; seu $\frac{v}{k} = \frac{1}{\delta+1+\sqrt{2}\delta}$; pro vento vero obliquo est $\frac{v}{k} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\delta+\frac{2}{3}\sqrt{2}\delta}$ quae expressio ob minorem denominatorem maior est quam illa. Hinc itaque vera ratio patet, cur nauis a vento aliquantum obliquo celerius promoueat, quam a vento directo; quod phaenomenon nauigantes quotidie experiuntur.

§. 839. Si ventus secundum directionem nauis BA in vela impingat, postica tantum vela EF ferit, atque anteriora ef nullam prorsus venti vim sustinent, hocque igitur casu vela anteriora sunt inutilia, nisi forte sint latiora. Quare si ventus perpetuo a puppi flaret, sufficeret nauem vnico malo instrui, atque superuacaneum foret vel plures malos in nauis constituere, vel iuxta eos vela extendere. Statim vero ac ventus oblique incidit, vela anteriora quoque ad nauem propellendam vim acquirunt, quoniam eorum portio quaedam ek a vento impellitur, quae portio eo erit maior quo magis distet velum anterior ef a posteriori EF. Interim tamen portio ek a vento percussa non ultra totam veli latitudinem crescere potest; quare si interuallum Cc iam fuerit tantum vt totum velum ef vim venti sentiat, tum etiam si velum ef ulterius anteriora versus remoueat, tamen effectus venti

venti non augetur. Hinc igitur pro data venti obliquitate distantia velorum $Cc = c$ maxime idonea definitur, quae tanta esse debet, vt sit $\frac{g}{c} =$ tangenti anguli obliquitatis, sub quo ventus flare obseruatur.

§. 840. Si igitur fuerit VO directio, secundum quam Tab. XXIV. ventus venireprehenditur. Scilicet non fit VO vera fig. 5. venti directio sed ea, quam in naui habere videtur, et in qua in vela impingit. Pro hac ergo venti directione velum anterius ef ita aptissime constituetur, vt ventus id totum stringat, quod eueniet, si fuerit tangens anguli BOV ad finem totum vt latitudo velorum $EF = ef$ ad distantiam Cc . Atque si distantia haec Cc non fit maior, inutile prorsus foret inter haec duo vela tertium $\epsilon\sigma$ constituere; neque enim tale velum quicquam ad nauem celerius promouendam conferret. Ponamus namque eiusmodi velum $\epsilon\sigma$ inter duo vela EF et ef expandi, atque manifestum est ventum quidem in eius portionem $\epsilon\kappa$ impingere; at hoc ipsum velum impediet quo minus ventus integrum velum anterius ef stringat. Sollicitabit scilicet tantum eius portionem ek reliqua parte kf penitus relicta intacta. Cum igitur sit $\epsilon\kappa = kf$ ventus non maiorem vim ad nauem propellendam exeret, quam si velum intermedium $\epsilon\sigma$ penitus abesset. Simul autem hinc intelligitur nullum incrementum vis venti obtineri, si plura vela inter extrema EF et ef extendantur.

§ 841. Quemadmodum autem velis EF et ef ita Fig. 6. ordinatis vt exposuimus, inutile foret inter ea alia vela extendere, ita e contrario bono cum successu vltra ea proram versus plura vela vt $\epsilon\sigma$ constituentur, quibus vis propellens non mediocriter augebitur. Sic si pro data

venti obliquitate VE fuerit Cc debita duorum velorum distantia ad eandem distantiam $c\gamma = Cc$ tertium velum $\varepsilon\sigma$, vltiusque quartum et quintum vtiliter constituetur, siquidem longitudo naus id permittat. Atque si vela hanc teneant inter se distantiam, tanta vi naus promovebitur, quam fieri potest, et superuacaneum foret inter haec vela alia extendere; quippe quae vim a vento exceptam non auferent; nisi obliquitas venti maior euaderet. Interim tamen plura vela, quam haec regula postulat, vim venti non diminuunt; et quia aucta venti obliquitate, etiam vim propellentem adaugent, nimis magnus velorum numerus non penitus est reiiciendus.

§. 842. Hinc igitur pro data venti obliquitate, non solum intervallum inter bina vela se immediate sequentia sed etiam numerus velorum ac proinde numerus malorum determinari poterit. Sit enim anguli, quem directio venti cum directione naus constituit, tangens $= t$; latitudo velorum quam vbique eandem affumo, $= g$, et distantia inter bina vela $Cc = c\gamma = c$; quia est $\frac{g}{c} = t$ erit haec distantia $c = \frac{g}{t}$ posito sinu toto $= 1$. Quodsi iam tota naus longitudo, per quam vela extendere licet, quae sit $= a$ diuidatur per $c = \frac{g}{t}$, quotus $\frac{at}{g}$ ostendet quot eiusmodi internalla c secundum naus longitudinem constituere liceat, et cum malorum numerus sit vnitate maior, erit pro data venti obliquitate numerus malorum maxime idoneus $= 1 + \frac{at}{g}$. Hinc nempe intelligitur si naus esset paucioribus malis instructa, eius motum minus futurum esse celerem; etiamsi autem plures mali constituerentur,

tamen

tamen nauem celerius non esse progressuram ; ac propterea nauem tam velis quam malis inutiliter esse oneratam.

§: 843. Quoniam expressio $r + \frac{at}{g}$ indicat numerum malorum conuenientissimum pro data venti obliquitate cuius tangens est $=t$; manifestum est , quo maior fuerit venti obliquitas , eo plures malos vtiliter adhiberi posse. Conueniet autem numerum malorum ex maxima obliquitate venti , sub qua cursum etiamnum directum conseruare expedit , definire , propterea quod pro minori venti obliquitate idem malorum numerus , etsi nauis celeritatem non augeat , eam tamen non diminuit. Expedit autem plerumque , si obliquitas venti maior euadat quam 60° , cursum obliquum potius instituere quam directum , et hancobrem maximus ipsius t valor non superabit tangentem 60° , quae est $=\sqrt{3}$. Quare aptissimus malorum nauis imponendorum numerus erit circiter $=r + \frac{a\sqrt{3}}{a}$, vel $=r + \frac{2a}{+g}$; vbi a non totam nauis longitudinem sed distantiam inter malos extremos significat.

§: 844. Quo longior ergo est nauis manente eadem eius latitudine , a qua velorum latitudo g pendet , eo plures malos in ea collocari oportebit ; ideoque eo maiorem vim a vento excipiet. Cum igitur acuta nauis longitudine eius resistentia non augeatur , quo longior fuerit nauis , eo celerius a vento obliquo propelletur ; quanquam a vento recto non maiorem celeritatem quam nauis breuior acquirit , hincque patet noua ratio , propter quam naues quam longissimas confici expedit. Solet autem fere in nauibus grandioribus longitudo a quadruplo esse maior quam latitudo , et velorum inferiorum latitudo prope modum duplo maior quam latitudo nauis , ita vt fit $a = 2g$;
vnde

vnde secundum regulam inuentam in eiusmodi nauibus $x + 3\frac{1}{2}$ seu 4 mali constitui deberent, eo quod a ob rationem allatam minor est quam tota nauis longitudo $2g$. Instructae autem sunt istae naues reuera quatuor malis, praeter tres enim malos proprie sic dictos rostrum quarti mali vicem sustinet, quippe ex quo pariter vela extenduntur.

§. 845. Pendet autem, numerus malorum potissimum a latitudine velorum g , quae quo fuerit maior, eo magis numerus malorum restringitur, vnde nascitur grauissima causa latitudinis velorum maxime augendae. Non solum autem per auctam velorum latitudinem hoc nanciscimur commodum, vt numerus malorum diminuatur, sed etiam si ventus directe a puppi veniat, quo casu anteriorum malorum vela iacent inutilia, nauis eo maiori vi propelletur, quo vela fuerint latiora; neque enim hoc casu defectus velorum per numerum malorum compensari potest. Quamuis autem inferius vela fiant latissima tamen superiora versus sensim confici debent arctiora, et hanc ob causam in sublimi maiorem malorum numerum adesse expediret; in his igitur regionibus conueniet plura vela extendere, atque intra malos ad funes robustos alligare, quod subsidium in praxi vtiliter adhiberi solet.

Tab. XXV.
fig. 1.

§. 846. Quanquam haec omnia vela aequae lata posuimus, tamen simili modo effectus, quem ventus in vela diuersae latitudinis exerit, colligi poterit. Instructa enim sit nauis AB duobus velis EF et ef , quorum posterius EF latius sit quam anterius ef . Hoc casu manifestum est ab anteriori velo ef nullam prorsus vim a vento excipi, non solum si ventus directe a puppi veniat

niat, sed etiam si habeat obliquitatem non maiorem quam est angulus EOB , quem recta Ee per velorum terminos ducta cum axe nauis constituit. Nisi ergo obliquitas venti maior sit isto angulo, nauis non magis propelletur, quam si velum anterius ef plane abesset; atque tum demum a velo ef effectus orietur, cum obliquitas venti, seu angulus, quem eius directio cum axe nauis BA facit, fuerit maior quam angulus EOB . Prius autem totum velum anterius ef a vento non incitabitur, quam obliquitas venti superet angulum EoB , cuius anguli tangens est $= \frac{EC+ec}{Cc}$. Anguli autem EOB , sub quo velum anterius ef primum vim exerere incipit tangens est $= \frac{EC-ec}{Cc}$.

§. 847. Sin autem velum anterius ef latius sit quam posterius EF , tum si ventus directe impingat, praeter velum posterius EF totum, anterioris veli partes em et fn venti vim sentient, ficque ob $EF=mn$, nauis perinde mouebitur, ac si velum posterius EF prorsus esset sublatum, solumque velum latius ef relinqueretur. Hocque modo velum posterius quasi inutile manebit, quoad venti obliquitas non excedat angulum mEe seu nFf , qui formatur a recta Ff , velorum extremitates F, f iungente cum recta Fn axi nauis parallela; quamdiu ergo tangens obliquitatis venti minor fuerit quam $\frac{nf}{Fn} = \frac{ec-EC}{Cc}$, sine detrimento minus velum EF praetermittitur. At si venti obliquitas ultra hunc terminum augeatur, tum quidem vis propellens maior existit quam a solo velo latiori, ante vero ambo vela tota a vento non incitabuntur, quam cum venti obliquitas maior evadit angulo EoB , cuius tangens est $= \frac{EC+ec}{Cc}$.

Paras II.

M m m

§. 848.

Fig. 2.

Fig. 3.

§. 848. Si igitur eiusmodi duo vela inaequalia ita disponi debeant, vt datae obliquitatis ventus ea ambo penitus perstringat, interuallum Cc tantum esse debebit, vt fiat $\frac{EC+ec}{Cc} = \text{tang. obliquitatis datae pro vtroque casu}$: scilicet. si haec dispositio requiratur pro venti obliquitate 60° , oportebit esse $Cc = \frac{EC+ec}{\sqrt{3}}$. Hinc igitur quotcunque vela per longitudinem nauis ita poterunt disponi, vt omnia si ventus datam habeat obliquitatem, pleno vento inflentur. Sint enim vela $1\alpha 1$, $2\beta 2$, $3\gamma 3$; etc. latitudine data per longitudinem nauis BA ita disponenda, vt cum venti obliquitas fuerit 60° aut maior omnia inflentur; initium fiat a puppi, vbi primum velum $1\alpha 1$ constituitur, cui adiungatur $1(2) =$ semissi sequentis veli $\beta 2$ ac ducatur recta $(2)b$ cum axe BA faciens angulum 60° ; eritque b locus secundi veli $2\beta 2$, cui adiungatur $2(3) = \gamma 3$, et ducta ad eundem angulum recta $(3)c$ dabit locum veli tertii $3\gamma 3$. Porro apponatur $3(4) = \delta 4$ ducaturque $(4)d$, vt angulus $(4)d\beta$ fit 60° , habebitur d locus quarti veli $4\delta 4$, ex quo simili ratione locus veli quinti et sequentium definietur; haecque operatio erit eadem si alius quicumque angulus obliquitatis loco 60° proponatur.

§. 849. Hinc totum interuallum inter velum primum $1\alpha 1$ et vltimum $5\epsilon 5$ definiri, atque cum longitudine nauis comparari poterit, quo pateat, quot vela ratione latitudinis data nauis capere possit. Sit tangens anguli obliquitatis propositae $= t$, posito sinu toto $= 1$, eritque $ab = \frac{\alpha_1 + \beta_2}{t}$; $bc = \frac{\beta_2 + \gamma_3}{t}$; $cd = \frac{\gamma_3 + \delta_4}{t}$; et $de = \frac{\delta_4 + \epsilon_5}{t}$; vnde totum interuallum inter vela extrema erit ae

$ae = \frac{\alpha_1 + \gamma\beta_2 + \gamma\gamma_3 + \delta_4 + \varepsilon_5}{t}$. Quare omnium velorum latitudines addantur, atque a summa subtrahatur semisumma velorum primi et vltimi; quo factò residuum per tangentem t anguli propositi diuisum dabit interuallum ae ; ex quo cum tota naus longitudo maior sit quam hoc interuallum ae , ea censei poterit aequalis summae omnium velorum latitudinum per tangentem t anguli diuisae, ac vicissim tota naus longitudo AB per tangentem t multiplicata dabit summam omnium velorum latitudinum vt-cunque eae inter se fuerint inaequales.

§. 850. Sic igitur definitur malorum numerus ex data velorum latitudine ac naus longitudo, hocque modo maxime satisfiet illi requisito principali, secundum quod naues maxima celeritate progredi debent. Hactenus enim tantum motum naus progressuum spectauimus, neque adhuc inuestigauimus, quid reliqua naus momenta, conuersio scilicet circa axem verticalem, quo gubernatio continetur, et inclinatio circa axes horizontales ratione malorum possulent. Antequam autem huc respiciamus, quoniam circa altitudinem malorum nihil adhuc est definitum, notandum est ex sola motus progressiui contemplatione altitudinem malorum minime determinari. Cum enim hoc loco id tantum sit propositum, vt naui maxima celeritas concilietur hoc ipsum commodum eo magis obtinebitur, quo magis vis propellens augeatur. Hinc ergo vtique expediret summam malis altitudinem tribuere, quia hoc pacto quantitas velorum et vis a vento excepta plurimum multiplicaretur. Quamobrem ex hoc capite altitudini malorum non solum nulli limites ponuntur, sed etiam mali quantum fieri potest, altissimi suadentur.

§. 851. Cum igitur ex motus progressiui contemplatione nihil amplius circa constitutionem malorum praecipiat, reliqua momenta, ad quae in nauium constructione potissimum attendi oportet, perpendamus. Ac primo quidem patebit ex conuersione nauis circa axem verticalem, nihil, quod ad malorum constitutionem spectet, determinari, si quidem vela ad singulos malos vtrinque aequaliter extendantur. Quoniam enim in cursu directo qui hic nobis est propositus, media directio vis a vento exceptae axi nauis longitudinali est parallela, atque in ipso plano diametrali existit, ea simul per axem nauis verticalem transibit, hincque nullum habebit momentum ad nauem circa istum axem conuertendam. Quamobrem in hoc statu gubernatio nauis a vi venti neque impediatur neque adiuuabitur; sicque singula praecepta quae supra circa gubernationem nauium sunt tradita manebunt inuariata.

§. 852. Longe aliter autem ratio erit comparata, si vela ad vnam tantum malorum partem extendantur, seu ita saltem, vt media directio vniuersae vis a vento exceptae extra planum diametrale vel dextrorsum vel sinistrorsum cadat. Tum enim vtique huius vis existet momentum ad nauem de cursu suo declinandam. Scilicet si ista media directio ad dextram cadat, prora nauis sinistrorsum conuertetur, dextrorsum autem si media directio ad laeuam partem cadat. Iste ergo effectus cursum nauis magnopere perturbans destrui deberet per actionem gubernaculi, quae saepenumero huic incommodo tollendo ne par quidem foret, nunquam autem sine notabili celeritatis nauis detrimento exerceri possit. Quamobrem eiusmodi ve-
lorum

lorum status omnino est improbandus, haecque regula in velorum dispositione sedulo obseruanda, vt ad vtramque partem aequalis a vento vis excipiatur, sicque media directio per ipsum axem verticalem naus transeat. Haec vero regula ideo etiam eo magis est tenenda, quod aequali velorum vtrunque dispositione vis venti maxime augetur; nihil autem adhuc sit repertum quod huius vis multiplicationem prohibeat.

§. 853. Huius generis autem incommodum vix euitari potest si ventus oblique in vela incidat. Quoniam enim vela tantopere extendere non licet, vt nulla prorsus curuatura ipsis a vento inducatur, vis venti in eam velorum partem, quae regioni venti est opposita, aliquanto maior existet, propterea quod his locis ventus minori cum obliquitate in vela incidit. Hinc primo quidem media directio vis venti aliquantum a directione naus declinabitur, vnde cursus naus obliquus oriri deberet; tum vero etiam vis venti fortior erit in partes velorum a vento remotiores. Priori autem incommodo remedium afferetur, si vela aliquantulum ad ventum adducantur, hocque modo obliquitas incidentiae augeatur. Posteriori vero incommodo, nisi gubernaculum sine notabili detrimento occurrere valeat, obuiam ibitur, si in parte naus vento viciniore vela vltra aequalitatem augeantur, quo per vim ad hanc partem alias praeualentem media directio totius vis in planum diametrale reducatur. Duplici autem hoc remedio tam cursus naus directus conseruabitur, quam nimia actio gubernaculi euitabitur.

§. 854. Perspicuum autem porro est ab hac vi venti qualis ad cursum directum commode instituendum requiritur,

tur, quantacunque demum sit, nullam prorsus inclinatio-
nem naus circa axem longitudinalem oriri posse. Cum
enim media directio vis venti in planum diametrale na-
vis incidere debeat, in quo simul axis naus longitudinalis
est positus, directio vis cum isto axe in eodem plano
iacebit, hincque nullum habebit momentum ad nauem
circa hunc axem inclinandam. Neque etiam curuatura
velorum hic vllum impedimentum affert, qua vti vidimus,
media directio vis venti mutaretur, quoniam si remedia
ante memorata adhibeantur, haec declinatio penitus tolli-
tur. Interim tamen si quod momentum vis venti respec-
tu axis longitudinalis resultaret, inclinatio naus hinc ori-
vnda foret perexigua ac penitus contemnenda, cum naus
eadem in cursu obliquo multo maiora momenta respectu
huius axis sustinere debeat. Quamobrem ista consideratio
hoc loco merito negligitur.

§. 855. Superest igitur, vt quemadmodum vim
venti ratione inclinationis naus circa axem latitudinalem
comparatam esse oporteat, inquiramus, vnde maximi mo-
menti limites deriuabuntur, quos in velorum multiplica-
tione atque malorum altitudine sine ingenti periculo trans-
gredi non liceat. Cum enim vis venti momentum re-
spectu amborum reliquorum axium sit nullum, eo maius
erit respectu axis latitudinalis, nisi forte haec directio per
ipsum naus centrum grauitatis transeat. Quoniam vero
centrum grauitatis naus in eius corporis medium incidit
vela autem supra naus corpus extendantur, manifestum
est, quo altius vela fuerint disposita eo maius inde esse
oriturum momentum ad nauem inclinandam. Quamob-
rem ex hoc capite tam copia velorum quam malorum alti-

altitudo , determinationem atque limites adipiscetur , quibus cum superioribus praeceptis coniunctis demum efficietur , vt naus sine periculo celerrimum motum sit impetratura.

§. 856. Cum igitur a vi venti oriatur momentum ad nauem circa axem longitudinalem inclinandam , inclinatio autem nimis magna sit periculosa , tanta venti vis , ab qua inclinatio periculosa oriatur , tolerari nequit. Quamobrem ex maxima inclinatione , quam naus sine damno subire potest , magnitudo vis a vento excipendae determinabitur , neque vero hic tam quantitas ipsius vis venti definietur quam eius momentum respectu axis longitudinalis quod est productum ex ipsa hac vi in distantiam eius ab axe. Determinato ergo momento ipsa vis quantumvis augeri possit , dummodo altitudo eius mediae directionis supra centrum grauitatis nauis tantundem diminueretur. Ex quo statim nascitur vtilissima regula praecipiens ; vt vela adhibeantur quam latissima ; sic enim eadem vniuersorum velorum seruata superficie directio media deorsum deducetur , eiusque momentum diminuetur. Maxime ergo navigationi consuleretur , si modus inueniretur velorum latitudinem ita magis augendi , vt tuto expandi ac sine molestia tractari dirigique possent , qua in re vtique vna maxima nauium perfectio posita esset.

§. 857. Verum inclinatio nauium non a sola vi venti in vela exerta eiusue momento producitur , sed etiam impetus aquae contra proram nauis allabentis plurimum confert ad inclinationem vel augendam vel minuendam. Vtriusque igitur vis momentum ante definiiri oportet quam ipsam inclinationem inde oriendam aestimari liceat. Cognito autem hoc utroque momento tanquam vera inclinatio-

nis causa, tum demum stabilitas nauis est consideranda, qua ipse effectus determinatur atque inclinationis oriundae quantitas assignatur. Hoc igitur loco figura prorae, non amplius, quatenus ab ea resistentia nauis pendet, in computum ingrediatur, sed etiam quatenus ab aqua vim excipit secundum directionem verticalem vnde satis notabile momentum respectu axis latitudinalis nasci debet. Atque his cum minima resistentia coniunctis aptissima prorae figura pro nauibus vento propulsis colligetur.

Tab. XXV.
fig. 4.

§. 858. Representet $AabB$ nauem cursu directo secundam ba progredientem, cuius Aa sit prora, Bb puppis; in G autem situm sit totius nauis centrum grauitatis; per quod transeat vel malus vel recta imaginaria verticalis Dp . Sit PQ media directio totius vis a vento exceptae, ipsa autem vis huius magnitudo ponatur $= P$, quae simul recta PQ indicetur. In hac ergo figura planum tabulae exhibebit nauis sectionem verticalem per axem longitudinalem factam; vnde axis latitudinalis erit normalis ad hoc planum, ac per centrum grauitatis G transibit; ex quo momentum vis P ad nauem circa axem latitudinalem inclinandam erit $= P \cdot PG$, si quidem directio media vis venti PQ fuerit horizontalis, si enim directio PG cum recta Dp angulum obliquum constitueret, expressio $P \cdot PG$ insuper per sinum huius anguli multiplicari deberet, posito sinu toto $= 1$. Assumam autem directionem PQ , vt plerumque fieri solet esse horizontalem, postmodum inuestigaturus, quid declinatio huius directionis ab horizonte immutare valeat in conclusionibus hinc deducendis.

§. 859.

§. 859. Hinc consideretur resistentia , quam prora na-
vis aquam findens patitur , ac ponatur ad hoc celeritas
navis debita altitudini = v , quippe qua prora contra aquam
impingit. Sit porro RS media directio resistentiae aquae ,
vtcunque ad horizontem inclinata , cuius inclinatio pendet
a figura prorae , vti in superiori libro , vbi resistentiam
ad calculum reuocauimus , satis superque est ostensum.
Ponatur ergo ducta horizontali Rr anguli SRr sinus =
 m , et cofinus = n erit vis resistentiae tota ad eius par-
tem , qua motui navis resistit vt sinus totus 1 ad n .
Quodsi ergo , vt haecenus assumimus , statuatur resisten-
tia navis absoluta tanta , quantam pateretur superficies pla-
na ff directe eadem , qua navis mouetur celeritate , con-
tra aquam vibrata , erit resistentiae vis motui navis con-
traria = ponderi voluminis aquae ffv , quod pondus ergo
erit = $\frac{Mffv}{V}$, denotante M totius navis pondus , $a c V$
eius volumen sub aquamersum. Hinc itaque erit tota aquae
in proram impingentis vis secundum directionem RS =
 $\frac{Mffv}{nV}$.

§. 860. Quoniam vero navis cursum iam ad flatum
permanentem reductum esse assumo , erit vtique vis pro-
pellens P aequalis resistentiae aquae horizontali $\frac{Mffv}{V}$; vn-
de nascitur haec aequatio $P = \frac{Mffv}{V}$ ex qua navis celeritas
supra est determinata , nunc autem indidem ex calculo
eliminari poterit. Occurat enim directio RS rectae ver-
ticali Dp in puncto S , resistentia aquae eundem exeret
effectum , ac si navis in S secundum directionem ST pel-
leretur a vi $ST = \frac{Mffv}{nV}$, vnde ob $P = \frac{Mffv}{V}$ erit haec
vis $ST = \frac{P}{n}$, et anguli TS p sinus erit = cof. SRr = n .
Pars II. N n n Quo-

Quocirca momentum huius vis aquae ad nauem circa axem latitudinalem reclinandam erit $= vi \ ST. SG. \sin. TSp = P. SG$, sicque omnino nauis circa axem latitudinalem inclinabitur, eiusque prora aquae profundius demergetur a virium momento $P. PG - P. SG = P (PG - SG)$. Scilicet si punctum S supra P cadat, prora non solum non demergetur sed etiam eleuabitur, puppi magis depressa.

§. 861. Praeter hunc autem inclinationis effectum, quem deinceps fusius perpendemus, tota nauis alleuabitur, et quasi leuior reddetur. Cum enim vis ST directio sit ad horizontem inclinata, ea resoluitur in binas vires laterales, horizontalem Sq , et verticalem Sp ; quarum illa motum nauis progressiuum afficit estque $= \frac{Mfv}{V} = P$ haec vero Sp quae est $= \frac{mP}{n}$, totam nauem sursum trahet, cuius effectus proinde in hoc constabit, vt nauis ex aqua quasi extrahatur, eiusque volumen aquae submersum diminuatur. Qui effectus satis debet esse sensibilis, cum sit aequalis ipsi $\frac{m}{n} P$, ideoque idem praestet ac si nauis tanta onerum copia, quanta pondus habeat $= \frac{m}{n} P$ priuaretur. Hoc igitur effectu ob minutum volumen aquae submersum resistentia quidem minuetur, hincque nauis celeritas fiet maior; at quia plerumque naues non satis oneratae nimis paruam habere solent stabilitatem, etiam iste effectus non semper pro tanto lucro est habendus, quam primo intuitu videatur.

§ 862. Cum igitur omnes naues, quae velis propellantur, eiusmodi proris sint instructae, vt media directio vis aquae proram impingentis non sit horizontalis, sed sursum dirigatur, perspicuum est, omnes naues, statim ac

a vento propelli incipiunt , leuiores fieri debere , minusque volumen aquae immerfum habere , quam si quiescant , quod phaenomenon a nauigantibus luculenter animaduerti solet. Eo magis autem nauis alleuatur , quo celeriore cursum adipiscatur ; tum enim vis a vento excepta P tanto fiet maior , simulque adeo onus $\frac{m}{n} P$, quod de pondere nauis tollitur crescit. Ceteris ergo paribus ista alleuatio eo erit maior , quo maior fuerit angulus , rRS quippe cuius tangenti $\frac{m}{n}$ est proportionalis. Cum igitur sit $P = \frac{Mffv}{V}$, erit pondus ab onere nauis ablatum $= \frac{mMffv}{nV}$, ideoque se habebit ad pondus nauis totum M uti est $\frac{m}{n} ffv$ ad V . Erit ergo alleuatio nauis in ratione composita quadrati celeritatis , resistentiae nauis absolutae ff et tangētis anguli rRS , quo media directio virium aquae ad horizontem Rr inclinatur.

§. 863. Si duae naues omnino concipiantur similes , quarum latera homologa sint ut C ad c ; erunt tam ipsarum pondera M quam volumina aquae submersa V in ratione triplicata ut C^3 ad c^3 ; resistentiae autem absolutae ff erunt in ratione duplicata laterum homologorum ratio vero $\frac{m}{n}$ in vtraque erit eadem. Quare si hae naues aequali celeritate propelli ponantur , erunt pondera quibus hae naues diminuentur in ratione duplicata laterum homologorum hoc est ut CC ad cc . Quoniam autem sectioes aquae eandem tenent rationem duplicatam , vtraque nauis per aequale spatium ex aqua extrahetur ; scilicet si nauis maxima vnum pedem supra aquam attollitur nauis quoque minima illi prorsus similis et aequae celeriter promota per spatium vnus pedis emerget ; nisi quatenus per

istam eleuationem dissimilem similitudo status vtriusque nauis tollitur. Hinc ergo quo naues fuerint maiores, eo minus erit sensibilis iste effectus ratione totius nauis; ideoque siue commodum siue incommodum inde oriundum eo minus euadet.

§. 864. Reuertamur autem ad malorum constitutionem, ac ponamus nauem malis instruendam iam esse paratam. Dabitur ergo in ea tam positio rectae verticalis Dp per eius centrum grauitatis G ductae, quam directionis virium aquae RS ; hincque adeo innotescet intersectio S duarum istarum linearum. Si iam vela ad tantam altitudinem extendantur, vt media directio vis a vento exceptae PQ per ipsum punctum S transeat, tum quanta cunque fuerit vis venti, nullum prorsus ex ea nascetur momentum ad nauem inclinandam; hincque nauis quam maxima vi propulsa in situ prorsus erecto sine vlla inclinatione cursum absoluet. Sin autem vela non ad tantam altitudinem pertingant, ideoque media directio vis venti PQ infra S cadat tum non solum prora nauis non magis immergetur, sed etiam eleuabitur, puppi magis immerfa. Quodsi autem tanta malis altitudo tribuatur, vt media directio vis venti PQ supra punctum S cadat, tum nauis ita circa axem longitudinalem inclinabitur, vt prora profundius immergatur.

§. 865. Cum igitur ille nauis cursus sit optimus simulque tutissimus, qui cum nulla inclinatione est coniunctus, conueniet vela ad tantam altitudinem extendi, vt media directio vis a vento excipiendae per ipsum punctum S transeat. Quamobrem hinc aptissima malorum altitudo definietur, si enim omnes malos eiusdem altitudi-

itudinis ponamus, atque ad singulos per totam altitudinem vela aequae lata extendi sumamus, cadet utique media directio vis venti in mediam cuiusque mali altitudinem. Quo circa si vela in loco extendi incipiant, fiet tota malorum altitudo $= DS + CS = CD + 2 CS$. Sin autem omnes mali non sint aequae alti, cuiusmodi inaequalitatem structura atque indoles naus omnino requirit, tum quantum breuiores ab altitudine $CD + 2 CS$ deficiunt, tantum longiores eam superare debebunt, ita ut si singuli velis instruantur, altitudo omnium media aequetur longitudini $CD + 2 CS$; vel si singulorum malorum altitudines addantur ac summa per malorum numerum diuidatur, prodire debebit altitudo haec inuenta $CD + 2 CS$.

§. 866. Malos autem in naui constituendos omnino inaequalis tam altitudinis quam crassitiei esse oportet, cum enim naus non vbique aequali oneri sustentando par fit, atque circa medium plus habeat roboris quam in extremitatibus, mali extremi minores esse debebunt quam medii. Deinde si quemuis malum seorsim spectemus, is instar columnae inferius multo fortior fit necesse est quam superius, quo fit ut in regionibus sublimioribus non tantam velorum vim sustinere possit quam ad naus superficiem. Hinc vela; quo magis eleuentur, minorem latitudinem habent; et cum plura vela ad eundem malum extendi soleant, inferiora ratione latitudinis superiora multum superabunt, vnde fit ut centrum grauitatis seu virium velorum non in mediam altitudinem, sed aliquantum inferius cadat. Eiusmodi vero velorum superiora versus coarctationem etiam operationis ratio postulat, quia vela nimis lata in sublimi posita non ad lubitum tractari et dirigi

liceret. Istam ergo malorum velorumque dispositionem a statu naus ac tractandi facilitate pendentem hic fusius non attingam.

§. 867. Si iam vela instar trianguli ifoscelis sursum conuergent, atque centrum grauitatis superficiei velorum positum esset in S , tum tota velorum altitudo foret $= 3CS$, vnde malorum altitudo prodiret $= CD + 3CS$; quae si vela vbique essent aequae lata tantum erat $= CD + 2CS$. Cum igitur reuera vela neque sint vbique aequae lata, neque supra in cuspidem acumentur, vera malorum altitudo medium tenere debet inter $CD + 2CS$ et $CD + 3CS$, vnde aptissima malorum altitudo quasi erit $= CD + \frac{5}{2}CS$. In nauibus autem pluribus malis instructis, medius seu altissimus non mediocriter hanc altitudinem $CD + \frac{5}{2}CS$ superare debet, quia reliqui erunt minores; atque inaequalitas ita erit temperanda vt commune velorum centrum ad altitudinem puncti S sit positum.

§. 868. Ex puncto ergo S inuento malorum siue aequalium siue inaequalium, cum numerus iam ante sit definitus, altitudo determinabitur. Conuenienter ergo hoc punctum S a Celebr. Bougero appellatur *centrum velare*, quia media directio omnium virium a vento exceptarum per istud punctum transire debet. Altitudo itaque malorum non minor esse debet, quam regula ista postulat: primo enim si minor statueretur, ob vim aquae praeualentem naus ita circa axem longitudinalem inclinaretur, vt puppi magis depressa prora altius eleuaretur. Tum vero in quo cardo rei vertitur, praeter necessitatem minor vis ad nauem propellendam impenderetur, quam a naui com-

modiffi-

modiffime fuffineri poffet, vnde nulla vrgente caufa motus nauis tardior exifteret. Omnino autem perfectae nauis idea postulat, vt maxima vis, quam quidem fine damno fuffentare queat, ad nauem propellendam adhibeatur, quo motu celerrimo vehatur. Quoniam vero altitudine malorum fecundum datam regulam definita, nulla prorfus inclinatio nauis confequitur, manifefturn eft magis idoneam malorum altitudinem reperiri non poffe, quo nauis tutius ac fine minori periculo inftruatur.

§. 869. Quodfi autem hanc regulam transgredi conueniat, maiorem potius malis altitudinem tribui expediet, quam minorem, cum hoc pacto vis nauem promouens augeatur, ficque ipfi maior celeritas concilietur. Inclinabitur autem vtique hoc cafu nauis proram verfus, quia momentum inclinans a vi venti ortum fuperat alterum momentum ex vi aquae reluctantae natum. Tranfeat enim vis propellentis media directio per punctum p , ac pofita vi propellente tota $= P$ erit momentum eius nauem inclinans $= P.Sp$, a quo quanta inclinatio fit proditura ex ftabilitate nauis refpectu axis latitudinalis iudicari debet. Sit igitur pofito totius nauis pondere $= M$ ftabilitas refpectu huius axis $= Mp$, eritque finus anguli inclinationis productae $= \frac{P.Sp}{Mp}$. Eousque igitur altitudinem malorum vltra datum terminum augere licebit, quoad angulus inclinationis non fiat maior, quam a nauis fine vilo periculo fubiri poffit; quem angulum non multum 5° fuperrare oportet, ita vt fractio $\frac{P.Sp}{Mp}$ non excedere debeat $\frac{1}{15}$.

§. 870. Quo maior ergo fuerit ftabilitas nauis refpectu axis latitudinalis, eo magis altitudinem malorum vltra terminum praefcriptum augere licebit, ceteris paribus.

Quo-

Quoniam vero vis P praeter velorum latitudinem a celeritate venti pendet, manifestum est quo maior fuerit venti celeritas, eo minus esse debere interuallum Sp . Atque hinc istud spatium maius concedi nequit, quam a quo etiam si ventus sit vehementissimus nulla inclinatio periculosa resultare queat; quamobrem ex valore maximo, quem vis P obtinere poterit, vento urgente fortissimo, magnitudinem interualli Sp definiri conueniet, ne vnquam naus periculo ex nimia inclinatione oriundo exponatur. Hinc ergo fit, quod naues, in quibus punctum p supra centrum velare S cadit, non solum proram versus inclinentur, sed etiam inclinatio eo maior existat, quo fortior fuerit ventus; cum contra naues in quibus punctum p in ipsum punctum S incidit, etiam a vehementissimo vento nullam inclinationem patiantur. Quo igitur naus celerrimum motum sine damno impetret, maxima magnitudo interualli Sp ex stabilitate et maxima venti celeritate colligi debet, vti est praeceptum.

§. 871. Hic autem probe est notandum, quod aucto interuallo Sp , eadem manente venti vehementia, etiam ipsa vis P augeatur, ideoque momentum $P.Sp$ duplici modo crescat. Erit autem vis venti P proxime altitudini velorum $\frac{5}{8}Cp$ ideoque ipsi altitudini Cp proportionalis; vnde eius momentum erit vt $Cp.Sp$ hoc est vt $(CS + Sp) Sp$. Ponamus iam eiusmodi pro Sp valorem puta α esse per experientiam repertum, quo naus etiam a fortissimo vento non vltra dimidium gradum inclinatur, ita vt foret $\frac{P.\alpha}{M.p} = \frac{1}{108}$; quoniam igitur sine periculo inclinatio ad 5 gradus augeri potest, ponamus interuallum Sp hanc inclinationem produciens esse $= x$; erit
pro-

propemodum $(CS + \alpha) \alpha : (CS + x) x = 1 : 10$, vnde
 $10 CS . \alpha + 10 \alpha \alpha = CS . x + x x$ ideoque $x + \frac{1}{2} CS =$
 $\sqrt{(\frac{1}{4} CS^2 + 10 CS . \alpha + 10 \alpha \alpha)}$, vnde orietur idonea in-
 terualli Sp magnitudo $x = \sqrt{(\frac{1}{4} CS^2 + 10 CS . \alpha + 10 \alpha \alpha)}$
 $-\frac{1}{2} CS$. Et, si CS prae α fuerit vehementer magnum
 erit $x = 10 \alpha - \frac{90 \alpha \alpha}{CS}$.

§. 872. Plurimum igitur interest in determinatione
 altitudinis malorum nosse cum centrum velare S , seu
 interfectionem mediae directionis impetus aquae RS cum
 recta verticali DS per centrum grauitatis nauis G ducta,
 tum etiam nauis stabilitatem. Vtrumque quidem ex fi-
 gura et constitutione nauis cognita per calculum secundum
 methodum supra traditam definiri poterit, at cum status
 nauis ad calculum reuocatus plerumque multum ab eius
 statu vero discrepare possit, expediet vtrumque practice
 per experimenta explorare; quae cum in ipsis nauibus
 non ad lubitum institui queant, curetur nauicula fabricari
 nauis per omnia similis, similique modo onerata. Insera-
 tur huic nauiculae verticaliter per centrum grauitatis ba-
 cillus, cui alligetur in quacunque altitudine filum, cuius
 ope nauicula in aqua protrahatur a pondere filum horizon-
 taliter extendente, ac notetur vtrum durante motu antror-
 sum an retrorsum inclinetur; priori casu filum humiliter po-
 steriori sublimius alligetur ac tractio repetatur, donec nauic-
 ula in motu profus non inclinetur. Quod cum euenerit
 punctum alligationis fili dabit centrum velare S , quod se-
 cundum regulam similitudinis ad nauem ipsam transferetur.

§. 873. Dum haec experimenta instituuntur eadem
 opera stabilitas nauis explorari, atque adeo magnitudo in-
 terualli Sp , quae tolerari possit, assignari poterit. In-

vento enim in nauicula puncto S , filum aliquantum supra S alligetur ac dum a dato pondere protrahitur, diligenter inclinatio notetur. Hinc enim concludetur, si maior nauis in simili puncto p a vi horizontali propellatur, quae se habeat ad illam vim, qua nauicula erat protracta in ratione triplicata laterum homologorum seu in ratione ponderum tum eandem inclinationem consequi debere. Quodsi autem vnico casu constet, quantum nauis a data vi P in dato puncto p applicata inclinetur, inclinatio a quauis alia vi alibi applicata oriunda definiri poterit; erunt enim inclinationes momenti P . $S p$ proportionales. Tum igitur cognita velorum superficie, ventoque maxima data celeritate facile aestimabitur vis illa P , vnde interuallum $S p$ determinabitur tantum, vt nunquam inclinatio damnosa euenire queat.

§. 874. Potissimum igitur pendet altitudo malorum ac proinde copia velorum a figura prorae, quippe a qua angulus ille SRr determinatur. Quo magis enim media directio impetus aquae RS supra horizontem eleuatur, eo sublimius positum erit punctum S , si quidem distantia Rr fuerit eadem; erit namque altitudo $Sr = Rr \text{ tang. } A . SRr$. Quamobrem si media directio aquae RS fuerit horizontalis, centrum velare caderet in punctum r , quod semper est sub aqua; ex quo minima velorum copia nauem inclinaret, et tamen iis venti viribus, quae ad modicum cursum instituendum requiruntur, sustinendis minime foret par. Hoc ergo incommodum in eius generis naues competit, quae omnes sectiones horizontales sub aqua inter se habent similes et aequales, quippe quae vim aquae
alla-

allabentis vbique secundum directionem horizontalem excipiunt. Huiusmodi ergo formae naues omnino sunt ineptae ad malos gestandos, neque eae sine insigni periculo vento committi possunt, talis igitur forma iis tantum nauibus est relinquenda, quae vel reinis promouentur, vel a cursu fluminis deferuntur.

§. 875. Naues ergo velorum ope propellendas eiusmodi prora praeditas esse oportet, quae ascendendo ab imo spinae diuergat, ita vt sectiones horizontales vsque ad superficiem aquae crescant, vel descendendo a superficie aquae continuo decrescant; sic enim in singulis punctis recta ad superficiem prorae normalis ad horizontem inclinabitur, et cum vis aquae directionem huius normalis sequatur, erit directio media vniuersae aquae vis ad horizontem inclinata. Ad hanc formam cunctae naues vento propellendae construi solent, ita vt hic plenissimus consensus theoriae cum praxi deprehendatur. Quae igitur in superiori libro de vi, quam naus in aqua promota sustinet, sunt tradita, hic commode in subsidium vocabuntur, quo media directio virium aquae RS definiatur. Resoluta quidem ibi est vis aquae in laterales, horizontalem scilicet et verticalem et vtraque seorsim est definita, ab his binis viribus cognitis facillime eae coniungentur, atque directio vis aequiualentis determinabitur, cuius quidem positionem RS hoc loco nosse sufficit.

§. 876. Quo magis ergo prora sursum allongatur et extenuatur, eo magis media directio aquae eleuabitur atque ad situm verticalem propius accedet; ac, si prora in infinitum extenderetur, fieret media directio RS prorsus normalis ad horizontem. Hinc semper prora tanto-

pere elongari possit, vt malorum altitudo quantumuis magna prodiret; sed praeter incommoda plura praelongarum prorarum, quorum nonnulla iam sunt commemorata, ipsa malorum altitudo non nimis magna admitti potest. Non solum enim nimis magnum tam praecalorum malorum pondus nauem vehementer oneraret, sed etiam constitutio et confirmatio tantorum malorum maximas afferret molestias, vt lucrum inde sperandum penitus cessaret. Quin etiam velorum expansio ac directio plurimum difficilis redderetur, vt taceam plura alia incommoda, quae a tam vastis malis orientur; quorum ingenti pondere atque apparatu ad eos sustentandos necessario centrum gravitatis totius nauis nimis eleuaretur, simulque oneratio, cui nauis est destinata, impediretur.

§. 877. Hancobrem ex natura ac robore vna cum scopo, cui nauis destinatur, altitudinem malorum, quos nauis sine incommodo gestare queat, definiri conueniet; qua inuenta prora nauis ita adstrui debebit, vt per directionem mediam virium aquae eadem malorum altitudo, quae iam erat determinata, resultet. Scilicet ex data malorum altitudine ac velorum latitudine concludetur facile altitudo puncti S seu centri velaris super centro grauitatis G ; ex puncto S ad proram ducatur recta SR ; atque tum proram ita formari oportebit, vt media directio virium aquae in hanc ipsam rectam RS incidat. Hoc igitur pacto non solum figura prorae propemodum sed etiam eius elongatio determinabitur; sicque naues ita construentur, vt primum tanta velorum copia sint instructae, quantam sine damno gestare valeant; tum vero vis venti inclinans ita a vi aquae aequilibratur, vt etiam a fortissimo vento nul-

la inclinatio subsequatur, quae sine dubio est perfectissima malorum constitutio, quatenus ex cursu directo proficiscitur.

§. 878. Sequenti autem modo curuatura spinae anterior, qua prora clauditur commodissime determinabitur. Sit *ab* spinae naui, *G* centrum grauitatis, per quod ad spinam ducatur normalis *DS* in eaque ex apta malorum altitudine statui naui conuenienti notetur centrum velare *S*, per quod scilicet velis omnibus passis media directio venti sit transitura. Tum centro *S* amplitudine *Sa* describatur arcus circularis *aA* donec ad superficiem aquae *AB* aut ultra pertingat; qui arcus praebabit curuaturam seu eleuationem spinae prorae formandae aptam. Cum enim omnes pressiones aquae ad *Aa* sint normales, singularum directiones ac proinde media directio *RS* per punctum *S* transibit. Inuenta autem sic sectione naui diametrali si dentur pro arbitrio sectio aquae et sectio amplissima per curuas affines tota prora formabitur, vti capite primo est ostensum. Quamuis autem hoc modo directio media vniuersae aquae vis aliquantum alteratur, tamen discrepantia non erit tanta, vt inde periculum sit metuendum. Neque enim in hoc negotio ad minutias est attendendum, cum positio puncti *S* ob stabilitatem naui modicam patiatur amplitudinem.

§. 879. Neque vero hic arcus circularis *Aa* solus ea gaudet proprietate, vt media directio vis aquae impingentis *RS* per punctum propositum *S* transeat; haec enim eadem proprietate in infinitas alias lineas curuas competit. Quin etiam omnes arcus circulares per puncta *A* et *a* transeuntes, quorum numerus est infinitus eadem proprietate erunt praediti. Arcuum enim circularium per puncta *A* et *a* ductorum centra erunt in recta *SR* an-

gulum ASa bifecante, hincque media directio vis aquae in quemcunque eiusmodi arcum impingentis cadet in eandem rectam RS . Tum vero etiam linea recta puncta A et a iungens seu corda arcuum Aa dabit idoneam prorae figuram. Inter hos ergo innumerabiles arcus circulares, qui per puncta A et a duci possunt pro lubitu eligi poterit is, qui ad proram determinandam propter alias rationes videatur maxime accommodatus, et hanc obrem non opus erit ad alias lineas curuas confugere.

Tab. XXVI.
fig. 2.

§. 880. Ex datis ergo centro velari S , et termino spinae anteriori a vna cum superficie aquae AB definitur corda Aa , super qua omnes arcus circulares constructi eiusmodi prorae figuram exhibebunt, vt media directio vis aquae per punctum S transeat, erit enim haec media directio ad cordam Aa normalis, eamque bifecabit. Cum igitur vnumquemque horum arcuum ARa pro figura prorae accipere liceat, ne in electione ancipiter haereamus, conueniet eam potissimum arcum ARa prae reliquis eligi, qui prorae minimam resistantiam horizontalem conciliet. Sic enim inter omnes arcus circulares ARa qui ad malorum altitudinem propositam aequae sunt accommodati is ad proram formandam deligetur, a quo naus celerrimum motum adipiscatur. Hoc ergo modo^l duobus requisitis principalibus simul satisficiemus, scilicet vt naus conuenienti velorum copia instructa et celerrime promoveatur, et nullam prorsus inclinationem sensibilem siue antrosum siue retrorsum patiat. Neque igitur aliunde magis idonea determinatio prorae reperiri poterit.

§. 881. Cum igitur corda Aa magnitudine et positione sit data, ponatur $AE = aE = a$; sitque angulus SEF

SEF, quem recta SR cum horizonte EF constituit, $= q$; cuius finus ponatur $= m$ et cofinus $= n$ posito finu toto $= 1$. Sit O centrum arcus ARa, ac ponatur OE $= b$; et radius circuli OA $= Oa = c$ vt fit $c = \sqrt{aa + bb}$; et anguli AOR seu aOR finus $= \frac{a}{c}$ et cofinus $= \frac{b}{c}$. Iam ad resistantiam explorandam consideretur elementum Mm, in quod aqua secundum directionem NM irruat: ducto radio OM fit angulus ROM $= s$, erit vis aquae in Mm incidentis vt Mm per quadratum finus incidentiae RMN multiplicatum: est autem producta NM in Q finus anguli RMN $= \text{cof.} \overline{OMQ} = \text{cof.} (q+s)$; vnde erit vis, quam elementum Mm sustinet vt $cds (\text{cof.} \overline{q+s})^2$, cuius directio est MO normalis ad Mm, quare vis secundum directionem horizontalem MQ seu resistantia erit vt $cds (\text{cof.} \overline{q+s})^3$ ideoque resistantia arcus RM erit vt $\int cds (\text{cof.} \overline{q+s})^3$.

§. 882. Ad hanc formulam $\int cds (\text{cof.} \overline{q+s})^3$ integrandam manifestum est esse $(\text{cof.} \overline{q+s})^3 = \text{cof.} \overline{q+s} (1 - (\text{fin.} \overline{q+s})^2)$ vnde erit $\int cds (\text{cof.} \overline{q+s})^3 = \int cds \text{cof.} \overline{q+s} - \int cds \text{cof.} \overline{q+s} (\text{fin.} \overline{q+s})^2$ quae vtraque formula cum sit integrabilis erit integrale quaesitum $= c \text{fin.} \overline{q+s} - \frac{1}{3}c (\text{fin.} \overline{q+s})^3 + C$; haecque constans C ita debet definiri, vt posito $s = 0$, et resistantia euanescat, ex quo erit $C = -c \text{fin.} \overline{q} + \frac{1}{3}c (\text{fin.} \overline{q})^3$. Quam obrem resistantia arcus RM erit $= c \text{fin.} \overline{q+s} - \frac{1}{3}c (\text{fin.} \overline{q+s})^3 - c \text{fin.} \overline{q} + \frac{1}{3}c (\text{fin.} \overline{q})^3$. Sin autem angulus ROM $= s$ ad alteram partem versus A capiatur erit resistantia simili modo computata $= \int cds (\text{cof.} \overline{q+s})^3$
cuius

cuius integrale erit $= -c \sin. q^- s + \frac{1}{3}c (\sin. q^- s)^3 + c \sin. q - \frac{1}{3}c (\sin. q)^3$. Ponatur angulus $AOR = aOR = g$, ac in vtraque formula posito g pro s summa ambarum formularum dabit resistentiam totius arcus $ARa = c \sin. q + g - c \sin. q^- g - \frac{1}{3}c (\sin. q + g)^3 + \frac{1}{3}c (\sin. q^- g)^3$, ad directionem horizontalem reductam.

§. 883. Cum verò sit $\sin. q + g = \sin. q. \cos. g + \cos. q. \sin. g$ et $\sin. q^- g = \sin. q. \cos. g - \cos. q. \sin. g$, erit resistentia arcus $ARa = 2c \cos. q. \sin. g - 2c (\sin. q)^2 \cos. q (\cos. g)^2 \sin. g - \frac{2}{3}c (\cos. q)^3 (\sin. g)^3$. Quoniam nunc est $\sin. q = m$, $\cos. q = n$; et $\sin. g = \frac{a}{c}$, atque $\cos. g = \frac{b}{c}$, erit his valoribus substitutis resistentia arcus $ARa = 2na - \frac{2m^2na}{cc}bb - \frac{2}{3}\frac{n^3a^3}{cc}$. Nunc ob $cc = aa + bb$ et $mm = 1 - nn$, erit resistentia $= \frac{2na}{cc} (aa + bb - bb + mbb - \frac{1}{3}m aa) = \frac{2na}{3cc} (3aa - maa + 3mbb)$. Quodsi ergo fiat $b=c = \infty$ quo casu arcus ARa cum corda Aa confunditur, erit ob a prae b euanescentes resistentia $= 2n^3a$, vti alias constat. Sin autem $OE = b = 0$, vt sit $c=a$ et ARa semicirculus, erit resistentia $= \frac{2}{3}na (3 - mn)$, nisi quatenus ob inclinationem rectae Aa non totus semicirculus aquae allapsui exponitur.

§. 884. Quo igitur totus arcus ARa allisioni aquae opponatur, necessè est vt angulus ROa minor sit angulo ROP seu EOF , si enim sit aequalis tum tangens eius in puncto infima a fiet horizontalis, et si esset maior, arcus ad a iam fursum reflecteretur proraque alicubi profundius immergeretur quam tota spina, quae adeo figura ad proram constituendam est inepta. Debebit ergo sinus anguli ROa qui est $= \frac{a}{c}$ non maior esse sinu anguli EOF
seu

seu cofinu anguli OEF, qui est $= n$, eritque igitur vel $\frac{a}{c} = n$ vel $\frac{a}{c} < n$. Sit primo $\frac{a}{c} = n$ vt sit $\frac{b}{c} = m$, erit resistentia $= \frac{2}{3} n a (3 n n - n^4 + 3 m m n n) = \frac{4}{3} n^3 a (3 - 2 m)$. Quae resistentia vel aequalis esse potest cordae vel maior vel minor; erit enim aequalis si $3 = 2(3 - 2 m) = 6 - 4 m$, vnde $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ideoque angulus EOF $= 60^\circ$, sin autem angulus EOF fuerit maior minorue 60° , tum quoque resistentia arcus minor erit, maiorue quam resistentia cordae.

§. 885. Hinc apparet quandoque per incuruationem prorae resistentiam diminui, quandoque vero proram rectam AEa praestare; qui casus quo melius distingui queant, consideremus diligentius resistentiam arcus ARa eamque comparemus cum resistentia, quam corda ipsa Aa patitur. Cum ergo fit $bb = cc - aa$ erit resistentia $= \frac{2na}{3cc} (3aa - 4nnaa + 3nmc) = 2na (nn + \frac{(3-4nn)aa}{3cc})$; atque resistentia cordae fit $= 2n^3 a$; patet diiudicationem ex valore $3 - 4nn$ esse petendam. Scilicet si fuerit $3 - 4nn = 0$, seu angulus EOF vel angulus RSG sexaginta graduum, resistentia prorae erit eadem siue constituatur recta secundum cordam, siue incuruetur secundum arcum circularem quemcunque per puncta A et a transeuntem, dummodo nulla prorae pars profundius immergatur quam ipsa spina. Sin autem sit $n < \frac{\sqrt{3}}{2}$ seu angulus RSG 60 gradibus minor, tum resistentia cordae minor erit quam resistentia cuiusuis arcus circularis per puncta A et a ducti.

§. 886. Casus hic, quo angulus RSG minor est 60 gradibus in omnibus fere nauibus, quae malis solent esse

Tab. XXVI.
fig. 1.

Pars II.

P p p

instruc-

instructae, locum habet; quocirca in his nauibus aptissima prorae figura erit linea recta puncta A et a iungens, quippe quae minimam naui producit resistantiam. Omnis ideo curuatura, quae his casibus prorae induceretur motum nauis retardaret, sicque effectum velorum qui vnice intendi solet, diminueret. Sequenti ergo modo ista prorae figura aptissima definietur; centro S interuallo Sa , quod ad finem spinae anteriorem pertingit describatur arcus circuli aRA , donec superficiem aquae in A secet ductaque corda Aa dabit prorae eleuationem atque adeo figuram conuenientissimam. Ceterum aliae rationes, quae omnes angulos, cuiusmodi oriretur in a , prohibent, applicationem huius regulae saepissime impediunt; quare ne his rationibus vis inferatur, proram in a tam parum incuruari oportebit, quam circumstantiae permittunt, ita vt minime a figura descripta aberretur.

§. 887. Sin autem naues occurrant eiusmodi, in quibus postquam arcus Aa fuerit delineatus, angulusque ASa recta SR bisectus, angulus RSG maior fiat 60 gradibus, ideoque quantitas $3 - 4m$ valorem obtineat negatiuum, tum manifestum est quo magis prora incuruetur, eo minorem prodituram esse eius resistantiam. His igitur casibus conueniet proram in arcum circulare ARa incuruare, eius radio tam exiguo assumpto, quantum fieri potest. Quoniam vero prora nusquam infra spinam descendere debet, manifestum est, angulum ROa non maiorem esse posse angulo EOF . Quare vt prorae maxima idonea curuatura tribuatur, ex puncto a erigatur recta normalis, eiusque intersectio cum recta SR notetur; haec enim intersectio dabit centrum circuli, quo arcum ARa describi conueniet.

Fig. 2.

Hoc

Hoc modo fiet prorae aRA tangens in imo puncto a horizontalis sicque prora quasi continuum corpus cum spina constituet, nullique occurrent anguli, quos ob alias rationes euitari oporteret.

§. 888. Eo magis igitur prora ad horizontem inclinabitur quo minor fuerit angulus RSD , ac simul quo minor fuerit naus profunditas sub aqua. Tab. XXVI. fig. I. Sit enim $naus$ $SD = a$ profunditas carinae $CD = b$; et distantia $aD = c$; erit $Sa = SA = \sqrt{aa + cc}$, et $AC = \sqrt{aa + cc - (a - b)^2} = \sqrt{cc + 2ab - bb}$. Ducta iam corda Aa , quae proram constituet, quoties angulus DSR non fuerit maior quam 60° , erit eius inclinatio ad horizontem $=$ angulo CAa , cuius tangens est $= \frac{b}{\sqrt{(a + 2ab - bb) - c}}$, et finus $= \frac{b}{\sqrt{(2cc + 2ab - 2c\sqrt{cc + 2ab - bb})}}$, vnde cum resistentia fit vt CD in quadratum huius finus erit resistentia huius prorae rectae Aa vt haec expressio $\frac{b^3}{2cc + 2ab - 2c\sqrt{cc + 2ab - bb}}$. Deinde vero est $Aa = \frac{b}{\sin C\Delta a} = \sqrt{(2cc + 2ab - 2c\sqrt{cc + 2ab - bb})}$, angulus autem RSD aequalis est angulo CAa , vnde perspicuum est quo minor fuerit angulus DSR eo resistentiam fore minorem hincque nauem celerius esse progressuram.

§. 889. Quo igitur resistentia magis diminuatur, efficiendum erit vt angulus DSR plurimum diminuatur, quod fiet si cum altitudo SD augeatur, tum vero intervallum aD minuatur. Quod quidem ad posterius attinet, quoniam aD a longitudine naus pendet, quam ob gravissimas causas prorsus non diminuere licet, sed etiam elaborandum fit vt ea quoad fieri potest, augeatur; hoc relinquatur vt centrum grauitatis G , quantum fieri potest,

antrorsum promoueatur, quo interuallum Da hoc pacto minimum praestetur. In sequenti autem capite aliae occurrent rationes quae eandem centri grauitatis ad proram admotionem postulant; quibus itaque dum fatisfit, simul motus nauis accelerabitur. Quo autem centrum grauitatis proram versus permoueatur, neesse est, vt maior onerum ~~ratio in hac nauis parte imponatur~~, ne autem hinc pro-
ra nimium immergatur, eius quoque volumen sub aqua amplius fieri oportet, vnde regulae ad constructionem nauium requisitae magis determinabuntur.

§. 890. Multo sensibilius autem aucta altitudine DS angulus DSR ac proinde resistentia nauis diminuetur. Hinc ergo summa vtilitas perspicitur, quam mali altissimi nauibus afferunt. Primo enim pluribus velis vtiliter extendendis locum concedunt, quo vis propellens fortior redditur; ex quo si eadem esset resistentia, celeritas nauis au-
geretur. Verum praeterea quo altiores constituuntur mali, eo magis angulus CAa ac proinde resistentia diminuetur, vnde denuo acceleratio nauis existit. Cum igitur duplicem ob causam celeritas nauis aucta malorum altitudine multiplicetur, eo magis erit curandum, vt naues quam altissimis malis instruantur. Quodsi ergo impedimenta, quae nunc quidem nimiam malorum altitudinem dissuadent, tolli vel superari, vel alia ratione altitudo malorum augeri possit, hoc quidem nauigatio plurimum perficeretur. Interea autem probe est cauendum, ne praeter necessitatem malorum altitudo minor adhibeatur, quam nauis quae-
que pro robore suo sustinere possit.

§. 891. Haec igitur sunt tenenda, si naues ita fabricari debeant, vt in cursu suo directo nullam profus in-
cli-

clinationem patiantur. Quoniam vero ob insignem stabilitatem ratione axis latitudinalis, quam cum figura ipsa nauibus tribuit, tum incolumitas maxime postulat, naues sine periculo inclinationem sustinere possunt, eam ita in vsum conuerti conueniet, vt inde status nauium magis perficiatur. Supra quidem, vbi prorae figuram iam datam assumimus, ita ab hac regula recessimus, vt malos altiores fieri suaderemus, quam resistentiae ratio postularet; vnde cum inclinatio nauis antrorsum sequeretur, ita malorum altitudo determinari debebat, vt ne inclinatio inde oriunda nauis damnum afferre queat. Nunc autem si ita a regula data recedere velimus, vt inclinatio nauis antrorsum oriretur, quantam quidem sustinere possit, prora magis sursum eleuari deberet, quo media directio RS infra punctum S, per quod media directio vis venti transit, cadat; hinc autem non solum nullum lucrum sed etiam insigne damnum nauibus inferretur.

§. 892. Si enim prora Aa magis eleuaretur atque ad situm verticalem propius adduceretur, tum resistentia nauis augetur hincque cursus retardaretur. Atque adeo hoc pacto inclinatio in nauis produceretur cum insigni incommodo. Quocirca multo erit consultius prorae magis ad horizontem inclinare, quam regula ante data requirit; hoc autem modo, quia media directio vis aquae RS supra mediam directionem venti cadet, inclinatio nauis retrorsum produceretur, quae dummodo non sit maior, quam sine damno sustineri potest, admitti poterit. Emolumentum autem, quod per hanc ab regula recessionem in nauem redundat, minime erit contemnendum; sic enim resistentia nauis non mediocriter diminuetur, eoque motus

navis celerior reddetur. Eiusmodi ergo inclinatio circa axem longitudinalem innoxia vtique admitti poterit, cum tam infigne lucrum, navis scilicet acceleratio impetretur; alia vero praeterea accedunt commoda, quae eiusmodi proram eo magis suadebunt.

§. 893. Primo enim dum prorae Aa inclinatio ad horizontem minor redditur, simul longitudo navis in superficie aquae AB augetur, vnde praeter alia auctae longitudinis commoda etiam stabilitas navis respectu axis longitudinalis augetur; hincque navis eo facilius inclinationem sustinebit, minusque damnum ab ea erit metuendum. Deinde si hoc modo prora navis elongetur, non solum centrum grauitatis G sponte ad a propius accedit, sed etiam maius spatium in prora suppetit, vbi maior onerum copia collocari, hocque pacto centrum grauitatis adhuc propius antrorsum produci poterit; hac autem ipsa centri grauitatis promotione, quam punctum S sequitur, inclinatio navis retrorsum oriunda diminuetur, atque incommodum si vllum ex hac parte esset metuendum, tolleretur. Quin etiam si ob tantam prorae onerationem in navis statu quietis, prora aliquanto profundius immergeretur, quam par est, hic ipse defectus ab inclinatione retrorsum nata emendabitur, navisque in situ erecto cursum absoluet.

Fig. 3. §. 894. Ad haec commoda accedit aliud non minoris pretii lucrum, quod ex ipsa navis inclinatione retrorsum facta nascitur. Dum enim prora navis eleuatur, eius minor portio resistentiam aquae sentiet, ficque ipsa resistentia diminuetur. Contra quidem in hoc statu navis aqua contra vniuersum fere fundum ad puppim vsque impin-

pingit, quo resistentia iterum augeri videatur. At vero in superioribus vidimus resistentiam non magis diminui posse, quam prora maxime elongata; quamobrem in praesenti casu, quo tota fere naus prorae vicem sustinet et aqua vbique sub maxima obliquitate allidit, resistentia vehementer diminui debet. Denique hic non est praeterendum per talem inclinationem aquam liberius in gubernaculum incurrere; quae omnia tam insignia commoda nullis incommodis inquinata eiusmodi prorae figuram, quae magis ad horizontem inclinatur, quam regula requirit, omnino suadent; dubiumque nullum superesse potest, quin in praxi a tali malorum ac prorae constitutione summus fructus percipiatur.

§. 895. Vnica superesset tractatio de malis non verticaliter constitutis, seu potius de velis, quorum superficies expansa ad horizontem fit inclinata; verum tanta incommoda occurrunt, vt eiusmodi velorum dispositio penitus fit improbanda. Primo enim per obliquitatem eorum superficies augetur, ac propterea plus lintei requireretur, tum vero non obstante superficiei incremento, vis nauem propellens adeo in ratione duplicata sinus anguli, quem vela cum horizonte constituunt, diminueretur, quae rationes vtique sufficiunt ad eiusmodi velorum positionem reiiciendam. Praeterea quidem per talem velorum inclinationem tota naus vel aquae profundius immergi, vel altius ex aqua extrahi possit, sed haec non sunt eiusmodi, vt memorata incommoda ideo admitti queant: nisi forte certae circumstantiae quandoque eiusmodi effectum absolute requirant, quae cum eueniunt, ipsae potius quam motus nauis erunt spectandae.

Caput XI. DE CVRSV NAVIVM OBLIQVO.

§. 896.

In capite praecedente vidimus, quemadmodum cum malos constitui, tum proram instrui oporteat, ut navis cursum directum tenens sine periculo quam celerrime progredi queat. Quoniam vero cursum directum tenere non licet, nisi venti directio congruat, ventus autem non ab arbitrio nostro pendet in navibus vento propellendis imprimis ad cursum obliquum erit attendendum, ut quicumque fuerit ventus, navis maxime cursum propositum sequatur. In superiori quidem libro figuram navium ad cursum obliquum instituendum aptissimam inuestigauimus, ut deuiatio a cursu proposito esset minima. Hoc igitur loco tantum superest, ut in constitutionem malorum ad hunc scopum maxime accommodatam inquiramus, quo navis sine periculo cum maxima celeritate ac minima deuiatione secundum directionem axis longitudinalis progredietur. Hic autem ut in cursu directo nouae sese manifestabunt regulae, quas in conformatione prorae atque totius navis obseruare conueniet, quibus constructio navium magis perficietur.

§. 897. Quemadmodum cursus directus absoluitur, cum media directio vis a vento exceptae axi navis longitudinali est parallela, quod euenit si vela ita extendantur, ut iste axis ad eorum superficiem sit normalis, ita navis cursu obliquo feretur, si media directio vis a vento exceptae cum axe longitudinali angulum constituat obliquum. His ergo casibus navis non in directione vis ven-

ti promoueri poterit , propter resistentiam aquae , cuius directio aequalis atque contraria vi propellenti esse non potest. Sequetur ergo nauis in cursu obliquo directionem quandam mediam inter ipsam suam directionem seu axem longitudinalem et inter directionem vis propellentis , angulus autem , quem directio cursus cum axe nauis longitudinali constituit , deuiatio seu declinatio cursus vocatur. Pendet autem haec cursus declinatio potissimum a figura nauis atque eo minor existit , quo magis nauis longitudo latitudinem superauerit. Cum igitur deuiatio quam minima desideretur , ad cursum obliquum imprimis requiritur , vt longitudo nauium quantum fieri queat , prae latitudine augeatur , cuius quidem rei ratio iam supra vberius est exposita.

§. 898. Quanquam varietas inclinationis superficiei velorum ad axem longitudinalem nauis potest esse infinita in praxi tamen ad duos fere casus reduci solet. Designet enim AB nauem seu eius axem longitudinalem , sitque A prora et B puppis. Ac primo quidem si vela in situm EF ad AB normalem disponantur , nauis cursu directo promouebitur , vti vidimus , hocque casu nauis pleno vento vehi dicitur. Deinde si vela in situm ef expandantur , vt angulus eCA fiat circiter femirectus , cursus nascetur obliquus prioris speciei , qui cum vento dimidio institui dicitur , propterea quod haec velorum dispositio ad eum potissimum ventum est accommodata , qui in directione EC ad nauem AB normali venit. Sin autem ventus in directione eC irruat , vela in situm $\varepsilon\sigma$ extenduntur , ita vt angulus εCA quasi quartam partem recti seu $22\frac{1}{2}^{\circ}$ adaequet ; qui cursus propterea aduersus ventum institui dicitur. Sunt adeo duae cursus

Tab. XXVI.
fig. 4.

Pars II.

Q q q

obli-

obliqui species, quarum altera ad ventum dimidium, altera ad ventum contrarium est accommodata.

§. 899. Scilicet cum ventus vel a puppi B venit, vel non ultra 60 aut $56\frac{1}{4}$ gradus, qui angulus 5 rhumbos facit, discedit, cursus directus tenetur; hoc est sumto in circulo centro C descripto, arcu $BM = 56\frac{1}{4}$, si venti directio intra B et M cadat, vela ad situm EF disponuntur. Sin autem ventus ex plaga MEN iterum quinque rhumbos seu angulum $56\frac{1}{4}$ continente veniat, ita ut sit EN $22\frac{1}{2}$, dimidio vento naus propelli censetur, atque vela in situm eCf diriguntur. Sin autem directio venti ultra N versus A nempe in spatium Ne duos rhumbos continens incidat, cursus naus contra ventum institui dicitur ac vela in situm eCσ disponuntur. Quodsi vero ventus ex plaga eA veniat, tum nullam memoratorum cursum tenere licebit, his ergo casibus ipsa naus directio AB ita ad a declinatur, ut cursum tertium aduersus ventum tenere liceat; naus ergo non secundum directionem propositam BA procedet, verum tamen, dum alternatim ad dextram ac sinistram deflectitur in regionem propositam appropinquabit.

§. 900. Quamuis autem theoria pro quavis venti directione velorum dispositionem aptissimam monstrat, tamen in praxi haec infinita varietas non commode observari potest, propterea quod nautae theoriae expertes non ita ad libitum instrui possunt, ut vela ad praeceptam obliquitatem accurate disponant. In horum igitur gratiam expeit aliquot velorum dispositiones tantum relictis reliquis ad usum adhibere, atque pro vna quaque ipsis certas notas monstrare, quas sequentes vela vel ad plenum ventum

tum vel ad dimidium vel ad contrarium instar machinarum disponere possint. Hoc modo etiam gubernator facilius cursus deviationem aestimabit, cum duplicem tantum cursum obliquum habeat diiudicandum; si enim ipsi pro utroque semel innotuerit, quanta sit deviatio, haec brevis cognitio sufficiet ad cursum aestimandum. Et si autem vndarum motus et impetus deviationem non mediocriter immutare solet, tamen non tam facile in iudicio suo fallitur, quam si infinita velorum obliquitas ipsi insuper esset perpendenda.

§. 901. Quod nunc primum ad numerum locumque malorum attinet, quoniam in his rebus nullam mutationem, quoties cursus obliquus instituitur, suscipere licet, tam numero quam loco malorum eodem uti oportet, qui semel fuerit constitutus. Quamvis enim alium requireret malorum cum numerum tum locum cursus directus, alium vero obliquus, tamen ob immutabilitatem, malorum utriusque satisfieri non posset; sed contentos non esse oportebit malos ita constituisse, ut cum ad neutrum cursum sint perfecte accommodati, tamen in utroque quam fieri potest maximum effectum praestent. Poterit interim cum velorum latitudo augeri diminuiue, tum in aliis locis praeter malos vela expandi, sicque eadem mutatio, quae per malorum transpositionem intendi posset, obtineri, cuiusmodi adminicula saepenumero in subsidium vocari solent; verum antequam huiusmodi adminicula diiudicare liceat, examinari conveniet, quantum iam ante constitutus malorum cum locus tum numerus motui obliquo vel faueat vel obstet.

Tab. XXVI.
fig. 5.

§. 902. Pro cursu autem directo malorum .loca ex velorum latitudine ita determinauimus, vt si directio venti a puppi 60 declinet, tum ventus in omnia vela irruat. Sint igitur D et L loca duorum malorum contiguorum, ac velorum ad illum expansorum latitudo sit $EF = 2a$, ad hunc vero sit $MN = 2b$; interuallum autem malorum sit $DL = c$. Quoniam igitur haec vela EF et MN ad cursum directum sunt extensa, erit ducta recta EN angulus BOE = 60°; ideoque $\frac{a+b}{c} = \sqrt{3}$ seu $c = \frac{a+b}{\sqrt{3}}$. Si ergo ventus flet in directione EON, tum omnia vela inflabuntur, atque adeo cursus directus bono cum successu instituetur; sin autem venti directio magis a puppi B declinet, angulusque BOE maior 60° fiat, tum quidem nisi ad 90° ascendat, singula vela EF et MN tota perstringet, sed nimis oblique, atque etiam portio venti inutiliter inter vela transibit. Quamobrem expediet velis positionem quandam obliquam ef et mn tribuere, quo cum ventus magis directe in ea incurrat: tum etiam nulla eius pars inutiliter pereat.

§. 903. Ponamus vela in situm cf et mn ita extendi vt sit anguli ADe seu ALm sinus = m , cosinus = n . Ducatur recta en , atque manifestum est, si ventus in directione hac en veniat, vtrumque velum totum a vento impulsim iri; sin autem venti obliquitas fuerit minor angulo BOe, tum partem tantum veli mn incitari, at si obliquitas venti maior fuerit angulo BOe tum quidem ventum totum velum mn perstringere, at aliquam venti portionem a velis non exceptam perire. Determinemus ergo ex angulo eDA seu mLA assumpto angulam BOe, quo pateat ad quemnam ventum haec velorum dispositio
fit

fit maxime accommodata. Dubium enim est nullum quin ventus in hac directione veniens maximam vim exerat: namque perspicuum est, si obliquitas venti esset maior eius vim ob minorem angulum incidentiae minorem esse futuram; si autem obliquitas venti esset minor tum maior quidem foret angulus incidentiae, at simul non totum velum mn perfringeretur, quo ipso vis minor euadat necesse est.

§. 904. Ex L in velum ef demittatur normalis LK , ob anguli LDK sinum $= m$, cosinum $= n$, et $DL = c$, erit $LK = mc$ et $DK = nc$. Deinde ex e ad mn normalis ducatur ek erit $Lk = Ke = a - nc$, et $ek = LK = mc$, ideoque fiet $nk = a + b - nc$. Hinc anguli enk erit tang. $= \frac{ek}{nk} = \frac{mc}{a+b-nc}$; quo angulo enk inuento erit angulus $BOe = 180^\circ - enk - BLn$. Cum igitur sit tang. $enk = \frac{mc}{a+b-nc}$; et tang. $BLn = \frac{m}{n}$ erit tang. $(enk + BLn) = \frac{m(a+b)}{n(a+b)-c}$ ob $mm + nn = 1$; ideoque tang. $BOe = \frac{m(a+b)}{c-n(a+b)}$. Supra autem vidimus esse $c = \frac{a+b}{\sqrt{3}}$ ex quo habetur tang. $BOe = \frac{m\sqrt{3}}{1-n\sqrt{3}}$. Cum igitur latitudo velorum ex calculo egrediatur, manifestum est ex solo angulo inclinationis velorum ADe , definiri directionem venti eOn seu angulum BOe , cui haec velorum dispositio maxime conueniat; in quae ergo ventus incidet sub angulo enk , cuius tangens est $= \frac{mc}{a+b-nc} = \frac{m}{\sqrt{3}-n}$; et sinus $= \frac{m}{\sqrt{4-2n\sqrt{3}}}$.

§. 905. Haec ita se habent, si ponamus malos ita constitui vt vento a puppi ad 60° vsque declinante adhuc cursus directus teneri debeat; quoniam vero a nauigantibus anguli non per gradus sed per rhumbos, quorum

vnus $11^{\circ} 15''$ continet, mensurari solent, angulusque 60° nimis magnus videtur, expediet pro eo angulum 5 rumborum seu $56^{\circ} 15'$ assumi, vel quia hic angulus non commode per sinus et tangentes repraesentari potest, in eius locum substituamus angulum $54^{\circ} 44'$ cuius tangens est $= \sqrt{2}$ ita vt sit $c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Vbique ergo $\sqrt{2}$ loco $\sqrt{3}$ substituto, si anguli ADe seu ALm quem vela cum axe constituunt, sinus sit $= m$, et $\cos. = n$, erit obliquitas venti seu anguli BOe tangens $= \frac{m\sqrt{2}}{1-n\sqrt{2}}$. Hinc si fuerit angulus BOe rectus, seu si venti directio cum directione nauis faciat angulum rectum, erit $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ideoque hoc casu vela ita commodissime disponentur, vt cum directione nauis AB angulum semirectum constituent, sicque cursus obliquus cum vento dimidio talis accurate instituetur, qualem supra descripsimus.

§. 906. Quo autem hinc facilius intelligatur, quae nam velorum dispositio ad quamlibet venti obliquitatem sit maxime accommodata, tabellam supputari conueniet, quae pro quouis velorum obliquitate seu angulo ADe directionem venti seu angulum BOe vna cum angulo incidentiae venti in vela exhibeat, cuiusmodi tabellam ad denos gradus construxisse sufficiet.

Ang. ADe quem vela cum lon- gitudine naus AB faciunt	Ang. BOe quem directio ven- ti cum BA confi- tuit	Ang. enm sub quo ventus in vela incidit.
90°	54°, 44'	35°, 16'
80	61°, 33'	38, 27
70	68, 46	41, 14
60	76, 33	43, 27
50	85, 12	44, 48
45	90, 0	45, 0
40	95, 15	44, 45
30	107, 38	42, 22
20	124, 13	35, 47
10	147, 59	22, 1

vbi eiusmodi malorum constitutionem assumimus vt esset

$$c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

§. 907. Ex hac tabula patet in cursu obliquo, si-
quidem ventus omnia vela per totam superficiem strin-
gat, maximum incidentiae angulum esse 45°; qui locum
habet si directio venti ad naus directionem AB fuerit
normalis, atque vela ad angulum semirectum ADe ex-
tendantur. Hoc ergo casu vis venti in vela erit maxima,
nausque celerrime promouebitur, nisi quatenus eius mo-
tus ob cursus obliquitatem retardatur. Eo maius autem
hoc erit lucrum quo pluribus malis naus fuerit instructa;
atque adeo fieri potest vt naus pluribus malis instructa
a vento dimidio seu ad AB normali celerius propellatur,
quam a vento pleno, qui a puppi spirat; quia hic tan-
tum in vela postrema incurrit, ille autem ventus lateralis
omnia

omnia prorsus vela idque sub maximo angulo 45° ; quem obliquitas permittit; perfringit, cuius quidem venti com-
modum nautis satis est notum.

Tab. XXVI.
fig. 6.

§. 908. Ad haec explicanda incipiamus a cursu maxi-
me obliquo, quo vela ita disponi solent, ut cum axe
navis AB angulum EDA , seu $edA = 22^\circ, 30'$ consti-
tuant. Plerumque enim hunc angulum minorem accipere
non licet, quia obliquitas hincque deviatio navis fieret tan-
ta, ut cursus potius impediretur quam promoveretur. Per
praecedentem ergo regulam ista velorum dispositio maxi-
me erit accommodata ad venti directionem VEf , quae
cum axe AB angulum faciat $BOV = 119^\circ, 32'$, seu
 $VOA = 60^\circ, 28'$, eritque angulus incidentiae $Vfe =$
 $37^\circ, 58'$. Vicissim autem si angulus VOA fuerit $60^\circ,$
 $28'$, a structura navis maxime pendet utrum expediat
angulum $edA = 22^\circ, 30'$ relinqui an maiorem accipi;
si enim maior accipiatur, angulus incidentiae quidem Vfe
ac proinde vis propellens diminueretur quidem contra au-
tem obliquitas cursus fiet minor, quo ipso prius detri-
mentum compensari posset. Minor autem angulus edA
statui prorsus nequit, quia tum et obliquitas augetur,
et ventis non amplius totam velorum superficiem infla-
ret.

§. 909. Si ergo ventus magis oblique in vela hoc
modo extensa incidat, quoniam velorum obliquitatem au-
gere non licet, venti quaedam portio peribit; et cum
insuper angulus incidentiae diminuatur, vis propellens sine
dubio vehementer diminuetur; saepe numero autem vr-
gente necessitate, quando ventus cursui est contrarius,
angulus Vfe ad $22^\circ, 30'$ diminui solet. Quo igitur ista
vis

vis propellentis diminutio compenſetur, velorum latitudo commode augeri poterit, vtrinque appendices adiungendo. Quanquam enim latitudo velorum EF, *ef* latitudinem navis ſuperat, tamen in iſto ſitu obliquo tota intra parietes navis cadent, ex quo maior latitudo tractationem non impedit; hoc itaque modo venti portio alias peritura intercipiatur, atque ad uſum impendetur. Poſſunt etiam in idoneis navis locis noua vela extendi, quo magis vis a vento excipienda augeatur: hocque omnino fieri ſolet ſi ventus ſpiret lenior, ſin autem fuerit vehemens eiusmodi ſubſidia omitti debent, ne navis a tanta vi obliqua nimiam patiatur inclinationem.

§. 910. Quamdiu ergo venti directio ita eſt comparata ut angulus VOA non fiat maior quam 60° , $28'$, vela in ſtatu deſcripto maxime obliquo ſervare conueniet, quando vero angulus VOA excedet 60° , $28'$ tum iſta velorum diſpoſitio non commode retineri poterit. Quamvis enim angulus incidentiæ augeatur, tamen ventus non amplius totam velorum ſuperficiem perſtringet, ex quo vis venti eo magis diminuetur, quo plures mali in nauis fuerint conſtituti. Tum vero ipſa velorum obliquitas in cauſa eſt, quod celeritas navis progreſſiua non fiat tanta, quanta ab eodem vento per aptiorem velorum diſpoſitionem impetrari poſſet. Quare ſi angulus VOA fiat maior quam 60° , $28'$ conueniet ſimul vela ita diſponi, ut angulus EDA fiat maior; quo tota velorum ſuperficies a vento inſletur; hinc enim non ſolum vis a vento excepta fiet maior, ſed quia media directio quæ ad velorum ſuperficiem eſt normalis, propius ad nauis directionem BA adducitur, ipſa nauis celeritas intendetur, atque deviatio diminuetur.

§. 911. Perspicitur hinc etiam non statim atque angulus VOA fiat maior quam 60° , $28'$ vela in priorem obliquitatis situm constitui conuenire, in quo angulus ADE fit 45° , sed perpetuo dari quendam angulum, ex quo naus maximam obtineat velocitatem. Quamobrem, si commoditatis gratia duae tantum obliquitatis velorum dispositiones admittantur, plerumque naui non tantus motus inducetur, quantus ab eodem vento, si vela aliter disponentur, produci possët. Hinc expertus atque attentus gubernator, dum a vulgari velorum dispositione recedit, factis notabiliter cursum naus accelerare poterit. Nam si vel experientia vel theoria edoctus animaduertat, cum vela in altero obliquitatis situ iam fuerint collocata, cursum naus celeriores esse futurum, si obliquitas velorum aliquantum vel diminuatur vel augeatur, iubebit velorum extremitates E et F in vna parte magis adduci, in altera remitti, quo magis apta obliquitas obtineatur. Atque hoc modo non sine admiratione in longinquis itineribus obseruari solet, celeritatem naus plurimum pendere a dexteritate gubernatorum, ita vt naus sub directione vnius celerius promoueatur, quam sub directione reliquorum, etiam si omnes circumstantiae prorsus eadem videantur.

§. 912. Quod igitur ad numerum malorum attinet, ex dictis patet nullam esse rationem, quae mutationem suadeat, nisi forte, cum naus aduersus ventum annitur, videantur plures mali vim propellentem augere. Quoniam autem per appendices iste defectus compensari potest, atque in cursu tantopere obliquo vis propellens nimis magna naui periculum minatur, etiam haec ratio numerum malorum multiplicandi cessat, quoniam si ventus contrarius
parum-

parumper fortis existit, ne quidem his velis, quae mali suppeditant, vti licet. Praeterea vero rationi minime consentaneum foret nauem vno pluribusue malis onerari, quae nunquam vsui essent, nisi in cursu aduersus ventum instituido, quando simul ventus lenissime spiraret. Seruato ergo eo malorum numero, quem in capite praecedente pro cursu directo definiuimus, iisdem in omni cursu obliquo satis vtiliter frui licebit, dummodo vela ita disponantur, vt nauis motum celerrimum consequatur. Quo autem velorum dispositio maxime idonea inueniri possit, ipsum nauis motum, qui a quouis vento et velorum situ quolibet producitur, inuestigari oportet, vt hinc per methodum maximorum et minimorum velorum situs aptissimus quouis casu assignari possit.

§. 913. Quia in situ velorum obliquo, nauis non cursu directo sed obliquo fertur, ex sola prorae figura eiusque resistentia celeritas nauis definiri nequit, sed etiam deuiationem cursus ab directo nosse, et quantam nauis in hoc cursu obliquo patiatur resistentiam, cognitum esse oportet. Pendet autem ista inquisitio tantopere ab vniuersa nauis figura, vt nisi haec exactissime sit cognita, atque simul ad calculum reuocari queat, nihil accurate definiri possit, quemadmodum in libro superiori fufus est ostensum. Interim tamen, quia in praesenti negotio scientiam exquisitissimam non requirimus, atque eius modi cognitio, quae a veritate saltem non nimis abhorret, sufficiens censetur, a veritate aliquantum discedere licebit, vt calculus non solum tractabilior reddatur, sed etiam commode ad vsum transferri possit. Hunc in finem neglectis reliquis momentis omnibus, quae a figura nauis pendent, tantum duplicem nauis resistentiam

tiam in computum trahi conueniet, alteram quam nauis in cursu directo patitur, et alteram quam pateretur, si ad latus in directione normali seu secundum axem longitudinalem moueretur.

Tab. XXVII. § 914. Sit igitur ff resistentia nauis absoluta, si cursu directo secundum axem longitudinem promoueatur, et sit hb resistentia nauis lateralis absoluta, si secundum axem longitudinalem procederet; utroque scilicet casu resistentia absoluta indicatur per superficiem planam, quae in aqua directe pari celeritate, qua nauis progreditur, mota etiam eandem, quam nauis resistentiam patitur. Non igitur in determinatione motus nauis cuiuscunque vehementer a veritate aberrabimus, si loco verae nauis mente substituamus parallelepipedum rectangulum $aa\beta b$, cuius facies anterior aa sit $=ff$, et facies lateralis $a\beta$ seu $ab = hb$; ita ut huius nauis fictae prora sit aa , puppis $b\beta$, axis longitudinalis AB , et latitudinalis EF . Si enim ista nauis ficta cursu directo feratur eandem patietur resistentiam, quam nauis vera, eademque insuper erit utriusque nauis resistentia, si utraque ad latus secundum directionem CE vel CF progrediatur; unde intelligitur discrimen sensibile intercedere non posse, si motus fiat oblique secundum directionem quamcunque CM . Quantum autem futurus sit dissensus ex libro superiori colligi poterit, unde quidem is vix sensibilis deprehendetur.

§ 915 Substituta igitur hac nauis ficta in locum verae, sit VC directio venti, eiusque celeritas debita altitudini e ; vela autem ita sint disposita secundum eCf ut angulus eCA sit $=p$; et tota velorum superficies sit $=gg$. Sit porro angulus $VCe = q$, sub quo ventus in vela incidit; erit ergo si ventus totam velorum superficiem

ciem perstringat, vis venti aequalis ponderi voluminis aerei $= cgg(\sin. q)^3$, seu aequalis ponderi voluminis aquei $= \frac{1}{1000} cgg(\sin. q)^3$; huiusque vis directio erit recta CP ad velorum superficiem ef normalis, ita vt sit angulus $ACP = 90^\circ - ACE = 90^\circ - p$. Nunc dum naus ista vi secundum directionem CP impellitur, quaeritur directio et celeritas, qua naus fit progressura. Sit CM directio naus quaesita, et angulus $ACM = s$, qui erit deuiatio cursus, seu cursus obliquitas; celeritas autem naus, qua in hac directione progredietur debita fit altitudini v , ita vt ipsa celeritas naus futura sit vt Vv .

§. 916. Quoniam ponitur angulus $ACM = s$ erit vis quam facies anterior $aa = ff$ ab aqua perpetietur $= ffv(\cos. s)^2$, expressa in volumine aquae, huiusque vis directio erit recta AB, vis autem quam facies lateralis $a\beta$ sustinebit erit $= hbv(\sin. s)^2$ cuius directio erit in recta FE. Dum igitur naus secundum directionem CP vi $= \frac{1}{1000} cgg(\sin. q)^3$ vrgetur, a resistentia duplicem patietur vim, alteram $= ffv(\cos. s)^2$ in directione CB, alteram $= hbv(\sin. s)^2$ in directione CE. Vis ergo his binis ex resistentia aquae ortis aequiualens, quae fit CR, primum ratione directionis vi CP contraria, tum vero eidem aequalis esse debet. Quia vero CR est media directio virium CB et CE, erit tang $BCR = \frac{hbv(\sin. s)^2}{ffv(\cos. s)^2} = \frac{hb}{ff} (\text{tang. } s)^2$. Quare cum angulus BCR aequalis esse debeat angulo $ACP = 90 - p$ erit tang. $BCR = \cot p = \frac{hb}{ff} (\text{tang. } s)^2$; vnde statim reperitur deuiatio naus seu angulus $ACM = s$ ex aequatione tang. $s = \sqrt{\frac{ff}{hb}} \cot p = \sqrt{\frac{ff}{hb}} \cotang. ACE$. Ex velorum ergo dispositione ef , et vtraque naus resistentia absoluta ff et hb reperitur deuiatio naus seu declinatio a cursu directo ACM.

§. 917. Cum porro fit $BCR = 90 - p$, erit vis aequivalens $CR = \frac{vi \ CB}{\text{cof.} BCR} = \frac{ffv(\text{cof.} s)^2}{\sin. p}$. Quia vero est tang. $s = \sqrt{\frac{ff}{bb}} \cot p$, erit sec. $s = \sqrt{1 + \frac{ff}{bb} \cot^2 p}$ et cof. $s = 1 : \sqrt{1 + \frac{ff}{bb} \cot^2 p}$, vnde fit vis $CR = \frac{ff v}{\sin. p + \frac{ff}{bb} \cot. p}$; quae cum aequalis esse debeat vi propellenti $\frac{1}{800} cgg (\sin. q)^2$, fiet $v = \frac{1}{800} cgg (\frac{\sin. p}{ff} + \frac{\cot. p}{bb}) (\sin. q)^2$, ex qua aequatione celeritas navis innotescit. Ad quam commodius exprimendam ducantur diagonales $a\beta$ et $b\alpha$, erit angulorum bCB , aCA tangens $= \frac{ff}{bb}$; sinus $= \frac{ff}{\sqrt{(f^2 + b^4)}}$, et cosinus $= \frac{bb}{\sqrt{(f^2 + b^4)}}$. Sit angulus $ACa = BCb = e$, erit $v = \frac{1}{800} (\text{cof.} e \sin. p + \sin. e \text{cof.} p) (\sin. q)^2 \frac{cgg \sqrt{(f^2 + b^4)}}{ff bb} = \frac{1}{800} \sin. (p + e) (\sin. q)^2 \cdot \frac{cgg}{bb \sin. e} = \frac{1}{800} \sin. (p + e) (\sin. q)^2 \cdot \frac{cgg}{ff \text{cof.} e}$. Erit vero $p + e = \text{ang.} eCa$, et $q = \text{ang.} VCe$, vnde fiet primo tang. $ACM = \sqrt{\text{tang.} ACa \cdot \text{cotang.} ACe}$ et $v = \frac{cgg}{800 ff \text{cof.} ACa} \sin. eCa (\sin. VCe)^2$.

§. 918. Possunt hinc plura problemata excogitari et resolui, quae ad praxin non paruum subsidium afferunt. Sic si ponamus directionem navis AB vna cum directione venti VC esse datam aptissima velorum dispositio determinari poterit, qua navis celerrime promoueatur. Quia nimirum directio navis datur, simul positio rectae Ca dabitur, ponatur ergo angulus datus $VCa = a$ et angulus $VCe = q$, erit ang. $eCa = a - q$. Hinc cum fit $v = \frac{cgg}{800 ff \text{cof.} ACa} \sin. (a - q) (\sin. q)^2$, maximum esse debet haec expressio $\sin. (a - q) (\sin. q)^2$, vnde fit cof. $(a - q) (\sin. q)^2 = 2 \sin. (a - q) \sin. q \text{cof.} q$, et per cof. $(a - q) \sin. q \text{cof.} q$ vtrinque diuidendo habebitur tang. $q = 2 \text{tang.} (a - q)$.

Quam-

Quamobrem angulum datum $VC\alpha$ ita in duas partes per rectam Ce secari oportet, vt anguli VCe tangens duplo fit maior quam tangens anguli $eC\alpha$. Ad angulum ergo $VCe = q$ inueniendum fit tang. $a = \alpha$ et tang. $q = \theta$ erit $\theta = \frac{2\alpha - 2\theta}{1 + \alpha\theta}$ seu $3\theta + \alpha\theta\theta = 2\alpha$, vnde $\theta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 3\alpha\alpha}}{2\alpha}$. Vel si ponatur sin. $\alpha CV = m$, et cof. $\alpha CV = n$ erit $\theta = \frac{-3n + \sqrt{9nn + 3mm}}{2m}$ seu $\theta = \text{tang } q = \frac{-3n + \sqrt{9nn + 3mm}}{2m} = \frac{\sqrt{9 - mm} - \sqrt{9 - 6mm}}{2m}$.

§. 919. Semper ergo maior esse debet angulus VCe quam angulus $eC\alpha$, quia illius tangens aequatur duplae tangenti huius, nisi casu quo venti directio VC cadit in Cb , hic enim positio velorum ef ad lineam $bC\alpha$ erit normalis. Quando autem angulus $VC\alpha$ fit valde acutus, tum angulus $eC\alpha$ duplo minor erit angulo VCe hoc ergo casu angulum $VC\alpha$ in tres partes aequales secari oportebit, vnamque partem angulo αCe tribui. Sin angulus $VC\alpha$ fiat rectus, erit angulus $eC\alpha = 35^\circ, 15'$, et ang. $VCe = 54^\circ, 45'$. Quoniam vero deuiatio nauis seu angulus ACM ita definitur, posito $AC\alpha = e$ vt fit tang. $ACM = \sqrt{\text{tang. } e \cot(a - q - e)}$ ob $\cot(a - q - e) = \frac{1 + \text{tang.}(a - q)\text{tang. } e}{\text{tang.}(a - q) - \text{tang. } e} = \frac{2 + \text{tang. } q \cdot \text{tang. } e}{\text{tang. } q - 2\text{tang. } e}$, erit tang. $ACM = \sqrt{\frac{e \text{ tang. } e + \text{tang. } q (\text{tang. } e)^2}{\text{tang. } q - 2\text{tang. } e}}$. Hinc declinatio nauis euanesct, si fiat tang. $q = -2 \cdot \cot. e$; si exempli gratia fit $e = AC\alpha = 5^\circ$ erit $q = VCe = 92^\circ, 31'$, et $eC\alpha = 95^\circ$, quo ergo casu habetur cursus directus.

§. 920. Ceterum ex formulis quas (917) tam pro declinatione nauis ACM quam pro celeritate nauis, quae a dato vento et data velorum dispositione oritur, inuenimus, faciles regulae deriuari possunt ad motum nauis determinandum. Cum enim sit tang. $ACM = \sqrt{\text{tang. } AC\alpha \cdot \cot$

$\cot A C e$, quia angulus $e C P$ est rectus erit tang. $A C M$
 $\equiv \sqrt{\text{tang. } A C \alpha. \text{ tang. } A C P}$. Producta ergo $a a$ donec
 rectas $C M$ et $C P$ fecerit in μ et P , et sumta $A C$ pro sinu toto,
 erit $A \mu \equiv \text{tang. } A C M$; $A \alpha \equiv \text{tang. } A C \alpha$; et $A P \equiv \text{tang.}$
 $A C P$; hincque fit $A \mu \equiv \sqrt{A \alpha. A p}$; ex quo erit $A \mu$
 media proportionalis inter $A \alpha$ et $A P$. Sumta ergo $A \mu$
 media proportionali inter $A \alpha$ et $A P$ recta $C \mu M$ dabit
 directionem in qua naus promouebitur. Quoniam deinde
 est $a \alpha \equiv ff$, si ex a in $b \alpha$ demittatur perpendicularum $a \gamma$,
 erit $a \gamma \equiv ff \cos. A C \alpha \equiv ff \cos. e$. Hinc ergo
 erit $v \equiv \frac{c g g}{800 a \gamma} \sin. e C \alpha (\sin. V C e)^2$. Sumatur ergo $C \delta$,
 quae se habeat ad $a \alpha$ vt superficies velorum $g g$ ad resisten-
 tiam prorae absolutam ff , erit $v \equiv \frac{c. C \delta}{800. a \gamma} \sin. e C \alpha (\sin.$
 $V C e)^2$; vnde erit celeritas venti appars $V c$ ad cele-
 ritatem naus $V v$ vt 1 ad $\sin. V C e. \sqrt{\frac{c \delta}{800 a \gamma}} \sin. e C \alpha$.

§. 921. Cum ergo fit celeritas naus $V v \equiv \sin. V C e$
 $\sqrt{\frac{c. C \delta}{800 a \gamma}} \sin. e C \alpha$, erit celeritas naus perpetuo in ratione
 composita ex simplici celeritatis venti $V c$, et sinus angu-
 li incidentiae $V C e$, atque ex sub duplicata ratione superfi-
 ciei velorum $C \delta$ et sinus anguli $e C \alpha$. Manente ergo ce-
 leritate venti et superficie velorum eadem naus celerrime
 promouebitur, si vterque angulus $V C e$ et $e C \alpha$
 fuerit rectus; quo itaque naui celerrimus motus imprima-
 tur, naus ita est dirigenda vt directio venti in diagona-
 lem $b C$ incidat, atque vela ita sunt disponenda, vt $e f$
 fit ad eandem diagonalem $b \alpha$ normalis. Eiusmodi ergo cur-
 sum institui conueniet, si hostem nos a tergo perfequen-
 tem effugere velimus. Quoniam vero si naus pluribus malis est
 instructa, ventus non omnia vela in hoc cursu perfringere valet;

his

his casibus expediet cursum magis obliquum eligere, quo maior velorum portio vel integra superficies a vento infletur, in quo negotio pariter maximum definire licebit.

§. 922. Quando autem cursus naus versus determinatam plagam dirigi debet, parum refert celerrime processisse, nisi simul naus in proposita directione promoveatur. Quamobrem hic quaestio in praxi vtilissima nascitur, quemadmodum pro data venti directione non solum vela disponi, sed etiam ipsam nauem dirigi oporteat, ut in data directione CM celerrime progrediatur. Sit igitur VC directio venti, et CM cursus a naui describendus; ac ponatur angulus VCM = a. Sit autem ACB positio naus aptissima, quae quaeritur, ac ponatur, angulus ACM = s; qui designat declinationem cursus, erit ob ang. ACA = e, angulus αCM = s - e; et ang. VCA = a - s. Deinde sit ef velorum dispositio maxime idonea ponaturque angulus eCA = p; et angulus incidentiae VCe = q; erit p + q = a - s. Primum ergo ex formula pro deviatione inuenta erit tang. s = V tang. e cot. p = V $\frac{\text{tang. } e}{\text{tang. } p}$; ideoque tang. p = $\frac{\text{tang. } e}{(\text{tang. } s)^2}$, vnde ex angulo ACM statim inuenitur velorum dispositio seu angulus eCA = p.

§. 923. Positis porro celeritate venti = Vc et celeritate naus = Vv, erit v = $\frac{cgg}{s \text{ o o } f f \text{ c o f. } e}$ fin. eCa (sin. VCe)². Est vero eCa = p + e; et VCe = q = a - s - p; vnde erit v = $\frac{cgg}{s \text{ o o } f f \text{ c o f. } e}$ fin. (e + p)(sin. q)²; ac propterea maximum effici debet fin. (e + p)(sin. q)², ex quo nascitur ista aequatio dp cof. (e + p)(sin. q)² + 2dq sin. (e + p) sin q cof. q = 0, seu 0 = dp tang. q + 2dq tang. (e + p). Cum vero fit tang. p = $\frac{\text{tang. } e}{(\text{tang. } s)^2}$ erit dp = $\frac{-2ds \text{ tang. } e (\text{cof. } p)^2}{\text{tang. } s (\text{sin. } s)^2}$;
Pars II. S s s et

et ob $q = a - s - p$, erit $d q = -d s + \frac{2ds \operatorname{tang.} e (\operatorname{cof.} p)^2}{\operatorname{tang.} s (\sin. s)^2}$, quibus valoribus substitutis et per $d s$ diuiso habebitur $\frac{2 \operatorname{tang.} e (\operatorname{cof.} p)^2 \operatorname{tang.} q}{\operatorname{tang.} s (\sin. s)^2} = \frac{4 \operatorname{tang.} e (\operatorname{cof.} p)^2 \operatorname{tang.} (e+p)}{\operatorname{tang.} s (\sin. s)^2} - 2 \operatorname{tang.} (e+p)$. Seu $\operatorname{tang} e (\operatorname{cof.} p)^2 \operatorname{tang.} q + \operatorname{tang.} s (\sin. s)^2 \operatorname{tang.} (e+p) = 2 \operatorname{tang} e (\operatorname{cof.} p)^2 \operatorname{tang} (e+p)$.

§. 924. Sit $\operatorname{tang.} e = \delta$; $\operatorname{tang.} p = x$; et $\operatorname{tang.} a = \alpha$; erit $\operatorname{tang.} s = \sqrt{\frac{\delta}{x}}$; et $\sin. s = \sqrt{\frac{\delta}{\delta+x}}$; deinde ob $q = a - s - p$ erit $\operatorname{tang.} q = \frac{\operatorname{tang.} (a-p) - \operatorname{tang.} s}{1 + \operatorname{tang.} (a-p) \operatorname{tang.} s} = \frac{\alpha - x - (1+x) \operatorname{tang.} s}{1 + \alpha x + (\alpha-x) \operatorname{tang.} s} = \frac{(\alpha-x) \sqrt{x} - (1+x) \sqrt{\delta}}{(1+\alpha x) \sqrt{x} + (\alpha-x) \sqrt{\delta}}$; et $\operatorname{tang.} (e+p) = \frac{\delta+x}{1-\delta x}$; quibus substitutis ob $\operatorname{cof.} p = \frac{1}{\sqrt{1+xx}}$ et $\frac{1}{(\operatorname{cof.} p)^2} = 1+xx$, erit $\frac{(\alpha-x) \sqrt{x} - (1+x) \sqrt{\delta}}{(1+\alpha x) \sqrt{x} + (\alpha-x) \sqrt{\delta}} + \frac{(1+xx) \sqrt{\delta}}{(1-\delta x) \sqrt{x}} = \frac{2(\delta+x)}{1-\delta x}$. Si haec aequatio a fractionibus liberetur diuisibilis erit per $\delta+x$, atque diuisione peracta prodibit $\alpha - 3x - 2\alpha xx = (2\alpha - 3x - \alpha xx) \sqrt{\delta x}$. Haec autem aequatio euoluta fit quinque dimensionum ita vt hinc in genere nihil ad nauis velorumue dispositionem concludi queat. Quoniam vero angulus e plerumque valde est exiguus, si eum prorsus euanescentem ponamus vt fit $\delta = 0$, erit $\alpha - 3x = 2\alpha xx$ hincque $x = \frac{-1 + \sqrt{(1+3\alpha\alpha)}}{4\alpha}$, quae quidem solutio ob deuiationem euanescentem congruit cum supra (919) inuenta.

§. 925. Quoniam ergo angulus e non pro euanescente haberi potest, tamen quia est valde paruus, iste pro x inuentus valor non multum a vero aberrabit. Sit itaque verus valor $x = \frac{-1 + \sqrt{(1+3\alpha\alpha)}}{4\alpha} + z \sqrt{\delta}$ fiet $-3z + \frac{(3-\sqrt{(1+3\alpha\alpha)})}{4\alpha} z = -z \sqrt{(9+8\alpha\alpha)} = \frac{12\alpha z + 0 - \sqrt{(1+3\alpha\alpha)}}{4\alpha}$ hincque $z = \frac{-5 - 12\alpha\alpha + 3\sqrt{(1+3\alpha\alpha)}}{8\alpha\sqrt{(9+8\alpha\alpha)}} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{(1+3\alpha\alpha)}}{4\alpha}}$, Vel si ponatur $\frac{-1 + \sqrt{(1+3\alpha\alpha)}}{4\alpha} = \xi$ vt fit $\alpha = \frac{16}{1-2\xi\xi}$ re-

perie-

perietur $x = \frac{c - c^3}{1 + c^6} \sqrt{c}$, vnde fit $x = c - \frac{c(1 + c^6)\sqrt{c\delta}}{1 + c^6}$, qui valor facile loco veri substituetur. Hoc igitur modo definitur $x = \text{tang. } p$ ideoque velorum dispositio in naui seu angulus eCA : quo cognito statim prodibit angulus $ACM = s$, cum fit $\text{tang. } s = \sqrt{\frac{\delta}{x}}$, vnde directio nauis AB innotescit; sicque tam nauis ita dirigetur, atque vela ita disponentur, vt nauis secundum directionem CM celerrime promoueat.

§ 926. Quemadmodum autem in quouis casu tam nauis dirigi quam vela disponi debeant, commodissime ex tabella perspicietur, in qua pro pluribus diuersis angulis VCM et nauis et velorum dispositio maxime idonea exhibeatur. Ad eiusmodi vero tabellam conficiendam valor x pro cognito assumi ex eoque valor ipsius α definiri poterit, id quod facile praestatur ex hac aequatione $\alpha = \frac{x(-\sqrt{\delta}x)}{1 - 2\sqrt{\delta}x - 2x^2 + x^2\sqrt{\delta}x}$. Oportet autem pro δ valorem convenientem assumi, quia igitur est $\delta = \text{tang. } e = \frac{ff}{hb}$, ac resistentia lateralis hb multum superat resistentiam prorae ff , ponamus $hb = 9ff$; quae hypothesis in plerisque nauibus non multum a veritate abhorrebit. Cum enim naues quadruplo soleant esse longiores quam latae, hinc iam foret $hb = 4ff$, si formam heberent parallelepipedo, at per prorae elongationem eius resistentia circiter duplo redditur minor, vnde fere fit $hb = 9ff$ et $\delta = \frac{1}{9}$, vnde ang. $AC\alpha = 6^\circ, 21'$, hancobrem habebitur $\alpha = \text{tang. } VCM = \frac{x(-\sqrt{x})}{3 - 2\sqrt{x} - 6x^2 + x^2\sqrt{x}}$ existente $\text{tang. } eCA = x$; et $\text{tang. } s = \text{tang. } ACM = \frac{1}{3\sqrt{x}}$ et $VCe = VCM - ACM - eCA$.

§. 927. At vero tentanti patebit non licere pro x nimis paruos valores accipi, quia alias angulus ACM fiet

ret maior quam totus angulus VCM , hisque adeo casibus navis retro in directione MC moueretur contra institutum. Si enim ponatur angulus $eCA = 10^\circ$, prodibit $VCM = 34^\circ, 29'$ et $ACM = 38^\circ, 27'$. Quo igitur casus ad propositum pertinentes obtineamus, manifestum est motum, qualem desideramus, oriri non posse, nisi sit angulus VCM maior quam $eCM = p + s$; quare debet esse $\alpha > \frac{1+x\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-x}$, substituto autem loco α valore invento, sublatisque fractionibus, diuidi poterit per $1+xx$, atque ex quoto cognoscetur esse debere $2\sqrt{x} + 18x\sqrt{x} > 3 + 3xx$. Hinc per approximationem reperitur esse debere $x > 0, 24559$; ideoque necesse est vt angulus eCA maior statuatur quam $13^\circ, 48'$, vnde ab hoc angulo ascendendo valores pro eCA accipi debebunt, sumto enim $eCA = 13^\circ, 48'$ navis nullum motum in directione proposita accipere poterit sed quiescet.

Tab. XXVII.
fig. 2.

§. 928. En igitur eiusmodi tabellam, quae pro variis anguli VCM valoribus exhibet angulos eCA , VCA , ACM , $eC\alpha$, et VCe , vt navis celerrime in directione CM promoueat.

V C M	e C A	V C A	A C M	e C c	V C e
47°, 44'	13°, 48'	13°, 48'	33°, 56'	20°, 9'	0°, 0'
51, 47	15, 0	19, 0	32, 47	21, 21	4, 0
67, 36	20, 0	38, 41	28, 55	26, 21	18, 41
81, 37	25, 0	55, 36	26, 1	31, 21	30, 36
93, 56	30, 0	70, 15	23, 41	36, 21	40, 15
104, 51	35, 0	83, 8	21, 43	41, 21	48, 8
114, 41	40, 0	94, 41	20, 0	46, 21	54, 41
123, 41	45, 0	105, 20	18, 21	51, 21	50, 20
132, 6	50, 0	115, 7	16, 59	56, 21	55, 7
139, 55	55, 0	124, 20	15, 35	61, 21	59, 20
147, 24	60, 0	133, 12	14, 12	66, 21	73, 12
154, 38	65, 0	141, 49	12, 49	71, 21	76, 49
161, 31	70, 0	150, 9	11, 22	76, 21	80, 9
168, 16	75, 0	158, 29	9, 47	81, 21	83, 29
174, 55	80, 0	166, 57	7, 58	86, 21	86, 57
182, 9	85, 0	176, 31	5, 38	91, 21	89, 31
180, 0	90, 0	180, 0	0, 0	96, 21	90, 0

§. 929. Ex hoc ergo tabula primum patet, nisi angulus VCM, quem directio venti VC cum via propofita CM constituit maior fit quam 47°, 44', hunc cursum omnino teneri non posse. Pendet autem iste angulus 47°, 44' ab angulo ACa quem 6°, 21', assumimus; qui si minor maiorue esset assumtus, etiam ultimus seu minimus angulus VCM minor maiorue prodisset. Sin autem resistentia lateralis *bb* infinita esset respectu *ff*, ideoque angulus ACa evanesceret, tum quantusvis exiguus foret angulus VCM tamen cursum institui liceret. Pendet ergo haec diiudicatio cursus convenientissimi a ratione inter

resistentiam prorae ff et resistentiam lateralem hb , quae idcirco ante omnia cognita esse debet, id quod per unicam observationem deviationis navis facile praestabitur. In cursu enim obliquo notetur primum angulus eCA qui fit $= p$; tum vero obseruetur deviatio navis seu angulus ACM qui fit $= s$; his cognitis erit tang. $AC\alpha = \text{tang. } p (\text{tang } s)^2$. Quodsi ergo angulus $AC\alpha$ maior minorue prodeat quam $6^\circ, 21'$, alia tabula constitui debebit, ex qua cursus navis aptissimus determinetur.

§. 930. Hunc in finem adiungam hic tabulam, in qua angulus $AC\alpha$ infinite parvus assumitur, quo facilius ex collatione huius cum praecedente casus medii, quibus angulus $AC\alpha$ minor deprehenditur quam $6^\circ, 21'$, dignosci queant.

V	C	M	e	C	A	V	C	A	A	C	M	e	C	e	V	C	e
14°	49'		5°	0'		14°	49'		0°	0'		5°	0'		9°	49'	
29	25		10	0		29	25		0	0		10	0		19	25	
44	11		15	0		44	11		0	0		15	0		28	11	
56	3		20	0		56	3		0	0		20	0		36	3	
68	0		25	0		68	0		0	0		25	0		43	0	
79	6		30	0		79	6		0	0		30	0		49	6	
89	28		35	0		89	28		0	0		35	0		54	28	
99	13		40	0		99	13		0	0		40	0		59	13	
108	26		45	0		108	26		0	0		45	0		63	26	
117	15		50	0		117	15		0	0		50	0		67	15	
125	42		55	0		125	42		0	0		55	0		70	42	
133	54		60	0		133	54		0	0		60	0		73	54	
141	53		65	0		141	53		0	0		65	0		76	53	
149	41		70	0		149	41		0	0		70	0		79	41	
157	22		75	0		157	22		0	0		75	0		82	22	
164	58		80	0		164	58		0	0		80	0		84	58	
172	28		85	0		172	28		0	0		85	0		87	28	
180	0		90	0		180	0		0	0		90	0		90	0	

§. 931. Ex his ergo duabus tabulis coniunctis, si angulus ACα minor deprehendatur quam 6°, 21', pro quovis angulo VCM proposito satis exacte ad praxin tam navis directio quam velorum dispositio definiri poterit, ut navis in data via celerrime progrediatur. Sit enim angulus ACα = 3°, 10', medium scilicet teneat inter 6°, 21', et 0°, 0'; atque propositus sit angulus VCM = 90°. Pro velorum dispositione seu angulo eCA tabula prior dat 28°, 24', posterior vero dat 35°, 16', inter quos valores medius 31°, 50' dabit valorem aptissimum pro

pro angulo eCA . Hinc erit ex regula generali tang.

$$ACM = \sqrt{\frac{\text{tang. } 3^{\circ}, 10'}{\text{tang. } 31^{\circ}, 50'}} \text{, ideoque declinatio naus seu}$$

angulus $ACM = 16^{\circ}, 37'$. Quare ex his, si in naui quapiam fuerit angulus $AC\alpha = 3^{\circ}, 10'$, atque angulus fuerit propofitus $VCM = 90^{\circ}$, fequenti modo naus dirigi, velaque disponi conueniet, vt fit $eCA = 31^{\circ}, 50'$; $VCA = 73^{\circ}, 23'$, $ACM = 16^{\circ}, 37'$ et $eC\alpha = 35^{\circ}, 0'$ et $VCe = 41^{\circ}, 33'$.

§. 932. Quemadmodum autem hic, dum posuimus $\delta = \text{tang. } AC\alpha = \frac{1}{9}$, inuenimus cursum teneri non posse nisi fit angulus VCM maior quam $47^{\circ}, 44'$, seu angulus eCA maior quam $13^{\circ}, 48'$; simili modo quicumque alius valor ipsi δ tribuatur reperiri poterunt limites pro angulis VCM et eCA , quos hi anguli superare debent. Cum enim esse debeat angulus VCM maior quam $eCM = p + s$, si hi duo anguli aequales ponantur, prodibunt limites illi desiderati. At quia est tang. $p = x$ et tang. $s = \sqrt{\frac{\delta}{x}}$ erit tang. $(p + s) = \frac{\sqrt{\delta} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}}$, vnde fit tang. $VCM = \alpha = \frac{3x(1 - \sqrt{\delta}x)}{1 - 2\sqrt{\delta}x - 2xx + xx\sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{\delta} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}}$. Quae aequatio si a fractionibus liberetur, tumque per $1 + xx$ diuidatur, orietur $\sqrt{\delta} - 2\delta\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + xx\sqrt{\delta} = 0$ vnde cum δ sit quantitas valde parua, per approximationem oritur $x = \sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4}\sqrt[3]{\frac{\delta\delta}{16}} + \frac{\delta\delta}{8}\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}}$. Dabit autem x tangentem anguli eCA et $\sqrt{\frac{\delta}{x}}$ tangentem anguli ACM horumque angulorum summa praebebit angulum minimum VCM , erit vero $\sqrt{\frac{\delta}{x}} = 2\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} + \frac{\delta}{2} + \delta\sqrt[3]{\frac{\delta\delta}{16}} + \frac{\delta\delta}{3}\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} = \text{tang. } ACM$.

§. 933. Quoties igitur euenit, vt angulus VCM non excedat limitem sic inuentum, cursus propositus teneri non potest; et cum neque quiescere neque regredi conueniat, eiusmodi cursum institui oportet, quem tenentes ad propositam metam etiamsi non directe accurramus, tamen appropinquemus. Maxime autem hoc subsidium vsu venit, quando ventus directe ex eadem regione in quam tendimus, venit. Quamuis enim plane impossibile sit contra ventum progredi, tamen ita cursum instituere licet, vt naus in recta CM, quae cum VM angulum acutum faciat, promoueatur, sicque adeo plagam versus, vnde ventus venit, appellatur. Praecipuum autem negotium in hoc versatur, vt, cum infinitis modis aduersus ventum luctari liceat, is imprimis cursus definiatur atque eligatur, quo naus eodem tempore plurimum versus plagam, vnde ventus venit, promoueatur.

§. 934. Si ventus veniat ex plaga VC, ponamus ACB eam esse naus directionem, et eCf velorum dispositionem maxime idoneam, vt ex itinere maximum lucrum contra ventum obtineatur. Sit angulus VCe = q; eCA = p, et angulus ex indole naus cognitus ACα = e; tum vero ponatur angulus ACM seu declinatio naus a cursu directo = s; erit vti vidimus $\text{tang. } s = \sqrt{\frac{\text{tang. } e}{\text{tang. } p}}$. Deinde vero est altitudo celeritati naus debita $v = \frac{e \sin \alpha}{\cos \alpha \cos e}$ fin. eCα (fin. VCe)² hincque ipsa celeritas, qua naus in directione CM procedet erit vt fin. q √ sin (e + p), quae si multiplicetur in cosinum anguli VCM = p + q + s dabit celeritatem deriuatiuam, qua naus aduersus ventum progreditur, quae ergo maxima est efficienda. Quocirca maxima fieri debet ista expressio $\cos. (p + q + s) \sin. q$

$\sqrt{\sin. (e+p)}$. At ex aequatione $\text{tang. } s = \sqrt{\frac{\text{tang. } e}{\text{tang. } p}}$ habetur $dp = \frac{-2 ds \text{ tang. } e (\text{cof. } p)^2}{\text{tang. } s (\sin. s)^2}$ feu $ds = \frac{-dp \text{ tang. } s (\sin. s)^2}{2 \text{ tang. } e (\text{cof. } p)^2} = \frac{-dp \sqrt{\text{tang. } e}}{2 (\text{tang. } e + \text{tang. } p) (\text{cof. } p)^2 \sqrt{\text{ang. } p}}$.

§. 935. Quoniam hic duae infunt quantitates variables p et q a se inuicem non pendentes, vtramque ad maximum efficiendum definiri oportet, ex quo maximum maximorum elicietur. Habeat p hincque etiam s iam valorem, quem maximi natura postulat, et quaeratur valor anguli q ; debeat ergo esse $\sin. q \text{ cof. } (p+q+s)$, maximum, vnde oritur $\text{cof. } q \text{ cof. } (p+q+s) = \sin. q \sin. (p+q+s)$ feu $\text{cot. } q = \text{tang. } (p+q+s)$. Fiet ergo $90^\circ - q = p+q+s$; et $q = \frac{90^\circ - p - s}{2}$. Quod si ergo iam inuenta fit dispositio velorum seu angulus eCA ex quo simul habetur angulus $ACM = s$, nauis ipsa ita versus ventum dirigi debet, vt ducta CL ad CM normali, angulus $LCE = 90^\circ - p - s$ a venti directione VC biseceatur. Intelligitur hinc etiam quaecunque velorum dispositio habeatur, inter omnes nauis directiones hoc modo inueniri eam, quae motum celerrimum aduersus ventum producat. Superest ergo vt velorum aptissimam dispositionem seu angulum q inuestigemus, quo inuento promtissimus motus contra ventum obtineatur.

§. 936. Cum igitur sit $q = \frac{90^\circ - p - s}{2}$ et $p+q+s = \frac{90^\circ + p + s}{2} = 90^\circ - q$, erit $\text{cof. } (p+q+s) = \sin. q = \sin. \frac{90^\circ - p - s}{2}$; hincque ista expressio fieri debet maximum $(\sin. q)^2 \sqrt{\sin. (e+p)}$, vnde fit $2 dq \sin. q \text{ cof. } q \sqrt{\sin. (e+p)} + \frac{dp \text{ cof. } (e+p) (\sin. q)^2}{2 \sqrt{\sin. (e+p)}} = 0$ siue $4 dq \sin. q \text{ cof. } q \sin. (e+p) + dp (\sin. q)^2 \text{ cof. } (e+p) = 0$, ex qua nascitur $4 dq \text{ tang. } (e+p) + dp \text{ tang. } q = 0$. Est vero $dq = \frac{-dp - ds}{2}$

$$= -\frac{dp}{2} + \frac{d\sqrt{\text{tang. } e}}{(\text{tang. } e + \text{tang. } p)(\text{cof. } p)^2\sqrt{\text{tang. } p}}, \text{ quo substituto orietur}$$

$$\text{tang. } q = \text{tang. } \frac{90-p-s}{2} = 2 \text{ tang. } (e + p) - \frac{\sqrt{\text{tang. } e}}{(\text{tang. } e + \text{tang. } p)(\text{cof. } p)^2\sqrt{\text{tang. } p}}.$$

At est tang. $\frac{90-p-s}{2} = \sqrt{\frac{1-\sin. (p+s)}{1+\sin. (p+s)}} = \frac{1-\sin. p \cos. s - \cos. p \sin. s}{\cos. p \cos. s + \sin. p \sin. s} = \frac{2 \text{ tang. } e + 2 \text{ tang. } p}{1-\text{tang. } e \text{ tang. } p} - \frac{\sqrt{\text{tang. } e}}{(\text{tang. } e + \text{tang. } p)(\text{cof. } p)^2\sqrt{\text{tang. } p}}.$

Cum iam fit tang. $s = \sqrt{\frac{\text{tang. } e}{\text{tang. } p}}$ erit sin. $s = \frac{\sqrt{\text{tang. } e}}{\sqrt{(\text{tang. } e + \text{tang. } p)}}$ et cof. $s = \frac{\sqrt{\text{tang. } p}}{\sqrt{(\text{tang. } e + \text{tang. } p)}}$ fiet tang. $\frac{90-p-s}{2} = \frac{\sqrt{(\text{tang. } e + \text{tang. } p)} - \sin. p \sqrt{\text{tang. } p} - \cos. p \sqrt{\text{tang. } e}}{\cos. p \sqrt{\text{tang. } p} - \sin. p \sqrt{\text{tang. } e}}.$

§. 937. Ponatur tang. $e = \delta$ et tang. $p = x$, vt fit sin. $p = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ et cof. $p = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$; quibus substitutis habebitur $\frac{\sqrt{(\delta+x)(1+xx)} - x\sqrt{x-\delta}}{\sqrt{x-\delta}} = \frac{2\delta+2x}{1-\delta x} - \frac{(1+xx)\sqrt{\delta}}{(1-\delta x)\sqrt{x}}$ quae multiplicata per $1 - \sqrt{\delta x}$ transibit in hanc: $\frac{\sqrt{(\delta+x)(1+xx-\sqrt{\delta-x}\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} = \frac{2\delta+2x}{1+\sqrt{\delta x}} - \frac{(1+xx)\sqrt{\delta}}{(1+\sqrt{\delta x})\sqrt{x}}$. Multiplicetur per $(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{x}$, et fiet $\sqrt{(\delta+x)(1+xx)} + \sqrt{\delta x}(\delta+x)(1+xx) - \sqrt{\delta-x}\sqrt{x} - \delta\sqrt{x} - xx\sqrt{\delta} = 2\delta\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - \sqrt{\delta-x}xx\sqrt{\delta}$ seu $(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{(\delta+x)(1+xx)} = 3(\delta+x)\sqrt{x}$; quae per $\sqrt{(\delta+x)}$ diuisa dat $(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{(1+xx)} = 3\sqrt{x}(\delta+x)$; et sumtis quadratis $1 + xx + 2\sqrt{\delta}x + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x + \delta x^3 = 9\delta x + 9xx$. Hinc fit $1 + 2\sqrt{\delta}x + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x^3 = 8\delta x + 8xx$. Ex qua primum patet si fuerit $\delta = 0$ seu angulus $AC\alpha$ infinite parvus, fore $8xx = 1$ et $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Hoc ergo casu erit tang. $eCA = 0$, 3535534, ideoque angulus $eCA = 19^\circ, 28'$. et ob $ACM = 0$ erit $LCe = 70^\circ, 32'$, ac propterea angulus $VCE = 35^\circ, 16'$.

§. 938. Quanquam autem aequatio inuenta $1 + 2\sqrt{\delta x} - 8\delta x - 8xx + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x^3 = 0$ commode re-

folui nequit, tamen quia δ est quantitas valde parva, per approximationem verus valor ipsius x facile elici poterit. Aequatio enim transformatur in hanc $(1 - 2\sqrt{\delta x})(1 + 4\sqrt{\delta x}) = xx(2 - \sqrt{\delta x})(4 + \sqrt{\delta x})$, unde fit $x = \sqrt{\frac{(1 - 2\sqrt{\delta x})(1 + 4\sqrt{\delta x})}{(2 - \sqrt{\delta x})(4 + \sqrt{\delta x})}}$. Cum iam valor ipsius x non multum discrepet ab ante inuento $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, si hic valor substituat-
 tur erit accuratius $x = \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{\delta}) (\sqrt{2} + \sqrt{\delta})}{(\sqrt{2} - \sqrt{\delta}) (\sqrt{2} + \sqrt{\delta})}}$; qui si nondam

fatis accuratus videatur, is denuo in formula inuenta loco x substituat-
 ur, sicque prodibit valor nouus pro x ad veritatem proxime accedens. Hoc ergo modo pro quouis casu valor ipsius $x = \text{tang. } eCA$ eruetur, unde simul habebitur $\text{tang. } ACM = \sqrt{\frac{\delta}{x}} = \frac{\sqrt{\delta x}}{x}$; quo cognito angulus incidentiae $VCE = \frac{90 - eCM}{2}$ innotescet.

§. 939. Quo hunc calculum exemplo illustremus, sit uti ante posuimus $\delta = \frac{1}{5}$ et ang. $AC\alpha = 6^\circ, 21'$, f. mto $x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, 3535534$; erit $\delta x = 0, 0392837$ et $\sqrt{\delta x} = 0, 1982008$; unde reperitur $x = 0, 3781247$. Hinc denuo habebitur $\sqrt{\delta x} = 0, 2049728$; hocque valore substituto emergit $x = 0, 3771825$, et $1x = 9, 5765516 = 1 \text{ tang. } eCA$. ex quo valore vero proximo oritur ang. $eCA = 20^\circ, 40'$; et $1 \text{ tang. } ACM = 1 \frac{\sqrt{\delta x}}{x} = 9, 7346029$. seu $ACM = 28^\circ, 30'$; hinc prouenit angulus $eCM = 49^\circ, 10'$; et $90 - eCM = 40^\circ, 50'$ quare erit angulus incidentiae $VCE = 20^\circ, 25'$. Maxime ergo nauis aduersus ventum penetrabit si vterque angulorum VCE et eCA fuerit circiter $20^\circ \frac{1}{2}$ seu propemodum duorum rhomborum, quae nauis velorumque dispositio fore a nauigantibus sedulo obſeruari solet.

§. 940. Etsi hoc idem argumentum in superiori libro am fusius est pertractatum , tamen pro vsu pratico visum est has regulas tradere. Primum enim hypotheses quas ibi et hic sum contemplatus , inter se differunt , atque in eiusmodi negotio , in quo ipsam veritatem attingere non licet , multitudo hypothesium inutilis esse nequit. Tum vero quod caput rei est , ibi ventum absolutum consideravi , cuiusmodi appareat obseruatori in loco firmo constituto , cum autem in mari non liceat venti tam veram directionem quam veram vim obseruare , hoc loco omnia ex vento apparente deduxi : ex quo diuersitas vtriusque tractationis eo minus est admiranda. Ceterum harum regularum obseruatio non turbatur eo , quod motu nauis variato ipsa directio venti apparens mutetur ; perpetuo enim ad directionem venti praesentem spectari oportet , ad eamque nauem ac vela accommodari.

§. 941. Definita tam nauis directione quam velorum dispositione conuenientissima ad cursum aduersus ventum instituendum , etiam ipsa nauis celeritas definiri , seu cum celeritate , qua eodem vento secundo existente esset progressura , comparari poterit. Si ventus esset secundus atque vela ita disponantur , vt sit angulus $eCa = 90^\circ$, atque angulus Vce statuatur 60° (maiolem non pono , quia alias non tota velorum superficies inflaretur) , foret quadratum celeritatis nauis vt $\frac{3}{4}$. Quando autem eadem nauis contra ventum luctatur , erit vt vidimus ang $eCa = 27^\circ$, $1'$ et $Vce = 20^\circ$, $25'$ hinc ex (917) oriatur quadratum celeritatis vt $0,055278$. Ergo celeritas nauis secundo vento motae est ad nauis celeritatem vento aduerso motae vt 1 ad $\sqrt{\frac{4}{3}}$. $0,055278$ hoc est vt 1

ad 0, 27148, seu proxime vt 11 ad 3; cursu igitur contra ventum instituto naus celeritas fere ad quartam vsque partem diminuitur, celeritas autem, qua naus in regionem, vnde ventus venit, procedit, fit circiter triplo minor, naus ita vndecies tardius in regionem propositam progreditur vento existente contrario, quam si effet secundus.

§. 942. Plurimum autem ista naus contra ventum promotio pendet a ratione inter resistentiam prorae et lateris seu ab angulo $AC\alpha$ quem hic assumimus $= 6^\circ, 21'$. Quo igitur facilius perspiciatur, quantum naus, in qua iste angulus minor existit, contra ventum procedere valeat, casum illum euoluamus, in quo angulus $AC\alpha$ ac propterea declinatio naus euanescit. Supra autem vidimus hoc casu sumi debere ang. $eCA = eC\alpha = 19^\circ, 28'$, et $VCe = 35^\circ, 16'$. erit ergo $VCA = VCM = 54^\circ, 44'$, vnde et celeritas naus contra ventum obluantantis erit vt $\sin. 35^\circ, 16' \sqrt{\sin. 19^\circ, 28'} = \frac{1}{3}$. Cum ergo celeritas vento existente prospero fit vt $\frac{\sqrt{3}}{2}$ erit haec naus celeritas ad illam vti $3\sqrt{3}$ ad 2, hoc est proxime vt 21 ad 8. Sin autem celeritas deriuatiua quaeratur, qua naus actu in venti plagam promouetur, erit ea $\frac{1}{3\sqrt{3}}$; hinc ergo naus vento existente contrario in regionem propositam progreditur celeritate vt 2, dum eiusdem celeritas, si ventus effet secundus, foret vt 9. Hoc ergo casu naus plus quam duplo celerius contra ventum promouetur, quam casu praecedente.

§. 943. Hinc igitur luculenter perspicitur, quantum anguli $AC\alpha$ paruitas motum aduersus ventum instituentium acceleret. Quamobrem in constructione nauium etiam

tiam in hoc maxime erit incumbendum, ut angulus $AC\alpha$ quantum fieri potest diminuatur: id quod efficiatur resistantiam lateralem prae resistantia prorae plurimum augendo. Ad hoc ergo duplex patet via: altera, ut prorae resistantia plurimum diminuatur, quod quidem iam navis acceleratio in cursu directo potissimum requirit. Altera autem via huic scopo propria eo tendit, ut resistantia lateralis quantum fieri potest augeatur; quod primo augenda longitudine navis obtinetur: tum vero conformatio laterum ita debet esse comparata, ut aqua in cursu obliquo sub non nimis acuto angulo incidat. Imprimis vero figura spinae non parum huc confert, si ei tanta crassities tribuatur, ut multum infra nauem promineat; huius prominentiae enim resistantia notabiliter resistantiam lateralem augebit.

§. 944. Cum igitur motus navium progressivus in cursu obliquo nihil in malorum constitutione ante tradita immutandum postulet, ad reliqua capita, quorum ratio in navium constructione et navigatione est habenda, progrediamur. Superest scilicet ut inquiremus, quantum navis cursu obliquo lata inclinetur circa axem tam longitudinalem quam latitudinalem; atque hinc simul praecepta colligentur, pro navium constructione atque malorum collocatione, ut minima inclinatio circa axem longitudinalem consequatur. Quod enim ad inclinationem circa axem latitudinalem attinet, de ea iam in capite praecedente abunde est tractatum. Denique vero investigari debent vires ex cursu obliquo natae, quibus navis circa axem verticalem conuertatur, atque actio gubernaculi perturbetur;

tur; vt iis cognitis medela idonea inueniri, ficque cursus nauis gubernaculi beneficio conseruari queat.

Tab. XXVII.

fig. 3.

§. 945. Inclinatio autem nauis partim a vi venti impingentis oritur: ex quibus viribus coniunctis nascitur momentum inclinationem producens, cuius effectus determinatur per nauis stabilitatem. Sit tota vis a vento accepta $= P$, cuius directio erit ad velorum superficiem normalis. Si ergo in cursu obliquo fuerit ef velorum positio atque angulus ACe ponatur $= p$, media directio vis venti CP cum axe longitudinali AB constituet angulum $ACP = 90 - p$. Resoluatur haec vis P in duas laterales secundum axes nauis CA et CF erit vis secundum directionem $CA = P \sin. p$ et vis secundum directionem $CF = P \cos. p$. Cum iam media directio vis venti in sublimi sit sita, ponatur eius altitudo supra nauis centrum grauitatis $= k$ hincque erit momentum respectu axis latitudinalis proram submergere conans $= Pk \sin. p$, momentum vero respectu axis longitudinalis latus nauis dextrum deprimere conans $= Pk \cos. p$.

§. 946. Ad vim ex resistentia ortam aestimandam fit CM directio, secundum quam nauis propellitur. Ac primo quidem notandum est mediam directionem virium aquae ad horizontem esse inclinatum, ac sursum vergere, propterea quod superficies carinae sursum diuergere solet, a cuius figura pendet inclinatio mediae directionis virium aquae ad horizontem. Repraesentet ergo $AEBF$ sectionem nauis horizontalem per centrum grauitatis C factam, perquam transeat media directio virium aquae OS in puncto O , sitque angulus, quo haec directio ad horizontem incli-

inclinatur $SOR = q$; et ipsa vis $OS = Q$, quae resoluatur in verticalem $OQ = Q \sin. q$, et horizontalem $OR = Q \cos. q$. Perspicuum igitur est, vim horizontalem OR , quoniam eius directio in eodem plano est sita, in quo axes navis longitudinalis AB et latitudinalis EF iacent, nullam inclinationem circa hos axes producere; sed omnem vim inclinantem, quae quidem a vi aquae oritur a vi verticali $OQ = Q \sin. q$ esse petendam.

§. 947. Quoniam vero navis a vi CP propulsa eiusmodi cursus directionem obliquam CM sequitur, in qua vis resistentiae horizontalis OR directionem obtineat parallelam vi propellenti, atque insuper tantam celeritatem acquirat, ut vis resistentiae horizontalis $OR = Q \cos. q$ aequalis fiat vi propellenti P ; primum ex cognito puncto O dabitur directio vis horizontalis OR , quippe quae directioni CP erit parallela. Hinc producta OR , donec vtrumque axem secat in K et L erit angulus $CLO = p$, et angulus $AKO = 90 - p$. Deinde vero ex aequatione $P = Q \cos. q$ innotescet vis aquae $Q = \frac{P}{\cos. q}$. Quamobrem resultabit vis verticalis $OQ = Q \sin. q = P \tan. q$. Ducta ergo ex puncto O recta OI axi AB parallela, quae alteri axi EF occurrat in I ; erit momentum ex allisione aquae ortum respectu axis longitudinalis $AB = P \cdot CI \cdot \tan. q$ et momentum respectu axis latitudinalis $EF = P \cdot OI \cdot \tan. q$; quae ergo momenta ex solo situ puncti O , et angulo $SOR = q$ determinantur.

§. 948. Navis ergo circa axem longitudinalem dextrorsum inclinabitur a momento virium $= Pk \cos. p - P \cdot CI \cdot \tan. q$; quod ommissa vi absoluta P fit proportionale huic formulae $k \cos. p - CI \cdot \tan. q$. Momentum vero,

quo naus circa axem longitudinalem EF antrorsum inclinabitur, erit $= Pk \sin. p - P. OI. \text{tang. } q$, seu vt $k \sin. p - OI. \text{tang. } q$. Quoniam vero iam ante in cursu directo nauem ita constituimus, vt inclinatio circa axem longitudinalem nullum impedimentum afferat, multo minus in cursu obliquo quicquam ab inclinatione circa istum axem erit metuendum. Primum enim ipsa vis venti oblique in vela incidentis multo erit minor tum vero etiam quantitas huius vis decrefcit cum sinu anguli ACe ; quam ob duplicem causam inclinatio naus circa axem longitudinalem nullius prorsus erit momenti, neque idcirco eius rationem hoc loco haberi conueniet; sed sufficet inclinationem circa alterum axem AB perpendisse.

§. 949. Cum igitur momentum nauem ad latus inclinare conans fit vt $k \cos. p - CI \text{tang. } q$, nisi fit $k \cos. p = CI. \text{tang. } q$. naus actu circa axem longitudinalem AB inclinabitur; ipsius vero inclinationis quantitas pendebit a stabilitate naus respectu huius axis, ita vt quo maior fuerit haec stabilitas eo minorem naus subitura fit inclinationem. At vero reliquae nauium qualitates minime concedunt, vt quantitas $CI. \text{tang. } q$ aequalis reddatur ipsi $k \cos. p$, cum ad hoc nimis magna naus latitudo requiratur atque adeo saepenumero euenire solet vt ob punctum I vltra C cadens quantitas $CI. \text{tang. } q$ negatiuum valorem induat, quibus casibus momentum $k \cos. p$ ex vi venti ortum adeo augetur a vi aquae, ideoque nisi stabilitas fuerit summa vel naus in cursu obliquo maxime periclitabitur, vel non nisi exigua velorum inferiorum copia vti poterit, quo momentum ex vi venti ortum non maius euadat, quam quidem sine periculo sustineri queat.

§. 950.

§. 950. Quo igitur omnia vela ad cursum obliquum instituendum tuto adhibere liceat, hoc ante omnia erit efficiendum vt distantia puncti O ab axe AB , seu intervallum CI non evanescat; multo minus valorem negativum nanciscatur. Cum igitur directio media virium aquae OS ad planum verticale per AB ductum sursum conuergat, idque tandem traiciat, manifestum est, quo altius sita fuerit sectio horizontalis $AEBF$, eo propius punctum O ad rectam AB admotum iri, atque tandem vltra eam cadere debere. Quoniam itaque haec sectio horizontalis $AEBF$ per centrum grauitatis nauis transire ponitur, perspicuum est, quo altius positum fuerit centrum grauitatis nauis, eo minus futurum esse interuallum CI ; hocque adeo negativum fieri posse. Quamobrem ad istud institutum hoc maxime requiritur, vt centrum grauitatis nauis quantum fieri potest, deprimatur. Quod idem cum etiam nauis stabilitas postulet, nullaue ratio contrarium requirat, maximum lucrum ex depressione centri grauitatis, in vniuersam navigationem redundabit.

§. 951. Quodsi autem hoc fuerit effectum, vt intervallum CI notabilem magnitudinem sit nactum, curandum erit praeterea, vt valor quantitatis CI . tang. q tam prope ad valorem k $\cos. p$ adducatur, quam quidem fieri potest. Hoc autem praestabitur angulum SOR , quo media directio virium aquae ad horizontem inclinatur, plurimum augendo, in ratione enim tangentis huius anguli valor CI . tang. q augetur. Dum igitur resistentia aquae secundum directionem verticalem facta augetur, inclinatio nauis in cursu obliquo diminuitur. At vero aucta resistentia verticali simul resistentia horizontalis minor redditur,

tur, hocque ipso naus motus acceleratur; hancobrem diminutio resistentiae horizontalis non solum nauis motum celeriozem conciliabit, sed etiam nauem aptiozem efficiet, quo magis in cursu obliquo inclinationi ad latera reluctari valeat. Haecque adeo rationes coniunctae augmentum resistentiae verticalis maxime suadent.

§. 952. Quemadmodum autem ad hunc scopum attingendum, nauis figuram comparatam esse oporteat, curatius perpendamus. Quod quidem ad figuram prorae attinet ea ex cursu directo iam satis definita videtur, poterit autem ex iis, quae de figura laterum carinae praecipientur, magis perfici. Contemplemur ergo carinae sectionem verticalem ad axem AB normalem, eiusmodi in loco, ubi latera nauis neque conuergunt neque diuergunt sensibiliter. Huius sectionis semissis sit $CEHD$; et centrum grauitatis nauis in G ; ac primo quidem patet, prominentiam spinae Dd , quae ante ad cursum contra ventum instituendum erat commendata, nunc fieri perniciosam. Quoniam enim aqua in hanc prominentiam incidens agit secundum directionem horizontalem Dr , haec vis quo fuerit maior, eo magis momentum, quo nauis circa axem longitudinalem inclinatur, augebitur. Cum igitur spinae prominentia alio respectu sit utilis alio damnosa, eam satis paruum statui oportebit.

§. 953. Deinde manifestum est ad cursum obliquum instituendum, naues fundo horizontali praeditas maxime esse ineptas. Si enim $CEbD$ esset sectio nauis transuersa basin habens Db horizontalem, solum latus Eb vim aquae patietur, cuius adeo directio fere erit horizontalis, vnde et angulus q diminuetur, et interuallum CI negatiuum

vum reddetur, nisi forte centrum grauitatis G puncto D propius fuerit quam ipsi C , quod autem in grandioribus nauibus nunquam vsu venit. Hancobrem fundum carinae DH aliquantum sursum vergere oportebit, quo et resistentiam sustineat, et ipsius directionem IK sursum proiciat. Neque vero hanc eleuationem seu angulum HDb nimis magnum esse oportet, quoniam, licet vis aquae in fundum aueretur, tamen directio IK deprimeretur, atque infra G rectam verticalem CD traiceret, quo ipso non solum vis nauem inclinans non diminuireretur, sed etiam aueretur; ad quod accedit, quod resistentia lateris EH hanc vim inclinantem etiam augeat, nisi centrum grauitatis G in semissem inferiorem altitudinis CD cadat.

§. 954. Quoniam igitur nec fundus carinae DH horizontalis esse potest, et latus EH , si fuerit verticale inclinationem non minuit, atque eiusmodi anguli uti H vitari debent, figuram DHE in curuam continuam formari conueniet. Ponamus ergo sectionem carinae transversam esse semicirculum, eiusque semissem quadrantem DIE ; quo casu latitudo carinae erit ad eius profunditatem vt 2 ad 1. Media igitur directio vis aquae impingentis IC transibit per punctum C ; quod idem eueniret, si loco quadrantis figura quaecunque ipsi inscripta substitueretur, quoniam vero capacitati carinae est consulendum, et anguli vitari debent, ipse quadrans omnibus figuris inscriptis merito antefertur. Quodsi ergo centrum grauitatis nauis in ipsam superficiem aquae incidat, tum vis aquae IC inclinationem nauis neque diminet neque augebit, sin autem centrum grauitatis infra aquae superficiem cadat in

G, tum vtique ab hac vi inclinatio nauis minuetur. Contra vero haec vis inclinationem augebit, si centrum grauitatis nauis supra aquae superficiem cadat.

§. 955. Nisi ergo centrum grauitatis nauis infra aquae superficiem cadat, sectiones carinae transuersales figuram semicirculi induere nequeunt; neque propterea carinae profunditas semiffem latitudinis aequare poterit. Supra vero iam, cum de stabilitate ageretur, ostensum est, profunditatem carinae semiffem latitudinis excedere non oportere, cum igitur haec duo praecipua capita, ad quae in nauivm constructione est respiciendum, tam egregie conspirent, per ea figura sectionum transuersalium carinae optime determinatur. Ante omnia scilicet ad situm centri grauitatis totius nauis est attendendum, quod vel infra aquae superficiem in G cadet, vel in ipsam aquae superficiem in C, vel supra eam in g. Priori igitur casu, si interuallum CG sit notabile, sectionibus transuersalibus carinae commode figura semicircularis tribuitur, atque latitudo carinae duplo maior quam eius profunditas statuitur. Quo profundius enim positum fuerit centrum grauitatis G, eo magis non solum vis inclinationi resistens augebitur, sed etiam stabilitas nauis maior redditur; sicque ob duplicem causam nauis inclinatio in cursu obliquo diminuitur.

§. 956. Casus hic imprimis locum habet in nauibus onerariis, in quibus maxima onerum pars infra aquae superficiem condi solet; tum enim totius nauis commune centrum grauitatis infra aquae superficiem, deprimitur. In nauibus autem alii scopo destinatis ac praecipue bellicis, vbi tormenta supra aquae superficiem collocari debent, centrum grauitatis non solum in aquae superficiem C sed etiam

etiam supra eam in g , cadere solet. His igitur casibus media directio vis aquae ic supra centrum grauitatis g cum verticali DC puta in c collineare debet. Quare si sectionis carinae figura fuerit circularis, vel non multum ab ea abhorreat, vti fieri solet, eius figura centro c descripta esse debebit. Erit ergo Die figura sectionis transversae carinae, quae propterea erit segmentum circuli centro c descripti atque latitudo sectionis $2Ce$ superabit profunditatem CD bis sumtam. Perspicuum vero etiam est, mediam directionem ic maiorem cum horizonte angulum facere quam casu priore.

§. 957. His itaque casibus, quibus centrum grauitatis naus non infra superficiem aquae cadit, profunditas carinae CD minor esse debet, quam semissis latitudinis Ce . Euidens autem est, quo magis ratio Ce ad CD excedat rationem aequalitatis, eo minorem inclinationem in cursu obliquo nauem esse subituram. Primo enim aucta latitudine Ce , punctum c altius eleuabitur, hocque momentum virium aquae inclinationi obluētans augebitur. Tum vero ob eandem Ce auctam stabilitas naus non mediocriter increfcit, atque idcirco inclinationem naus dimi-
nuit, atiamfi alias vis inclinans esset eadem. Cum autem sit $Cc > Ee$, perspicuum est, exiguum rationis Ce ad CD excessum supra rationem aequalitatis, vehementer inclinationem impedire, quia centrum grauitatis g non multum supra aquae superficiem cadere solet. Sumta ergo semi latitudine Ce aliquanto maiori quam CD , vel CE , erit $Cc = Ee + \frac{Ee^2}{2CD}$; tum centro c describatur arcus circuli Die per D transiens, erit $CDie$ aptissima figura sectionum carinae transversalium.

§. 958. Hoc igitur modo sectiones naus verticales ad axem longitudinalem normales ita formantur, vt a vi aquae in latera naus impingente vis inclinans diminuatur, quo pacto ipsa naus inclinatio ob auctam simul stabilitatem multo minor reddetur. Imprimis vero ab aqua in proram allabente vis inclinans debilitabitur; hoc enim loco directiones virium aquae multo magis sursum vergent, atque ab axe longitudinali erunt remotae. Quo igitur effectus huius vis maior existat, necesse est vt in sectionibus transuersis prorae, latitudo Ce maiorem habeat rationem ad profunditatem CD , quam in corpore naus. Cum ergo proram versus altitudines CD minores euadant, latitudo Ce in minore ratione decrefcere debet; vel sectio naus horizontalis in superficie aquae facta proram versus obtusior est constituenda, quam sectio verticalis per mediam nauem facta; quo in sectionibus transuersis proram versus ratio Ce ad CD continuo maior prodeat.

§. 959. Parem autem naus conformationem requiret vltima conditio, quae perpendenda restat, qua effici oportet, vt gubernaculi ope naus statu suo conseruari, atque ad lubitum dirigi queat. Pendet vero haec disquisitio a momentis virium nauem sollicitantium respectu axis verticalis per centrum grauitatis naus ducti. Quodsi haec momenta penitus se destruant, directio naus a sola gubernaculi actione pendebit; ideoque talis virium status ad gubernationem maxime accommodatus videtur. Quoniam vero supra vidimus in cursu obliquo CM nauem difficulter gubernaculi ope ad eam partem e , vnde ventus venit dirigi posse, propterea quod aqua in gubernaculum versus istam plagam inflexum nimis exigua vi impingat; expediet,

diet, vires nauem conuertentes non omnino se destruere, sed eas, quae proram versus ventum conuertere valeant, non nihil praeualere; tam parum autem, vt effectus inde oriundus gubernaculi beneficio facile coerceri queat. Sic enim, cessante gubernaculi actione, naus sponte aduersus ventum dirigetur, quem effectum alias gubernaculum producere non valeret.

Tab. XXVII.
fig. 6.

§. 960. Quoniam igitur hic momenta virium respectu axis verticalis per centrum grauitatis nauis transeuntis investigamus, solae vires horizontales erunt considerandae. Ac directio quidem media virium a vento exceptarum ipsa est horizontalis, vnde eius distantia ab axe verticali determinabit ipsius momentum respectu huius axis. Sit $ACBF$ sectio nauis secundum aquae superficiem facta, A prora, B puppis et G punctum, per quod axis verticalis transeat, quod ideo propemodum circa medium nauis situm erit. Sit porro CP media directio vis venti ad hoc planum relata, ipsa vero haec vis ponatur $=P$. Tum vero repraesentet KR directionem mediam resistentiae aquae, seu vis quam aqua secundum directionem horizontalem exerit. Erit ergo vti vidimus haec directio KR parallela directioni CP , atque ipsa aquae vis $=P$. His igitur duabus viribus nauis versus Aa conuertetur momento $=P.KC$ sin. ACP ; scilicet secundum figuram prora erga ventum conuertetur.

§. 961. Pendet ergo iste effectus a positione punctorum C et K atque ipse puncti G locus ex computo egreditur. Quamobrem si punctum K , in quo media dire-

ctio resistentiae axem AB traicit, ante punctum C proram versus cadat, naus ad ventum conuertetur eo maiori vi, quo maius fuerit interuallum KC ceteris paribus. Nisi igitur istud momentum tam sit paruum vt per actionem gubernaculi vinci possit, naus cursum tenere non poterit. Sin autem punctum C ante punctum K cadat, effectus orietur contrarius atque naus a vento detorquebitur, qui effectus etiamsi esset maxime debilis, tamen a gubernaculo destrui non posset. Gubernaculum enim in situm Bb dirigi deberet, in quo non nisi perexiguam aquae vim sentiret. Hinc maxime cauendum est, ne punctum C propius ad proram B accedat quam punctum K. Aptissime autem haec duo puncta erunt collocata, si tantum non congruant, atque punctum K tantillum propius sit prorae, quam punctum C, vt interuallum CK reddatur minimum ob rationes modo allegatas.

§. 962. Locus autem puncti K a figura carinae pendet, cuius sectiones horizontales quo magis proram versus conuergant atque acumentur, eo propius punctum K ad proram A accedet. Punctum vero C a velorum per naus longitudinem distributione, atque adeo ab arbitrio nostro pendet. Si enim vela aequabiliter per totam naus longitudinem disponantur punctum C in medium fere lineae AB punctum cadet, si quidem ventus in omnia vela aequaliter irruere possit, quod autem in cursu obliquo fieri solet. Quodsi ergo punctum K nimis prope ad proram A esset situm, tum vela non aequaliter disponi possent, ne interuallum CK nimis magnum proueniret, sed plura vela circa puppim auferri deberent, quo punctum C propius ad

proram perducatur. Sin autem punctum K nimis prope ad puppim B caderet, tum copia velorum proram versus diminui deberet, donec punctum O in debitam a puncto K distantiam perduceretur.

§. 963. Quamquam autem numerum velorum vel proram vel puppim versus diminuendo effici potest, vt puncta C et K debito interuallo a se inuicem sint remota, tamen hoc pacto per velorum diminutionem vis nauem propellens debilitatur, hincque nauis motus progressius retardatur; id quod omni cura est euitandum. Quamobrem punctum K in eiusmodi loco constitutum esse oportet, vt omnibus velis expansis punctum C satis prope ad K et quidem puppim versus cadat. Solet autem in nauibus ob alias rationes prora multo magis velis onerari quam puppis, quo fit vt omnibus velis expansis media directio virium venti CP propius ad proram quam ad puppim incidat, atque maximus etiam malus prorae propior quam puppi esse solet. Puncto igitur hoc C per aestimationem notato figura carinae ita debet esse comparata vt punctum K in idem fere punctum C cadat. Quamuis enim in hoc error quidam committatur, tamen is per velorum expansionem sine sensibili vis propellentis iactura corrigi poterit.

§. 964. Scilicet si carina eiusmodi habeat figuram, quae ab hoc scopo non multum dissentiat; per experientiam copia velorum expandendorum facile definitur. Ponamus enim omnibus velis expansis nauem aduersus ventum vergere, indicium hoc erit punctum C puppi nimis esse vicinum, hancobrem velum quoddam circa puppim

vel auferatur vel aliter dirigatur, vt vis conuertens ab eo orta diminuatur, hocque modo nauis ad fitum fixum redigatur. Sin autem contra nauis a venti plaga depellatur, tum vela circa proram diminui debebunt, vnum alterumue vel tollendo vel aliter dirigendo. Simili modo si nauis magis erga ventum conuerti debeat, atque gubernaculi vis huic effectui non sufficiat, tum vis conuertens velorum circa puppim aliquantum augeatur, quod fiet si vnum velum vento magis opponatur. Sic itaque postremum velum inferuiet naui dirigendae, atque defectui gubernaculi supplendo.

Tab. XXVIII §. 965. Cum igitur data nauis longitudine AB in superficie aquae facile innotescat punctum C , per quod media directio vis venti, si cuncta vela fuerint expansa, est transitura; sitque $AC < BC$. Tum centro C ad proram constituendam describatur circulus hAi : atque sumta $ECF =$ latitudini nauis, ducantur axi AB parallelae hEm , et iFn , quae a recta EF bisecentur. Manifestum est, si sectio nauis horizontalis figuram haberet $hAinm$, tum, quocunque cursu obliquo nauis feratur, mediam directionem resistentiae per punctum C esse transituram. Cum autem eiusmodi figura nauis non conueniat, figuram idoneam appropinquantem formari oportebit, cuiusmodi est $AHEMBNFI$, quae sectionibus nauis horizontalibus tribuatur; in qua quidem ob proram magis rotundam media directio resistentiae ante punctum C in K per AB transibit. Hinc igitur facile perspicitur proram HAI satis obtusam esse futuram, quod ipsum inclinationi nauis ad latus egregie inferuit.

Fig. 2.

§. 966. Cum igitur sectio navis horizontalis in superficie aquae facta hoc modo sit determinata, sectionem diametralem, quae verticaliter per medium navis fit, consideremus. Repraesentetur ea per figuram $AaDbB$, qualem supra in cursu directo descripsimus. Statuatur scilicet profunditas CD aliquanto minor, quam semissis latitudinis CE vel CF , siquidem centrum gravitatis navis in ipsam aquae superficiem cadat vel supra eam. Denotat ergo Aa acclivitatem prorae, quam inclinatio navis in cursu directo determinat; et dB repraesentat elevationem puppis super spina db , quo ob gracilitatem puppis sub aqua tum ratione sectionum horizontalium quam verticalium, aqua liberius in gubernaculum Bgb incurrere queat. Resistentia igitur navis non multum per cuspidationem horizontalem diminuetur, sed maximam partem per elevationem prorae aA , atque resistentia eo minor red-detur quo magis angulus A diminuat.

§. 967. Ex his duabus figuris sectionis aquae et diametralis facile tota carinae forma conficitur, cum sectio amplissima EDF iam ante fit determinata, quippe quae erit segmentum circulare per data puncta E , D , et F ductum. Ex his autem omnes sectiones transversales definiuntur, cum vniuscuiusque detur et latitudo et profunditas, id quod vel per figuras affines praestabitur, vti in primo capite ostenum est, vel per figuras non multum ab hac similitudine recedentes. Sic sectio verticalis per pq transiens, cum latitudini pq coniuncta sit profunditas or , pro figura huius sectionis congrue assumi poterit segmen-
tum circulare prq . Quod autem ad sectiones transversales

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Ies puppim versus attinet, eae pari modo ex datis latitudine ac profunditate facile determinantur; sic ex latitudine xy et altitudine vz nascetur figura xzy infra z cum ligno mortuo zu connexa. His obseruatis itaque figura na , vis ad cursum obliquum instituendum aptissima orietur.

FINIS.

