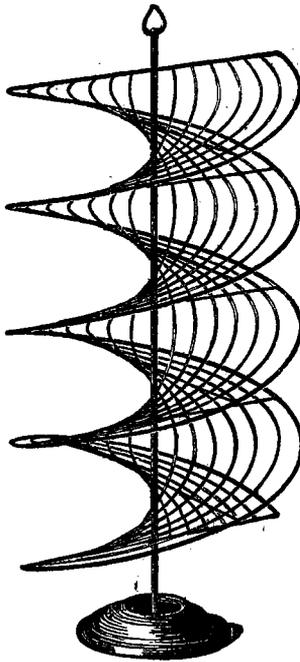




VERZEICHNIS MATHEMATISCHER MODELLE



McMASTER UNIVERSITY LIBRARY
QA 71 .W6
H. Wieners sammlung mathematis C.1

3 9005 0441 1381 3

AUS DEM VERLAG  VON B. G. TEUBNER

IN LEIPZIG

ALLE RECHTE, EINSCHLISSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Die in folgendem Verzeichnis aufgeführten, von Professor Dr. H. WIENER in Darmstadt herrührenden Modelle sind unmittelbar aus den Bedürfnissen des mathematischen Hochschulunterrichts hervorgegangen. Sie bilden eine Auswahl aus der Sammlung, die auf dem III. Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Heidelberg vom mathematischen Institut der Technischen Hochschule zu Darmstadt und dem genannten Leiter dieses Institutes ausgestellt war, und es besteht die Absicht, durch jährlich wiederkehrende Ausgaben neuer Reihen alle wichtigeren der in der genannten Sammlung enthaltenen Modelle auch weiteren Kreisen zugänglich zu machen.

Um diese „Sammlung mathematischer Modelle“ noch vielseitiger auszubauen und um die Geistesarbeit allgemeiner auszuwerten, die in den Modellschränken mancher höheren Schulen und Hochschulen aufgespeichert liegt, ist die Verlagsbuchhandlung bereit, in den später folgenden Ausgaben auch die Modelle anderer Urheber der Sammlung einzuverleiben. Die Gesichtspunkte, nach denen solche Modelle aufgenommen werden, sind dieselben, die bei der vorliegenden Ausgabe Geltung haben:

Die Modelle sollen mehr dem Unterricht an höheren Schulen und Hochschulen dienen, als der Sonderforschung;

sie sollen in geschlossenen Reihen ganze Gruppen geometrischer Gebilde und mathematischer Sätze umfassen und sich nicht in vereinzelt Stücken auf getrennte Gebiete verlieren;

sie sollen endlich nach Größe und Ausstattung die Einheit der Sammlung wahren.

Die Verlagsbuchhandlung hat die wissenschaftliche Durchführung dieses Planes Herrn Professor Dr. H. WIENER übertragen, der Anträge zur Aufnahme bereits gefertigter Modelle in die Sammlung begutachten und Anregungen zum Anfertigen neuer oder zum Überarbeiten vorhandener Modelle weiter verfolgen wird; das ihm unterstellte mathematische Institut, das den Zweck hat, die mathematische Sammlung der Darmstädter Technischen Hochschule durch neue Modelle zu vervollständigen, kann sich in Verfolgung dieses Zweckes an der Bearbeitung solcher von außen herantretenden Aufgaben beteiligen.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

Einrichtung des Verzeichnisses.

Die bis jetzt erschienenen Modelle betreffen folgende Gebiete der Geometrie:

Ebene Gebilde. — Ebenflächige Raumgebilde. — Flächen 2. Ordnung. — Dreh- und Schraubenflächen. — Raumkurven.

Außer diesen durch Überschriften hervorgehobenen Gebieten gibt das Verzeichnis eine Einteilung in Reihen, die Verwandtes in sich vereinigen und nach der Zeit des Erscheinens geordnet sind. Jedes Modell erhält eine Nummer, und diese ist so gewählt, daß an ihr auch bei späterer Erweiterung der Sammlung Zusammengehöriges zu erkennen ist, indem alle Modelle einer Hauptgruppe (z. B. der Raumkurven) Nummern aus demselben Hundert, die einer Untergruppe (z. B. der Singularitäten der Raumkurven) solche aus denselben und aus benachbarten Zehnern erhalten. Dagegen soll zwischen diesen Nummern und der Zahl der geplanten Modelle kein Zusammenhang bestehen.

Das Verzeichnis enthält außer den Angaben über Herstellung und ungefähre Größe Bemerkungen über Handhabung der Modelle und Hinweise auf ihre wissenschaftliche Bedeutung. Ausführlicheres hierüber geben Abhandlungen, die für sich in einzelnen Heften erscheinen und allmählich das ganze in den Modellen dargestellte Gebiet umfassen sollen.

Bezugsbedingungen.

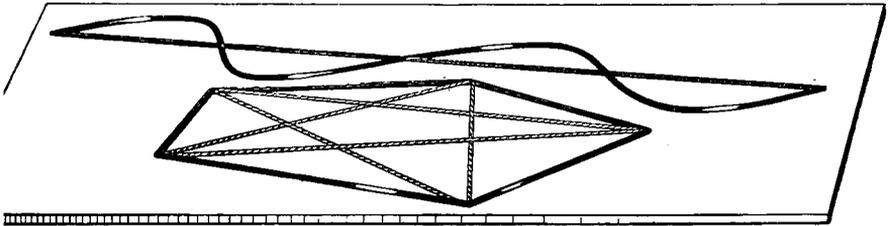
Die Modelle können in Reihen oder einzeln zu den im Verzeichnis vermerkten Preisen bezogen werden, zu denen noch Verpackungs- und Versandkosten hinzukommen. Bei der Bestellung ist die Nummer jedes gewünschten Modells anzugeben. Die Versendung der Modelle geschieht auf Gefahr des Empfängers.

Sonderwünsche, die Herstellung betreffend, werden von der Verlagsbuchhandlung nach Möglichkeit berücksichtigt.

Den einzelnen Modellen werden wissenschaftliche Abhandlungen beigefügt, soweit solche erschienen sind. Später erscheinende Abhandlungen werden kostenfrei nachgeliefert.

Der Gesamtpreis der ganzen bisher erschienenen Sammlung, enthaltend 59 Modelle mit allem Zubehör, beträgt *M.* 1800.—

Ebene Gebilde.



Nr. 2 und 21.

I. Reihe. Sieben Drahtmodelle zum Projizieren.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 7 Modelle mit Drehachse und 2 Drehköpfen *M.* 65.—

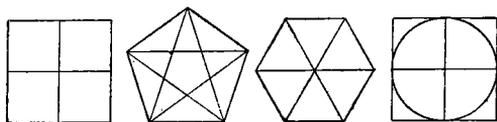
- | | |
|---|---------------|
| 1. Quadrat | <i>M.</i> 6.— |
| 2. Regelmäßiges Fünfeck (s. die Figur) | „ 9.— |
| 3. Regelmäßiges Sechseck | „ 7.— |
| Die Größe der drei Vielecke ist so bemessen, daß sie einem Kreis von 40 cm Durchmesser umschrieben sind. Dem Quadrat und Sechseck sind die Diagonalen, dem Fünfeck das Sternfünfeck mit gleichen Ecken hinzugefügt. | |
| 11. Kreis mit Quadrat, Durchmesser des Kreises 40 cm | „ 10.— |
| Hierzu eine a) Drehachse mit aufsetzbarem b) Drehkopf | „ 3.50 |
| 12. Rechtwinkelige Hyperbel, Länge der äußersten Sehnen etwa 60 cm | „ 16.— |
| Hierzu ein Drehkopf, auf die Drehachse passend | „ 2.40 |
| 13. Parabel. Länge der äußersten Sehne 56 cm | „ 7.50 |
| 21. Sinuslinie (s. die Figur), Länge der mittleren Linie 95 cm | „ 7.50 |

Die Modelle sind in ihren Hauptteilen aus starkem blanken Messingdraht hergestellt, die Diagonalen und anderen Hilfslinien aus schwächeren, teils schwarz, teils rot lackierten Drähten.

Das Quadrat (Nr. 1) läßt sich mittels angebrachter Stiftchen auf den Kreis Nr. 11 aufsetzen, so daß beide vereinigt einen Kreis mit umschriebenem regelmäßigen Achteck bilden.

Hierzu die Abhandlung Nr. 2: „Zur Projektion einiger ebenen Figuren“.

Die Gesetze der Perspektive, einschließlich der Parallelprojektion, bedürfen im Unterricht außer der mathematischen Begründung auch einer anschaulichen Erläuterung, und hierzu ist am zweckmäßigsten das Projizieren solcher einfachen Formen, wie sie in diesen Modellen gegeben sind. Andererseits dient das Projizieren als Beweisverfahren, da es ermöglicht, Eigenschaften, die bei Projektion invariant bleiben, von einem Gebilde auf das andere, etwa vom Kreis auf andere Kegelschnitte, zu übertragen. Sehr anschaulich läßt sich z. B. eine Anzahl solcher Übertragungen machen, indem man das Modell des Kreises mit umschriebenem Quadrat (Nr. 11) auf die Achse aufsteckt, in Drehung versetzt und die so entstehenden Figuren etwa parallel projiziert.

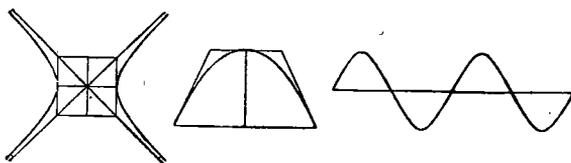


Nr. 1.

Nr. 2.

Nr. 3.

Nr. 11.



Nr. 12.

Nr. 13.

Nr. 21.

Schema der Modelle, Maßstab 1:30.

Ebenflächige Raumgebilde.

II. Reihe. Fünf Drahtmodelle der regelmäßigen (Platonischen) Vielfache.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 5 Modelle *M.* 60.—

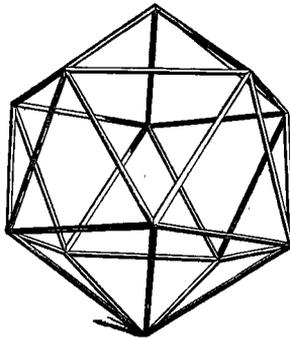
101. Tetraeder	<i>M.</i> 7.—
102. Würfel	„ 11.—
103. Oktaeder	„ 11.—
104. Dodekaeder	„ 16.—
105. Ikosaeder (s. die Figur),	„ 16.—

Bei sämtlichen Modellen beträgt die Entfernung von einer Kante zur Gegenkante 32 cm, so daß in alle eine und dieselbe Kugel die Kanten berührend hineingelegt werden kann.

Die Vielfache sind mittels ihrer Kanten dargestellt, die aus 4 mm starkem blankem Messingdraht bestehen.

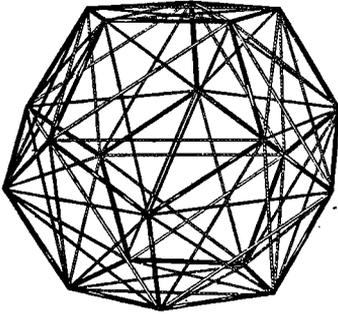
Hierzu die Abhandlung Nr. 3: „Die fünf regelmäßigen Vielfache PLATONS. Regelmäßigkeit in einer Gruppe“.

Die verschiedenartigen Projektionen der regelmäßigen Vielfache lassen sich am deutlichsten an diesen Modellen erkennen, die auch die hinteren, bei körperlichen Modellen verdeckten Teile sichtbar machen. Aber auch für die Verdeutlichung der Sätze der Gruppentheorie, in der bekanntlich die regelmäßigen Körper eine wichtige Rolle spielen, sind keine anderen so wirksam, wie solche durchsichtigen Modelle.

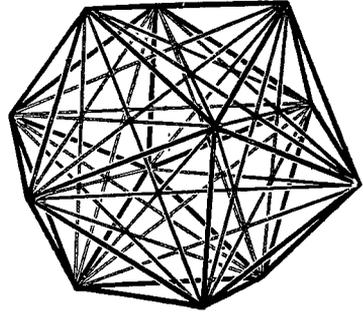


Nr. 105.

Maßstab 1:8.



Nr. 112.



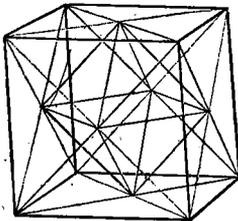
Nr. 114.

Maßstab 1:8.

III. Reihe. Sechs Drahtmodelle mit Fäden: Höhere regelmäßige Vielfache. Regelmäßige räumliche Vielstrahlen.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle *M.* 115.—

- | | |
|---|----------------|
| 111. Würfel mit zwei eingeschriebenen Tetraedern und dem diese als Halbfächner enthaltenden Oktaeder (s. die Figur) | <i>M.</i> 16.— |
| 112. Dodekaeder mit fünf eingeschriebenen Würfeln (s. die Figur) | „ 20.— |
| 113. Dodekaeder mit eingeschriebenem Iksaeder . . . | „ 24.— |
| 114. Iksaeder mit eingeschriebenem Dodekaeder (s. die Figur) | „ 24.— |
| 115. Regelmäßiger räumlicher Sechsstahl . . . | „ 12.— |
| 116. Regelmäßiger räumlicher Fünfzehnstrahl . . . | „ 20.— |



Nr. 111.

Maßstab 1:8.

Die Größe der Modelle beträgt bei Nr. 111 bis 114, wie bei der vorigen Reihe, von einer Kante zur Gegenkante gemessen, 32 cm, dieselbe Länge haben die Diagonalen in Nr. 115 und 116.

Die Modelle bestehen aus schwarz gehaltenen Drahtgestellen, in die starke Seidenfäden eingespannt sind, und zwar bei Nr. 113 und 114 in weißer Farbe, bei den übrigen verschiedenfarbig; bei Nr. 115 und 116 sind die aufeinander senkrechten Geraden mit gleicher Farbe dargestellt, während bei Nr. 111 jedes der beiden Tetraeder, bei Nr. 112 jeder der fünf Würfel seine besondere Farbe hat, so daß sich jeder dieser Körper sehr deutlich heraushebt. Das in die Fädentetraeder von Nr. 111 eingesetzte Oktaeder ist aus Neusilberdraht.

Die Gestelle von Nr. 115 und 116 bilden halbregeelmäßige Vielfache, die man erhält, wenn man beim Würfel oder Oktaeder (für Nr. 115) und beim Dodekaeder oder Iksaeder (für Nr. 116) die Kantenmitten als Ecken eines neuen gewöhnlichen Vielfachs wählt.

Hierzu die Abhandlungen Nr. 4 „Die regelmäßigen Vielfache (PLATONS, KEPLERS und POINOTS), abgeleitet aus ihrer Gruppe“ und Nr. 5 „Regelmäßige Vielstrahlen und geschlossene Spiegelsysteme“.

Die Modelle Nr. 113 und 114 stellen in erster Linie die zwei KEPLERSCHEN Vielfläche dar, indem in das Dodekaeder und in das Ikosaeder solche Nebenkanten eingeschrieben sind, daß sie sich im Innern wieder in Ecken eines Ikosaeders und eines Dodekaeders treffen. Werden dann diese Linien als Kanten eines neuen Vielfachs betrachtet, und solche Flächen durch sie gelegt, daß sie an jeder Ecke ein gewöhnliches Vieltkant bilden, so sind die so entstehenden Vielfläche die beiden KEPLERSCHEN. Es können diese noch auf eine zweite Art entstanden gedacht werden, nämlich durch Erweiterung der im Innern schwebenden PLATONISCHEN Vielfläche, die so als Kerne der KEPLERSCHEN zu betrachten sind.

Diese beiden Modelle zeigen aber auch, wie die POINSOTSCHEN Vielfläche durch Einschreiben oder Umschreiben (Erweitern der Seitenflächen) aus den PLATONISCHEN entstehen, und in gleicher Weise behandeln die Modelle Nr. 111 und 112 die in mehrere gewöhnliche zerfallenden Vielfläche; das erstere zeigt in übersichtlicher Anordnung die beiden Tetraeder als Halbflächner (Hemiédrien) des Oktaeders und ist deshalb im Unterricht der Kristallkunde vorteilhaft zu verwenden.

Die Modelle Nr. 115 und 116 bieten, wie die regelmäßigen Körper, eine Darstellung der Gruppen von Drehungen um einen festen Punkt und verdienen vor den regelmäßigen Körpern den Vorzug, da sie einmal auf die Gruppen eindeutig bezogen sind und außerdem für sie eine Erzeugung aus involutorischen Drehungen (Umwendungen oder Spiegelungen an Achsen) liefern. Die in den Modellen dargestellten Geraden bilden ein geschlossenes System von Spiegelachsen. Als Ergänzung der beiden ist das Modell Nr. 401 zu betrachten, an dem (als Durchmesser einer Kugel) drei zueinander senkrechte Geraden angebracht sind, die ein weiteres geschlossenes System ausmachen.

Der regelmäßige Fünfzehnstrahl Nr. 116 enthält fünf (durch Farben unterschiedene) Achsenkreuze, die so liegen, daß mit den Achsen (Strahlen) eines Kreuzes irgend eine weitere Achse die Winkel $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{5}$ eines Gestreckten einschließt. Dieser stereometrische Satz liefert den gruppentheoretischen: Wenn man die Spiegelung an jeder der drei Achsen eines Kreuzes mit der Spiegelung an irgend einer anderen der 15 Achsen zusammensetzt, so erhält man gerade die dreierlei in der Gruppe vorkommenden, einander nicht kongruenten, nicht involutorischen Drehungen. Aus diesem Satze folgt dann gruppentheoretisch, daß in der Ikosaedergruppe sechs einander nicht kongruente regelmäßige Vielfläche auftreten: das Ikosaeder und das Dodekaeder und die vier KEPLERSCHEN und POINSOTSCHEN Vielfläche.

Die 6 Modelle sind vom Herausgeber zuerst für das mathematische Institut der Universität Halle angefertigt worden und waren auf den Ausstellungen mathematischer Modelle in München und Chicago im Jahre 1892 ausgestellt. Nur das Oktaeder in Nr. 111 ist nachträglich eingefügt. Man vergleiche den Katalog von W. DYCK (Nachtrag 1893, S. 54).

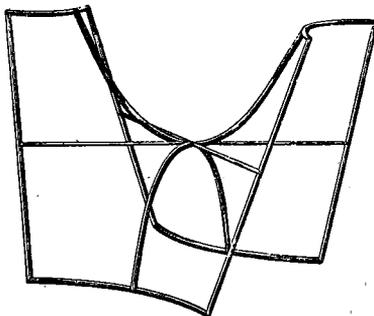
Flächen zweiter Ordnung.

IV. Reihe. Sechs Drahtmodelle der Flächen 2. O., dargestellt durch Hauptschnitte.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle *M.* 90.—

401. Kugel, Durchmesser 32 cm	<i>M.</i> 10.—
Hierzu vergleiche man die Kugel Nr. 407 in der VII. Reihe!	
402. Ellipsoid, Achsenlängen 40, 32 und 24 cm	„ 10.—
403. Zweischaliges Hyperboloid, Höhe 34 cm	„ 20.—
404. Einschaliges Hyperboloid, Höhe 34 cm	„ 20.—
405. Elliptisches Paraboloid, Höhe 28 cm	„ 8.—
406. Hyperbolisches Paraboloid, Höhe 32 cm (s. die Figur)	„ 28.—

Die Modelle bestehen im wesentlichen aus blanken Messingdrähten, in allen Fällen sind die Hauptschnitte durch 4-mm Draht angegeben, die Kugel ist durch drei aufeinander senkrechte Kreise



Nr. 406.

Maßstab 1:6.

dargestellt, und diesen sind (in Fäden) drei auf einander senkrechte Durchmesser eingespannt. Den Hyperboloiden sind die 4 Asymptoten der Hauptschnitte hinzugefügt, die Hyperboloide und das elliptische Paraboloid sind durch elliptische Schnitte begrenzt, desgleichen das hyperbolische Paraboloid (s. die Figur) durch 2 Hyperbeln und 4 Erzeugende, während außerdem die beiden Scheitelerzeugenden beifügt sind.

Den Modellen wird Nr. 6 der Abhandlungen beigegeben: „Wie sollen Flächen, insbesondere die der 2. O., gezeichnet werden?“ und

von der Abhandlung Nr. 7 der Abschnitt I.: „Reelle und ideelle Achsen und Scheitel der Flächen 2. O. Imaginäre Flächen“. Bei Bezug der ganzen Reihe erhält der Käufer die Abhandlung Nr. 7: „Über Flächen 2. Ordnung“.

Die IV. Reihe soll die Flächen 2. O. in der Form wiedergeben, wie sie bei der ersten Behandlung im Unterricht auftreten, nämlich bestimmt durch ihre Hauptschnitte. Mittels der durchsichtigen Gestalt, in der sich die Modelle als Drahtgestelle darbieten, soll gleichzeitig die Wiedergabe dieser Flächen in der Zeichnung dem Lehrer wie dem Schüler er-

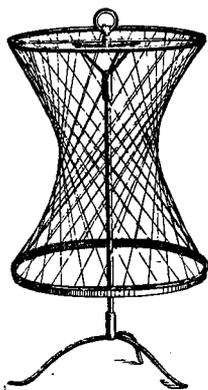
leichtert werden. Auch hier wird, wie bei den regelmäßigen Vielfachen, das Projizieren der Modelle eine zwar nicht unbedingt erforderliche, aber erwünschte Unterstützung gewähren.

Beim Ellipsoid und den beiden Hyperboloiden ist ein gemeinsames Achsenverhältnis $5:4:3$ und bei den Hyperboloiden auch gleiche Länge der Achsen gewählt. Denkt man sich das Ellipsoid durch ähnliche Verkleinerung auf dieselben Achsen gebracht und dann alle drei Flächen so in einander gesetzt, daß die gleichen Achsen sich decken, so sind die Flächen in einer besonderen Lage, in der man sie als harmonisch zugeordnete Flächen bezeichnet. Auch die Modelle der beiden Paraboloiden weisen die gleiche Beziehung auf, indem die Parabeln der Hauptschnitte der einen Fläche mit denen der anderen Fläche kongruent sind. Diese Beziehung ist deswegen von großer Wichtigkeit, weil sich aus ihr ganz elementare Konstruktionen für beliebige Punkte oder Tangenten der Flächen gewinnen lassen, falls diese durch ihre Hauptschnitte gegeben sind. In Nr. 7 der Abhandlungen wird eine rein geometrische und elementare Theorie der Flächen 2. O. mitgeteilt, die ihre Einfachheit der elementar-geometrischen Einführung des Begriffs der harmonischen Zuordnung verdankt. Diese Betrachtungen lehren beliebige Punkte oder Berührebenen aus den Hauptschnitten der Fläche zu konstruieren, ohne Anwendung von Sätzen der projektiven Geometrie. Jedoch lassen diese Konstruktionen sehr wohl eine projektive Verallgemeinerung zu.

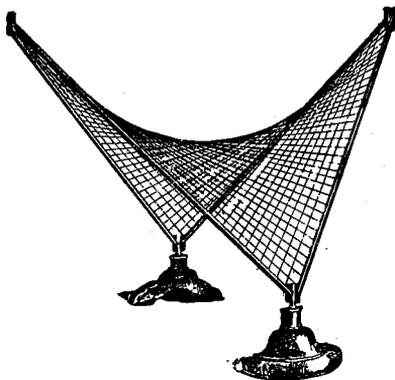
V. Reihe. Sechs bewegliche Modelle der Regelflächen 2. Ordnung.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle *M.* 210.—

a) Fadenmodelle:



Nr. 411.



Nr. 412.

Maßstab 1:10.

D. R. G. M.

207707.

411. **Bewegliches einschaliges Dreh-Hyperboloid mit Ständer**
(s. die Figur*). Höhe (mit Ständer) 44 cm. *M.* 35.—
412. **Bewegliches hyperbolisches Paraboloid mit Ständer** (s. die
Figur). Höhe (mit Ständer) 40 cm „ 45.—

Die beiden Modelle sind dem Wunsche entsprungen, bewegliche Fadenmodelle der Regelflächen 2. O. herzustellen, bei denen die Spannung der Fäden nicht durch angehängte Gewichte, sondern durch Unveränderlichkeit der Fadenlängen bewirkt wird. In beiden Modellen sind die beiden Scharen von Erzeugenden durch Fäden dargestellt.

Beim Gebrauche der Modelle ist folgendes zu beachten:

Bei 411: Der obere Teil des Modells besteht aus zwei aufeinanderliegenden gegen einander drehbaren Ringen, deren jeder mit dem unteren Ringe des Modells durch Fäden verbunden ist. Bei der Drehung eines der oberen Ringe gegen den anderen wird die Einschnürung des Hyperboloids verändert, von der Grenzlage des Zylinders bis zu der des Kegels. Man beginne beim Aufstellen des Modells stets beim Zylinder und lasse die Fäden erst gut aushängen; dann drehe man beide Ringe gegen einander und achte darauf, daß alle Fäden dauernd straff sind. Beim Niederlegen drehe man das Modell wieder zum Zylinder auf und drille dann, indem man die oberen Ringe gegen einander fest läßt, die beiden Scharen von Fäden gleichzeitig im selben Sinn möglichst weit zusammen.

Von dem Ständer kann der Ring abgehoben und die beiden Hülsen nach der Mitte zu verschoben werden, und hierauf lassen sich die drei Füße zusammenklappen.

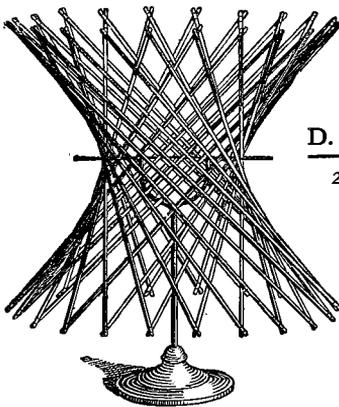
*) In der Figur 411 sind von der Anzahl der Fäden nur zwei Drittel eingezeichnet.

Bei 412: Die Bewegung wird durch vier Scharniere mit parallel (vertikal) gestellten Achsen ermöglicht; die Grenzlagen sind zwei Parabeln, in einer mittleren Lage bilden die 4 Stäbe, zwischen denen die Fäden gezogen sind, Kanten eines regelmäßigen Tetraeders. Beim Öffnen des Modells aus einer der ebenen Grenzlagen fasse man es an den beiden aufeinander liegenden Scharnieren und öffne es durch Ziehen in kurzen, ja nicht heftigen Rucken; dabei achte man darauf, daß sich beide Scharniere gleichzeitig öffnen. Allgemein beachte man bei allen Bewegungen die Regel, stets die beiden Scharniere anzufassen, die einander am nächsten sind, und beim Öffnen (bis zur Mittellage) an den beiden sich von einander entfernenden Scharnieren zu ziehen, beim Schließen (von der Mittellage an) an den beiden sich nähernden Scharnieren zu drücken.

Den Modellen wird die Abhandlung Nr. 8 beigegeben: „Bewegliche Fadenmodelle der Regelflächen 2. Ordnung mit gleichbleibenden Fadenlängen“.

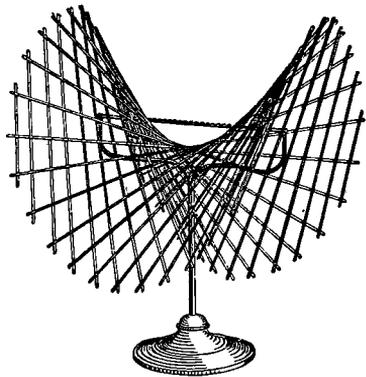
b) Stabmodelle:

Gesamtpreis der 4 Stabmodelle mit 4 Ständern *M.* 130.—



Nr. 421.

D. R. G. M.
208811.



Nr. 424.

Maßstab 1:8.

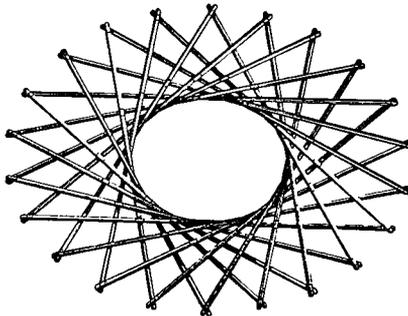
- | | | |
|------|---|----------------|
| 421. | Bewegliches einschaliges Hyperboloid (mit Grenzellipse und -Hyperbel) mit Ständer (s. die Figur). Höhe (zusammengeklappt) 36 cm | <i>M.</i> 35.— |
| 422. | Dasselbe, halb, zum Umstülpen mit Ständer (s. die Figur). Höhe (zusammengeklappt) 19 cm | „ 25.— |
| 423. | Bewegliches einschaliges Dreh-Hyperboloid (mit Grenzkreis und -Geraden) mit Ständer. Höhe (zusammengeklappt) 40 cm | „ 35.— |
| 424. | Bewegliches hyperbolisches Paraboloid mit Ständer (s. die Figur). Höhe (zusammengeklappt) 31 cm | „ 35.— |

Die Modelle bestehen aus dünnen versilberten Metallstäben, die durch eigenartige Scharniere miteinander verbunden sind. Sie können in jeder beliebigen Lage auf dem Ständer festgehalten werden. Der gewellte Stab, der dies ermöglicht, kann beim Ständer des Paraboloids aus dem federnden Bogen herausgenommen, durch das Modell hindurchgesteckt und hierauf wieder in den Bogen eingefügt werden.

Will man das Modell Nr. 422 umstülpen, so lege man es erst mit der einen Schar völlig in die Ebene des Tisches und achte darauf, daß an der Kehlellipse die Stabenden mit ihren Scharnieren richtig übereinander liegen.

Den Modellen wird die Abhandlung Nr. 9 beigegeben: „Bewegliche Stabmodelle zur Überführung einer Fläche 2. Ordnung in konfokale Flächen“, und außerdem bei Bezug der ganzen Reihe V b) die Abhandlung Nr. 7: „Über Flächen 2. Ordnung“.

Die Beweglichkeit dieser Stabmodelle beruht auf einem von O. HENRICI im Jahre 1873 aufgestellten Satze. Jedes Modell läßt sich durch die gegenseitige Drehung der Stäbe in alle geradlinigen Flächen einer Schar von konfokalen Flächen 2. O. überführen. Die Schwierigkeit einer dauerhaften Herstellung dieser Modelle beruhte darin, daß die Verbindung der Stäbe, die ja keine mathematischen Linien sind, außer der gegenseitigen Drehung um einen festen Punkt (in dem sich beide berühren) auch noch ein Herumwandern des Drehpunktes um den Umfang des Stabes gestatten muß. Dies geschieht durch „H. WIENERS geschränktes Verbindungsgelenk“ (D. R. G. M. 208811), das aus zwei seitlich mittels Zapfens verbundenen Hülsen besteht; in diesen Hülsen sind die eingefrästen Stäbe drehbar.



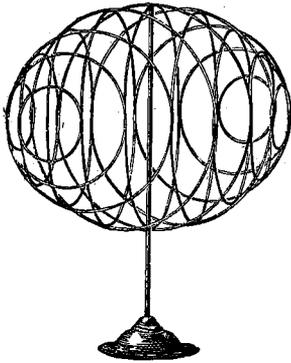
Nr. 422.

Maßstab 1:8.

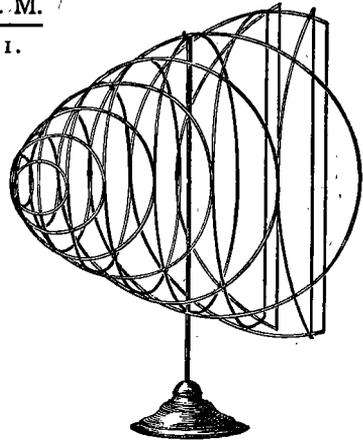
**VI. Reihe. Sechs bewegliche Drahtmodelle
der Flächen 2. O. in Kreisschnitten.**

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle
mit zwei Scheren und allem anderen Zubehör *M.* 255.—

D. R. G. M.
208811.



Nr. 425.



Nr. 426.

- | | |
|---|----------------|
| 425. Bewegliches Ellipsoid mit Ständer. Länge der unveränderlichen Achse 30 cm (s. die Figur) | <i>M.</i> 42.— |
| 426. Bewegliches elliptisches Paraboloid mit Ständer. Länge der unveränderlichen Achse der Begrenzungsellipse 44 cm (s. die Figur) | „ 42.— |
| 427. Bewegliches einschaliges Hyperboloid mit 2 Ständern. Länge der unveränderlichen Achse der Begrenzungsellipse 43 cm | „ 42.— |
| 428. Bewegliches zweischaliges Hyperboloid in 2 Schalen, mit Schere. Länge der unveränderlichen Achse der Begrenzungsellipse 38 cm | „ 42.— |
| 429. Beweglicher Kegel (Doppelkegel) mit Schere. Länge der unveränderlichen Achse der Begrenzungsellipse 41 cm | „ 48.— |
| 430. Beweglicher elliptischer Zylinder mit Ständer. Länge der unveränderlichen Achse 26 cm | „ 40.— |
| Nr. 427, 428 und 429 werden auch ineinander steckbar und gemeinsam beweglich geliefert, so daß der Kegel stets Asymptotenkegel der beiden Hyperboloide bleibt; die drei Modelle zusammen, mit 2 Ständern ohne Scheren | |
| | „ 125.— |
| Bei Bezug aller 6 Modelle werden die drei genannten Nummern gemeinsam beweglich geliefert und zum Einzelgebrauch zwei Scheren beigegeben. | |
| 429a. Beweglicher Kegel, einfach mit Ständer | „ 24.— |

Die Modelle stellen die mit zwei Scharen von Kreisschnitten behafteten Flächen 2. O. durch ihre Kreisschnitte dar; die Kreise sind aus 2 mm starkem Draht gefertigt und an ihren Kreuzungen durch „H. WIENERS geschränktes Verbindungsgelenk“ beweglich miteinander verbunden. Die Drähte sind versilbert, mit Ausnahme von Nr. 429 bei den drei ineinander steckbaren Modellen, wo der Asymptotenkegel durch Anwendung blanken Messingdrahtes hervorgerufen ist.

Das Ellipsoid, das Paraboloid und der Zylinder werden auf die Stange eines Ständers aufgehängt und können so in ihre verschiedenartigen Gestalten übergeführt werden. Beim einschaligen Hyperboloid werden zwei Ständer verwendet, beim zweischaligen Hyperboloid und dem zweiteiligen Kegel wird jeder Teil auf 2 Stangen aufgesetzt, während alle 4 Stangen durch eine Nürnberger Schere gemeinsame Führung erhalten. Bei den drei ineinander gesteckten Modellen übernimmt das einschalige Hyperboloid die Führung, so daß hier die Scheren wegfallen.

Die Aufhängung auf den Stangen hat stets so zu geschehen, daß die horizontale Achse der Fläche 30 cm über die Tischfläche zu liegen kommt.

AL. BRILL hat von den Flächen 2. O. Kreisschnittmodelle veröffentlicht, bei denen die beiden Kreisscharen in prismatischer Führung gegeneinander beweglich gemacht sind, indem die aus Pappe gefertigten Kreisscheiben in ihren parallelen Schnittgeraden durcheinander gesteckt sind.*) In den vorliegenden Modellen werden die Pappkreise durch solche aus Draht ersetzt, und um dies ohne Beeinträchtigung der Herstellbarkeit und der Beweglichkeit tun zu können, wird an Stelle der parallelen Drehachsen die Verbindung durch das „geschränkte Verbindungsgelenk“ (vgl. die Stabmodelle in der V. Reihe) gesetzt. Es läßt sich beweisen, daß bei Annahme unendlich dünnen Drahtes (wie er auch bei der V. Reihe vorausgesetzt werden muß) für jede Stelle und in allen Lagen die Drehung um jene parallelen Achsen durch das Gelenk geleistet wird; und bei der gewählten geringen Dicke der Drähte weicht die tatsächliche Bewegungsfähigkeit des Modells von der mathematisch geforderten nur unbedeutend ab, wie aus der zwangsfreien Beweglichkeit und der nur ganz geringen Deformation der Drahtkreise ersichtlich ist.

Ersetzt man die Kreisschnitte einer Fläche 2. O. durch das den ganzen Raum erfüllende System der beiden Parallelebenenbüschel, in denen die Kreise enthalten sind, und denkt man die Ebenen des einen Büschels gegen die des anderen um ihre parallelen Schnittgeraden drehbar gemacht, so erhält man ein räumliches System, das bei einer jeden durch diese prismatische Führung ermöglichten Veränderung zur ursprünglichen Lage affin bleibt**); daraus folgt, daß die Modelle in allen Lagen Flächen 2. Ordnung mit Kreisschnitten darstellen, wenn dies in einer einzigen Lage der Fall ist. Eine den Raum erfüllende Schar

*) Die erste Anregung zu solchen Modellen ist, wie bei den Stabmodellen der V. Reihe, auf O. HENRICI zurückzuführen. Vgl. den DYCKschen „Katalog mathematischer Instrumente“ (München 1892) S. 258.

***) L. BURMESTER. Zeitschr. für Math. u. Physik. 47. Band (1902) S. 156.

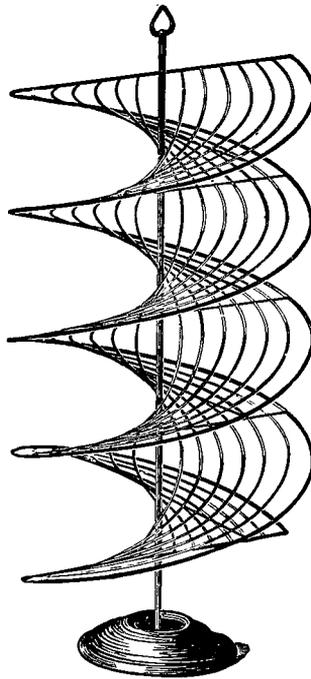
ähnlicher und ähnlich liegender Flächen 2. O. behält bei der Veränderung des Systems diese Eigenschaft, insbesondere geht ein Kegel mit der Gesamtheit aller Flächen, die ihn zum Asymptotenkegel haben, in ein ebensolches Flächensystem über. Diese Eigenschaft geben die drei vereinigten Modelle wieder. Für alle ähnliche und ähnlich liegende Flächen (bezw. für solche mit gemeinsamem Asymptotenkegel) liegen die Mitten der Kreisschnitte in zwei Geraden, und diese treffen eine jede Fläche in ihren „Kreispunkten“ (Nabelpunkten). Diese sind beim Ellipsoid und beim zweischaligen Hyperboloid in der Zahl vier, beim Paraboloid in der Zahl zwei reell, beim einschaligen Hyperboloid aber imaginär, während sie beim Kegel und Zylinder in den Doppelpunkt zusammenfallen.

Das ganze räumliche System, das in der angegebenen Weise beweglich ist, und in ihm auch die dargestellten Flächen, lassen zwei Grenzlagen zu, in denen die Ebenen beider Scharen nach der einen oder anderen Seite hin in eine einzige Ebene zusammenklappen. Die Kreise sind so gewählt, daß dabei (abgesehen von der einen Grenzlage des elliptischen Paraboloids) stets zwei Kreise von beiderlei Scharen zur Deckung kommen. Die Fläche 2. O. entartet dabei in einen reellen oder imaginären Grenzkegelschnitt, der von zwei ineinander geklappten Kreisen an den beiden Stellen berührt wird, an denen sie sich vorher kreuzten. Die Kreispunkte gelangen mit den Brennpunkten des Grenzkegelschnittes zur Deckung. Aus dem Ellipsoid (Nr. 425) entsteht so als Grenzfläche beide Male der von den Kreisen doppelt überdeckte Innenraum einer Ellipse; beim Kegel (Nr. 429) ist es das eine Mal ein durch ein reelles Geradenpaar begrenzter Winkel mit seinem Scheitelwinkel, das andere Mal überdecken die Kreise, zwei imaginäre Geraden berührend, die ganze Ebene doppelt; bei den drei vereinigt beweglichen Flächen (Nr. 427, 428, 429) wird das Geradenpaar des zusammengeklappten Kegels zum Asymptotenpaar der Grenzkegelschnitte, und man erhält somit in der ersten Grenzlage Hyperbeln, in der zweiten (wegen des imaginären Asymptotenpaares) Ellipsen. Dabei füllen im ersten Falle die doppelt berührenden Kreise des einschaligen Hyperboloids das Äußere, die des zweischaligen Hyperboloids das Innere der Hyperbeln aus, wie dies dem Imaginär- und Reellsein des Brennpunktpaares auf der einen und anderen Hyperbelachse entspricht, in die sich die Kreismitten hinein klappen. Im zweiten Fall ist die Grenzfläche des einschaligen Hyperboloids das Äußere einer reellen Ellipse, die des zweischaligen Hyperboloids die ganze doppelt überdeckte Ebene mit imaginärer Grenzellipse. Beim elliptischen Paraboloid erhält man als die eine Grenzfläche das von doppelt zählenden Kreisen überdeckte Innere einer Parabel, als zweite zwei konzentrische Kreisbüschel, deren jedes die ganze Ebene überdeckt, und deren Grenzkurve in die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte zerfällt. Beim hyperbolischen Paraboloid sind als Kreisschnittebenen diejenigen

anzusehen, die durch Erzeugende und die Achsenrichtung gelegt sind. Es tritt hier also das Modell Nr. 424 ergänzend ein; jede der beiden Grenzflächen bildet den von den Tangenten der Grenzparabel überdeckten Teil der Ebene.

In diesen Betrachtungen sind von den drei Paaren von Kreisschnittscharen der Mittelpunktsflächen (oder von den zwei Paaren beim elliptischen Paraboloid) nur die reellen erwähnt, und damit hängt es zusammen, daß für jeden Grenzkegelschnitt einer Fläche nur ein System doppelt berührender Kreise auftritt, deren Berührsehnen den Drehachsen der prismatischen Führung parallel sind. Das andere System doppelt berührender Kreise, dessen Berührsehnen auf den vorigen senkrecht stehen, gehört zu den imaginären Kreisschnitten, von denen in der Grenzlage je zwei beim Zusammenfallen reell werden.

Die geometrischen Eigenschaften der hier auftretenden imaginären Gebilde verdienen besondere Beachtung.

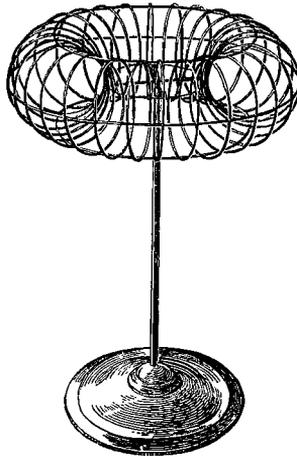


Nr. 512.

Dreh- und Schraubenflächen.

VII. Reihe. Sechs Drahtmodelle von Dreh- und Schraubenflächen.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle mit allem Zubehör *M.* 525.—. (Mit Einschluß von Nr. 512a *M.* 535.—.)



Nr. 501.

407. Kugel mit Parallelkreisen, nebst Holzfuß. Durchmesser 32 cm *M.* 18.—
501. Kreisring mit Meridiankreisen (s. die Figur), nebst 2 Achsen, Holzfuß und Handgriff, drehbar auf dem Fuß und der kleineren Achse stehend, sowie freihändig an der größeren Achse und dem Handgriff. Durchmesser der Meridiankreise 13 cm, größter Durchmesser 39 cm „ 50.—
503. Urne, Drehfläche einer zur Sinuslinie affinen Meridiankurve, nebst Achse, Fuß und Handgriff. Auf der Achse stehend und freihändig drehbar. Höhe 52 cm, größter Durchmesser 27 cm „ 65.—
512. Wendelfläche (gerade geschlossene Schraubenfläche) mit Haupttangentialkurven (Schraubenlinien) (s. die Figur), 2 Umgänge beiderseits der Achse, nebst Fuß und Handgriff, drehbar, Abstand der äußersten Erzeugenden 60 cm. Durchmesser 36 cm „ 100.—
- 512a. Ausschnitt aus der vorigen Fläche, ein viertel Umgang, einseitig der Achse nebst Fuß. Abstand der äußersten Erzeugenden 15 cm „ 10.—

514. Schiefe geschlossene Regelschraubenfläche mit Haupttangentialkurven, nebst Fuß und Handgriff, drehbar; zwei Umgänge, Höhe (zwischen den beiden Grenzebenen gemessen) 60 cm, Durchmesser 40 cm „ 175. —
515. Schrauben-Röhrenfläche mit Kreischnitten, nebst Fuß und Handgriff, drehbar; zwei Umgänge, Höhe (zwischen den äußersten Punkten der Kreise gemessen) 65 cm, Durchmesser der Kreise 13 cm, Durchmesser 39 cm „ 120. —
- Galgen zum drehbaren Aufhängen der Schraubenmodelle Nr. 512, 514 und 515 an der Tafel oder dem Projektionsschirm „ 1.50

In diesen Modellen sollen die Mißstände vermieden werden, die bei Darstellung von Flächenformen durch Gipsmodelle deshalb auftreten, weil in erster Linie der Körper dargestellt wird und nur in zweiter Linie seine Oberfläche, und weil bei der Undurchsichtigkeit des Materials nur ein beschränkter, dem Auge jeweils zugewandter Teil aufgefaßt werden kann. Die Vorzüge, die bei Fadenmodellen zu Tage treten, legen es nahe, ganz allgemein Flächen durch Scharen von Linien darzustellen, die die Fläche überdecken und durch Drähte veranschaulicht werden. Eine Kugel (Nr. 407), die in dieser Weise durch Parallelkreise hergestellt war, ein Kreisring, sowie die aus Schraubenlinien gebildete zu beiden Seiten der Achse verlaufende Wendelfläche (Nr. 512) wurde von H. WIENER im Jahre 1896 anlässlich der Frankfurter Naturforscherversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vorgezeigt. Die hier vorliegenden Modelle sind im Vergleich zu den damals vorgezeigten noch insofern verbessert, als sie drehbar gemacht sind. Versetzt man nun ein solches Modell in eine (nicht zu rasche) Drehung, so bringen die blanken Messingdrähte, aus denen die Meridiankurven bestehen, einen hellen Schimmer hervor, der an den Rändern besonders glänzend und dabei völlig durchsichtig ist, und damit ist eine auch die verdeckten Teile sichtbar machende und durchaus stetige Darstellung der Flächen gewonnen.

Die Methode des Drehens läßt sich auch auf Schraubenflächen anwenden; nur scheinen sich diese in der Richtung der Achse zu verschieben.

Um die Erscheinung möglichst deutlich zu machen, wähle man die schwarze Wandtafel als Hintergrund und benütze hierzu bei den Schraubenflächen den an der Tafel aufschraubbaren „Galgen“, in den ein am oberen Ende der Achse drehbarer Ring eingehängt wird, während ein Handgriff das untere Ende drehbar aufnimmt.

Besonders schön treten die Flächenformen hervor, wenn man sie im Drehen aus einer Lichtquelle auf einen weißen Schirm Schatten werfen läßt, ein Verfahren, das sich bei verdunkelbaren Hörsälen ohne Mühe anwenden läßt, und das bei den meisten Modellen gegenüber dem bloßen Vorzeigen erhebliche Vorteile bietet. *)

Eine überraschende Erscheinung zeigt sich beim Drehen der Drehflächen, indem eine Anzahl feststehender Linien entstehen, und zwar im Schatten helle Linien, den dem Schirm zugewandten Flächenteilen

*) Man vgl. hierzu die Nr. 1 der „Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle“, B. G. Teubner in Leipzig, sowie H. WIENERS Vorträge und Bericht über die Modellausstellung in den „Verhandlungen des 3. Intern. Math.-Kongresses“ Leipzig 1905.

angehörend, im Modell selbst dunkle Linien auf seinen hinteren Teilen. Beide bilden zusammen ein System von „Verdeckungslinien“.*) Bei den Schraubenflächen bleiben sie zwar sich selbst kongruent, verschieben sich aber in der Richtung der Achse.

Die Wahl des Liniensystems für die Darstellung der Fläche hängt von den Eigenschaften der Fläche ab, die man hervorheben will. Parallelkreise sind nur bei der Kugel (Nr. 407) angewandt, da hier auf das Drehen verzichtet werden kann; es ist eine solche Schar von Parallelkreisen gewählt, deren Ebenen in gleichen Abständen aufeinanderfolgen, wie sie in den Helligkeitsstufen bei Parallelbeleuchtung auftreten. Beim senkrechten Projizieren liefern diese Kreise ähnliche und paarweise ähnlich liegende Ellipsen, die vom Umrißkreis in zwei reellen oder imaginären Punkten von außen berührt werden; den Übergang zwischen beiderlei Berührung bildet eine Ellipse, für die der Umriß ein umfassender Scheitel-Krümmungskreis ist. Bei schiefer Parallelprojektion auf eine zu den Kreisen parallele Tafel erscheinen diese als eine Schar von Kreisen, die die Umrißellipse reell oder imaginär von innen doppelt berühren; den Übergang bildet der von innen berührende Scheitel-Krümmungskreis; von Grenzgebilden treten die Brennpunkte als Nullkreise auf.

Beim Kreisring (Nr. 501) lassen die Meridiankreise die Linie des scheinbaren Umrisses als ihre Hüllkurve erscheinen (s. die Figur). Der innere Umriß ist ein viergespitzter Linienzug, der in allen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie abgebildet ist, aber an den bisherigen Modellen nur in seinem kleinsten Teil sichtbar war. Durch Lagenänderung der Achse gegen das Auge kommen die verschiedenen Formen dieser Kurve zur Anschauung. Die Fläche ist wegen ihrer technischen Anwendungen und wegen der Fülle schöner geometrischer Eigenschaften ein beliebter Gegenstand des Unterrichts, es gewähren z. B. die obenerwähnte Umrißlinie als Schattengrenze, ihr Schlagschatten, und die Hellegleichen der Fläche sehr einfache Konstruktionen.

Um ähnliche Aufgaben für beliebige Drehflächen zu lösen, ist das Beispiel des Kreisrings gerade wegen der Menge besonderer Eigenschaften wenig geeignet. Diesem Zwecke dienlicher ist die Urne (Nr. 503), eine Drehfläche, für deren Meridian eine zur Sinuslinie affine Kurve gewählt ist. Da an der Sinuslinie, und damit auch an ihrem affinen Bilde die Tangente und die Schmiegungeellipse (die die Krümmung bestimmt) für einen beliebigen Punkt leicht zu finden ist, bietet die strenge konstruktive Durchführung der obigen Aufgaben keine Schwierigkeit.

Unter den Schraubenflächen nimmt die Röhrenfläche (Nr. 515) eine entsprechende Stellung ein, wie der Kreisring unter den Drehflächen. Auch hier sind die Umrisse mit ihren an der Grenze zwischen vorderen

*) H. WIENER, „Entwicklung geometrischer Formen“, Verhandlungen des 3. Intern. Math.-Kongresses, Leipzig 1905.

und verdeckten (im Modelle sichtbaren) Teilen auftretenden scheinbaren Spitzen zu beachten.

Eine andere Klasse von Erscheinungen sollen die beiden Regelschraubenflächen veranschaulichen. Für das Erfassen negativ gekrümmter Flächen im Bilde ist das System der Haupttangentenkurven (Asymptotenkurven) wichtig, die durch Aneinanderreihen aufeinanderfolgender Haupttangenten entstehen, d. h. der an einer negativ gekrümmten Stelle der Fläche konstruierten Asymptoten der DUPINSchen Indicatrix (oder anders ausgedrückt der Flächentangenten, die wenigstens drei aufeinanderfolgende Punkte mit der Fläche gemein haben). Die obenerwähnten scheinbaren Spitzen treten an solchen Stellen auf, wo eine Haupttangente durch das Auge geht; ist dies aber an einer Stelle, wo die Asymptotenkurve um den wahren Umriß herumgeht, nicht der Fall, so hat diese einen scheinbaren Wendepunkt. Der scheinbare Umriß ist also der Ort der scheinbaren Wendepunkte der Asymptotenkurven, gleichzeitig ist er aber auch Hüllkurve der Wendepunktetangenten.

Auf Regelflächen (die nicht von der 2. Ordnung oder abwickelbar sind) zerfallen die Asymptotenkurven in zwei getrennte Scharen, nämlich in die Regelschar und in eine krummlinige Schar. Da die beiden Asymptotenrichtungen eines Flächenpunktes zu allen konjugierten Richtungen des Punktes harmonisch sind, kann man bei Regelflächen aus der bekannten Richtung der geraden Erzeugenden und einem (günstig gewählten) Paare konjugierter Richtungen die Richtung der krummen Asymptotenlinie und damit die Richtungen aller konjugierten Paare finden; daraus ergeben sich mancherlei Anwendungen auf die Konstruktion von Schattengrenzen, Hellegleichen und auf ähnliche Aufgaben.

Auf der **Wendelfläche** (Nr. 512) treten als Haupttangentiallinien neben der (zur Achse senkrechten) Regelschar die Schraubenlinien auf, die zugleich Bahnlinien bei der Erzeugung der Fläche durch Schraubung sind. Im Modell erscheinen diese Kurven für ein unendlich fernes Auge als eine Schar von Zykloiden, und zwar scheidet eine Schraubenlinie, die als gespitzte Zykloide erscheint, zweierlei Gebiete, deren eines verschlungene, das andere geschweifte Zykloiden zum Bilde hat; die Wendepunkte selbst sind die obenerwähnten Punkte des scheinbaren Umrisses, der seinerseits eine gespitzte Zykloide von halber Höhe und halber Ganglänge ist. Sein Urbild auf der Fläche, d. h. der wahre Umriß, ist eine Schraubenlinie ganz anderer Art als die genannten; sie gehört der Schar von Schraubenlinien an, die durch Drehzylinder mit einer in die Achse fallenden Erzeugenden ausgeschnitten werden, und die zur Ganghöhe die halbe Ganghöhe der Schraubenfläche haben. Eine solche Kurve in zwei Umgängen ist dem Modell beigegeben und kann durch die Achse durchgesteckt werden.

Ein **Ausschnitt der Wendelfläche** (Nr. 512a) soll die Steigung der Bahnschraubenlinie in ihrer Abhängigkeit vom Radius veranschaulichen.

Die schräge geschlossene Schraubenfläche (Nr. 514) besitzt als krumme Haupttangentiallinien eine Schar kongruenter Kurven, deren senkrechte Projektion auf die zur Achse senkrechten Ebenen hyperbolische Spiralen sind, wie sich geometrisch unmittelbar aus der vorhin erwähnten Konstruktion der zweiten Haupttangentialrichtung eines Punktes ergibt. Die Haupttangentialkurve selbst liegt auf einer Drehfläche, die die Schraubenachse zur Drehachse und eine Hyperbel zur Meridianlinie hat, wobei die eine Hyperbelasymptote mit der Drehachse, die andere mit der Erzeugenden der Schraubenfläche zusammenfällt. Die Haupttangentialkurve windet sich aus der Richtung jener Erzeugenden kommend und immer steiler werdend unendlich oft um die Schraubenachse, der sie sich asymptotisch nähert.

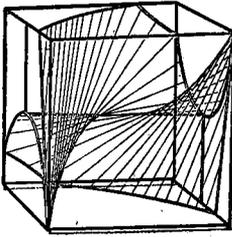
Im Modell sind die geraden Erzeugenden, in ein Achtel Umdrehung aufeinander folgend, durch die Achse durchgeführt, so daß ein oberer Mantel der Fläche mit einem unteren an der Achse stetig zusammenhängt. Als äußere Begrenzung ist eine Schraubenlinie gewählt, in der sich beide Mäntel durchsetzen, während eine zweite solche Schraubenlinie, durch einen aufgelegten Draht bezeichnet, im Innern verläuft; beide zusammen begrenzen ein Stück des Modells, das eine scharfgängige Schraube darstellen kann.

Die Haupttangentialkurven sind gleichfalls in Abständen von ein Achtel Umdrehung auf beiden Mänteln angebracht, zum Teil an der Randschraubenlinie beginnend, zum Teil aus den Archimedischen Spiralen herauswachsend, durch die die Schraubenfläche noch unten und oben begrenzt wird. In der Nähe der Achse verdichten sich die Kurven, so daß sie in einem gewissen Abstand von der Achse abgebrochen werden mußten.

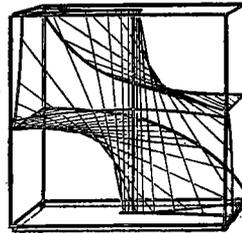
Um beiderlei Linien deutlich zu unterscheiden sind die Erzeugenden durch rote Farbe hervorgehoben, während die Haupttangentialkurven aus blankem Messingdraht gefertigt sind.

Raumkurven.

VIII. Reihe. Sechzehn Fadenmodelle der Singularitäten von Raumkurven.



Nr. 321.



Nr. 329.

Diese Modelle sind auf Anregung von Prof. Dr. H. WIENER berechnet und konstruiert vom Stud. der Mathematik J. HÖRLEIN.

Die Reihe stellt Raumkurven durch die abwickelbaren Flächen ihrer Tangenten dar, und zwar in 16 Modellen die acht Fälle von Singularitäten, die an einer Stelle einer Raumkurve auftreten können, je nachdem der Punkt, die Tangente und die Schmiegungeebene ein fort schreitendes oder ein rückkehrendes Element ist, und ferner für die viererle-Lagen dieser Stelle gegen das unendlich Ferne, je nachdem

- 1) der Punkt (mit seiner Tangente und Schmiegungeebene) endlich ist;
- 2) der Punkt unendlich fern ist, während seine Tangente (und damit auch seine Schmiegungeebene) ins Endliche reicht;
- 3) die Tangente (und damit auch der Punkt) unendlich fern ist, während seine Schmiegungeebene ins Endliche reicht;
- 4) die Schmiegungeebene (und damit auch der Punkt und die Tangente) unendlich fern ist.

In jedem Modell sind an zwei Stellen I und II je einer der 8 Fälle veranschaulicht, wobei die beiden Stellen duale Singularitäten besitzen. Die ersten acht Modelle (Gruppe A, Nr. 321 bis 328) geben die Lage 1) und 4) an der Stelle I und II wieder, die weiteren acht die Lage 2) und 3) an der Stelle I und II.

Der Preis beträgt

für jedes Modell der Gruppe A	M	40.—
„ „ „ „ „ B	„	45.—
„ je 4 Modelle „ „ A	„	155.—
„ „ 4 „ „ B	„	175.—
„ alle 16 Modelle	„	660.—

Die Größe jedes Modells ist 24 cm im Würfel.

Bezeichnet man*) das Fortschreiten eines Elementes mit —, das Rückkehren mit +, so sind die 8 Fälle in der folgenden Tabelle enthalten, von der jedes Feld das Zeichen des Punktes, der Tangente und der Schmiegungebene (in dieser Reihenfolge) enthält:

Gruppe A, Nr.	321	322	323	324	325	326	327	328
Gruppe B, Nr.	329	330	331	332	333	334	335	336
Stelle I	---	---+	-+--	+---	-++	+--+	+-+	+++
Stelle II	---	+---	-+--	---+	++-	+--+	-++	+++

Das erste Modell jeder Gruppe (321 und 329) stellt eine singularitätenfreie Raumkurve dar, die drei folgenden zeigen an jeder der beiden Stellen eine Rückkehrschmiegungebene oder eine Rückkehrtangente oder einen Rückkehrpunkt. Diese 4 Modelle jeder Gruppe geben also die wichtigsten Vorkommnisse an. In den folgenden drei Modellen sind zwei und im letzten drei Rückkehrelemente gehäuft.

Die Raumkurve ist durch eine Folge von Tangenten, also durch ihre abwickelbare Fläche dargestellt, bei der zweiten Gruppe ist die geradlinige Asymptote der Stelle I und eine asymptotische ebene Parabel (zweiter oder höherer Ordnung) der Stelle II hinzugefügt; für letztere ist der Schnitt der Schmiegungebene des unendlich fernen Punktes II mit dem Zylinder gewählt, durch den die Kurve in der Richtung des unendlich fernen Punktes I projiziert wird.

Als Begrenzung ist ein Würfel gewählt, in dessen Mitte bei der ersten Gruppe der Punkt I gesetzt ist, während seine Tangente und Schmiegungebene parallel einer Seite und Kante des Würfels gestellt ist. Bei der zweiten Gruppe ist die Asymptote der Stelle I und die dazu senkrecht gestellte asymptotische Schmiegungebene der Stelle II parallel einer Kante und einer Seite des Würfels gestellt, ihr Schnittpunkt ist in die Mitte des Würfels gesetzt.

Der Grenzwürfel ist durch seine Kanten in schwarzem Draht angegeben, seine Schnittlinien mit der abwickelbaren Fläche in blanken Messingdrähten, die durchbohrt sind und die Fäden zur Darstellung der Tangenten tragen. Die Doppelkurven der abwickelbaren Fläche sind in dünnem blanken Messingdraht, und die geradlinigen und parabolischen Asymptoten der zweiten Gruppe in roten Drähten eingefügt.

Um den Verlauf einer Raumkurve zu verdeutlichen, ist keine Darstellung so geeignet, wie ein Fadenmodell ihrer abwickelbaren Tangentenfläche.***) Denn an einem solchen Modell tritt außer den Tangenten selbst in der scharfen Schneide der Fläche die Punktkurve deutlich hervor, während die durch je zwei aufeinanderfolgende (unendlich nahe gedachte) Tangenten gelegten Ebenen, die Schmiegungebenen angeben und so die Raumkurve als Hüllkurve ihrer Schmiegungebenen erscheinen lassen.

*) Nach v. STAUDT, Geometrie der Lage S. 110. Die umgekehrte Bezeichnung hat CHR. WIENER, Lehrbuch der darst. Geom. I. Band S. 214 gewählt, jedoch spricht für die erstere, daß — 1 die Charakteristik der Spiegelung ist, auf die es, wie im folgenden gezeigt wird, hier ankommt.

**) In der Sammlung des Lehrstuhles der darstellenden Geometrie zu Karlsruhe finden sich außer den bekannten Drahtmodellen der Singularitäten von Raumkurven eine zugehörige Reihe von Fadenmodellen, die CHR. WIENER durch seine Schüler hat herstellen lassen. Ferner hat BJÖRLING in Lund eine Reihe solcher Modelle veröffentlicht. Beide Reihen beschränken sich auf Darstellung einer endlich gelegenen Stelle und weichen auch in der Ausführung wesentlich von den hier gegebenen ab.

Dieser Vorteil aber tritt weit mehr als bei den im Endlichen verlaufenden Kurventeilen bei solchen hervor, die sich ins Unendliche erstrecken. Denn rückt (Gruppe B) der Punkt ohne seine Tangente und Schmiegungeebene ins Unendliche, so ist seine Tangente (Asymptote) eine Erzeugende der im Endlichen zu verfolgenden abwickelbaren Fläche und nur die Schneide der Fläche geht, jener Erzeugenden sich asymptotisch nähernd, ins Unendliche. Rückt aber auch die Tangente ins Unendliche, während die Schmiegungeebene im Endlichen bleibt, so kann an dieser der Verlauf der Fläche ohne weiteres verfolgt werden und der der Kurve insofern, als jene Schmiegungeebene aus der abwickelbaren Fläche eine Parabel (zweiter oder höherer Ordnung) ausschneidet, der sich die Kurve asymptotisch nähert*), während sich die Schmiegungeebene des hinausrückenden Punktes in die des unendlich fernen Punktes hinein dreht.

Am schwierigsten ist es (Gruppe A, Stelle II), sich von dem Verlauf einer Raumkurve Rechenschaft zu geben, wenn an der betrachteten Stelle außer dem Punkte und der Tangente auch die Schmiegungeebene ins Unendliche rückt. Da die in dieser Ebene sich anschmiegende Kurve selbst ins Unendliche fällt, muß man zur Untersuchung des Verlaufes durch weitere der unendlich fernen Stelle benachbarte Elemente eine anschmiegende Kurve legen; dies wird dann eine Raumkurve sein. Die Modelle der Gruppe A enthalten Kurven, die als solche anschmiegende Raumkurven einfachster Art aufzufassen sind, und es ist zu zeigen, wie an ihnen der Verlauf ins Unendliche verfolgt werden kann: Man bringe zuerst die Richtung des unendlich fernen Punktes und die Stellung seiner unendlich fernen Tangente in eine bequem zu verfolgende Lage, erstere etwa vertikal aufsteigend, letztere sich vertikal von vorn nach hinten erstreckend (vgl. die Figur Nr. 321). Hierauf denke man sich durch die Raumkurve einen Zylinder (zweiter oder höherer Ordnung) gelegt, dessen Erzeugende nach dem unendlich fernen Punkte der Raumkurve, also vertikal gerichtet sind. Diesen Erzeugenden nähern sich die nach beiden Seiten hinauswandernden Tangenten asymptotisch, wie man im Modell an den beiden äußersten Teilen der abwickelbaren Fläche leicht verfolgen kann, und vereinigen sich im Unendlichen in der durch jene vertikale Ebene angegebenen Stellung, also in der unendlich fernen Erzeugenden des Zylinders.

Die in den Modellen wiedergegebenen Raumkurven können als einfachste ihrer Art bezeichnet werden, weil sie rationale Kurven niedrigster Ordnung sind, die an einer Stelle eine vorgeschriebene Singularität und an einer zweiten die dazu duale enthalten, zwischen beiden aber völlig singularitätenfrei verlaufen, und weil sie ferner ein größtes Maß von Symmetrie besitzen.

Durch die Art der Symmetrie erhält man aber ein einfaches, und wie es scheint, bisher nicht beachtetes Merkmal zur Unterscheidung der

*) In den Modellen ist als parabolische Asymptote eine andere gewählt (vgl. oben), die bei der Besonderheit der gewählten Raumkurven dasselbe leistet, wie die hier erwähnte.

acht Fälle. Man gehe zunächst, wie dies auch sonst geschieht, von drei Ebenen aus, von denen die eine die Schmiegungeebene der betrachteten Stelle ist, während die zweite durch die Tangente und die dritte durch den Punkt hindurchgeht. Diese drei Ebenen, die man, um nicht auf schiefe Symmetrien geführt zu werden, paarweise zueinander senkrecht annehme, teilen den Raum in Oktanten, aus deren einem kommend die Kurve in die Stelle einläuft, während ihr Fortschreiten aus der Stelle heraus gleichfalls in irgendeinem der Oktanten erfolgen kann. Dieser letztere Oktant kann achterlei Lagen gegen den ersteren haben, und damit erhält man die 8 Fälle. Nun geht aber der erste Oktant, wenn er nicht gerade mit dem zweiten identisch ist, in ihn über durch eine Spiegelung entweder an einer der drei Ebenen, oder an einer der drei Schnittgeraden, oder an ihrem Schnittpunkt. Von diesen sieben Spiegelungen sind die an Punkt, Tangente und Schmiegungeebene ausgezeichnet, und die anderen vier lassen sich als Folge von je zwei dieser drei Spiegelungen oder von allen dreien darstellen. Indem man z. B. an Punkt, Tangente und Schmiegungeebene spiegelt (gleichviel in welcher Reihenfolge) erhält man die Lage des zweiten Oktanten zum ersten, die einer singularitätenfreien (gewöhnlichen) Stelle entspricht. Allgemein gilt der Satz, daß an der betrachteten Stelle dasjenige der drei Elemente Punkt, Tangente, Schmiegungeebene eine Rückkehr hat, das in dieser Spiegelfolge nicht benützt ist, und dasjenige ein Fortschreiten, das benützt ist.)*

In den Modellen sind die Raumkurven so gewählt, daß nicht nur die Oktanten, sondern auch die beiden Teile der Raumkurve selbst in der verlangten Weise ineinander gespiegelt werden, beim achten Fall (Nr. 328), in dem die Kurve an der betrachteten Stelle eine Rückkehr des Punktes, der Tangente und der Schmiegungeebene vereinigt zeigt, läuft die Kurve in denselben Oktanten zurück, aus dem sie kommt.

Da im projektiven Sinne die Spiegelung an einem Punkt oder an einer Ebene oder an einer Geraden eine harmonische Spiegelung an diesem Element und an der unendlich fernen Ebene oder an dem zur Ebene in senkrechter Richtung unendlich fern gelegenen Punkte oder an der zur Geraden in senkrechter Stellung unendlich fern gelegenen Geraden bedeutet, so folgt aus der gewählten Lage der dreierlei Elemente beider Stellen, daß an II die duale Singularität herrschen muß zu der an I.

In der Gruppe A bilden die Punkte der Stellen I und II Ecken, die Tangenten Gegenkanten, die Schmiegungeebenen Seiten eines Tetraeders, von dem eine Seite unendlich fern liegt. Bildet man dieses Tetraeder kollinear in sich ab, so daß die Punkte der Stellen I und II ins Unendliche fallen, so erhält man aus den 8 Fällen der Gruppe A die der Gruppe B. Auch diese zeigt, abgesehen vom letzten Fall, die Kurven in symmetrischen Gestalten.

*) Vgl. H. WIENER in den Verh. des III. Int. Math. Kongr. a. a. O. Zusatz II.

Die Kurvengleichungen für die Gruppe A, bezogen auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, das den Punkt I zum Nullpunkt, seine Tangente zur x-Achse, seine Schmiegungeebene zur Ebene $z = 0$ und 1 cm als Längeneinheit auf jeder Achse hat, wobei $t = 0$ die Stelle I bedeutet, lauten:

Nr. 321:	$x = 12t,$	$y = 12t^2,$	$z = 12t^3$
„ 322:	$x = 12t,$	$y = 12t^2,$	$z = 12t^4$
„ 323:	$x = 12t,$	$y = 12t^3,$	$z = 12t^4$
„ 324:	$x = 12t^2,$	$y = 12t^3,$	$z = 12t^4$
„ 325:	$x = 12t,$	$y = 12t^3,$	$z = 12t^5$
„ 326:	$x = 12t^2,$	$y = 12t^3,$	$z = 12t^5$
„ 327:	$x = 12t^2,$	$y = 12t^4,$	$z = 12t^5$
„ 328:	$x = 12t^2,$	$y = 8t^4 + 2t^5 + 2t^6,$	$z = 9t^6 + \frac{3}{2}t^7 + \frac{3}{2}t^8.$

Durch eine räumliche Kollineation gehen diese Kurven, wie oben erwähnt, in die der Gruppe B über.



Bestell-Zettel.

Bei der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in Leipzig, Poststr. 3,
bestellt der Unterzeichnete

H. Wieners Sammlung mathematischer Modelle.

Daraus: 59 Modelle mit allem Zubehör *M.* 1800.—

I. Reihe. 7 Drahtmodelle zum Projizieren. *M.* 65.—

Daraus einzeln:	
1. Quadrat	<i>M.</i> 6.—
2. Regelmäßiges Fünfeck	„ 9.—
3. Regelmäßiges Sechseck	„ 7.—
11. Kreis mit Quadrat	„ 10.—
Hierzu Drehachse mit Drehkopf	„ 3.50
12. Rechtwinkelige Hyperbel	<i>M.</i> 16.—
Hierzu Drehkopf	„ 2.40
13. Parabel	„ 7.50
21. Sinuslinie	„ 7.50

II. Reihe. 5 Drahtmodelle der regelmäßigen Vielfache. *M.* 60.—

Daraus einzeln:	
101. Tetraeder	<i>M.</i> 7.—
102. Würfel	„ 11.—
103. Oktaeder	„ 11.—
104. Dodekaeder	<i>M.</i> 16.—
105. Ikosaeder	„ 16.—

III. Reihe. 6 Drahtmodelle mit Fäden: Höhere regelmäßige Vielfache. Regelmäßige räumliche Vielstrahlen. *M.* 115.—

Daraus einzeln:	
111. Würfel mit 2 Tetr. und Okt.	<i>M.</i> 16.—
112. Dodekaeder mit 5 Würfeln	„ 20.—
113. Dodekaeder mit Ikosaeder	„ 24.—
114. Ikosaeder mit Dodekaeder	<i>M.</i> 24.—
115. Regelm. räuml. Sechsstahl	„ 12.—
116. Regelm. räuml. Fünfzehnstrahl	„ 20.—

IV. Reihe. 6 Drahtmodelle der Flächen 2. O. in Hauptschnitten. *M.* 90.—

Daraus einzeln:	
401. Kugel (vgl. 407, VII. Reihe)	<i>M.</i> 10.—
402. Ellipsoid	„ 10.—
403. Zweischaliges Hyperboloid	„ 20.—
404. Einschaliges Hyperboloid	„ 20.—
405. Elliptisches Paraboloid	„ 8.—
406. Hyperbolisches Paraboloid	„ 28.—

V. Reihe. 6 bewegliche Modelle der Regelflächen 2. O. *M.* 210.—

Daraus einzeln:	
a) Fadenmodelle:	
411. Bewegliches einschaliges Dreh-Hyperboloid	<i>M.</i> 35.—
412. Bewegliches hyperbolisches Paraboloid	„ 45.—
b) Stabmodelle:	
421. Bewegl. einschal. Hyperboloid	<i>M.</i> 35.—
422. Dasselbe halb zum Umstülpen	„ 25.—
423. Bew. einschal. Dreh-Hyperbol.	„ 35.—
424. Bewegl. hyperbol. Paraboloid	„ 35.—

VI. Reihe. 6 bewegliche Drahtmodelle der Fl. 2. O. in Kreisschnitten *M.* 255.—

Daraus einzeln:	
425. Bewegl. Ellipsoid	<i>M.</i> 42.—
426. Bewegl. ellipt. Paraboloid	„ 42.—
427. Bewegl. einschal. Hyperboloid	„ 42.—
428. Bewegl. zweischal. Hyperboloid	„ 42.—
429. Bewegl. Kegel (doppelt)	<i>M.</i> 48.—
430. Bewegl. ellipt. Zylinder	„ 40.—
Nr. 427, 428, 429, gemeinsam bewegl.	„ 125.—
429 a. Bewegl. Kegel (einfach)	„ 24.—

VII. Reihe. 6 Drahtmodelle von Dreh- und Schraubflächen. *M.* 525.— Mit Einschluß von 512 a. *M.* 535.—

Daraus einzeln:	
407. Kugel mit Parallelkreisen	<i>M.</i> 18.—
501. Kreisring	„ 50.—
503. Urne	„ 65.—
512. Wendelfläche	„ 100.—
512 a. Ausschnitt der vorigen	„ 10.—
514. S. hiefie geschlossene Regelschraubfläche	<i>M.</i> 175.—
515. Schrauben-Röhrenfläche	„ 120.—
Galgen für die beiden letzten Modelle	„ 1.50

VIII. Reihe. 16 Fadenmodelle d. Singularitäten v. Raumkurven. *M.* 660.—

Daraus je vier Modelle:		Einzeln:									
Nr. 321, 322, 323, 324	zus. <i>M.</i> 155.—	Nr.	321	322	323	324	325	326	327	328	je <i>M.</i> 40.—
Nr. 325, 326, 327, 328	„ „ 155.—										
Nr. 329, 330, 331, 332	„ „ 175.—	Nr.	329	330	331	332	333	334	335	336	je <i>M.</i> 45.—
Nr. 333, 334, 335, 336	„ „ 175.—										

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig ist erschienen:

- Bobek, K.**, Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Nach den Vorträgen des Herrn C. Küpper bearb. Mit 96 Textfig. 2., wohlf. Ausg. VI, 210 S. gr. 8. 1897. geh. n. *M.* 2.—
- Brückner, M.**, Vielecke und Vielfache; Theorie und Geschichte. Mit zahlr. Textfig. und 7 lithogr. Taf. und 5 Lichtdrucktaf. VIII, 227 S. 4. 1900. geb. n. *M.* 16.—
- Burmester, L.**, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen, m. bes. Rücksicht a. d. Bedürfnisse techn. Hochschulen. XVI, 386 S. gr. 8. Mit Atlas v. 14 lithogr. Taf. [qu. Fol. in Mappe]. 2. Ausg. 1875. geb. n. *M.* 8.—
- Dingeldey, Fr.**, topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde. Mit 37 Textfig. und 5 lithogr. Taf. VIII, 54 S. gr. 8. 1890. geh. n. *M.* 2.40.
- Eberhard, V.**, zur Morphologie der Polyeder. Mit viel. Textfig. IV, 245 S. u. 2 Taf. gr. 8. 1891. geh. n. *M.* 8.—
- Enriques, F.**, Vorlesungen über projektive Geometrie. Autor. deutsche Ausg. von H. Fleischer. Mit Einführungswort von F. Klein und 187 Textfig. XIV, 374 S. gr. 8. 1903. geh. u. *M.* 8.—, in Leinw. n. *M.* 9.—
- Fiedler, W.**, die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3 Teile. gr. 8. geh. u. *M.* 38.40, geb. n. *M.* 42.20.
- Einzeln:
- I. Teil. A. u. d. T.: Die Methoden der darstellenden Geometrie und die Elemente der projektivischen Geometrie. 4. Aufl. XXVI, 431 S. m. zahlr. Textfig. u. auf 2 lithogr. Taf. 1904. geh. n. *M.* 10.—, in Leinw. n. *M.* 11.—
- II. — A. u. d. T.: Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 3. Aufl. XXXIII, 560 S. m. zahlr. Textfig. u. 16 lithogr. Taf. 1885. geh. n. *M.* 14.—, in Leinw. n. *M.* 15.40.
- III. — A. u. d. T.: Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 3. Aufl. XXX, 660 S. m. zahlr. Textfig. u. 1 lithogr. Taf. 1888. geh. n. *M.* 16.—, in Leinw. n. *M.* 17.40.
- Zyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme. Mit 16 lithogr. Taf. XVI, 264 S. gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 9.—
- Henrici und Treutlein, P.**, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. In 3 Teilen. Mit Holzschn. gr. 8. In Leinwand n. *M.* 9.—
- Einzeln:
- I. Teil. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbildung ohne Maßänderung. 3. Aufl. Mit 193 Textfig. VIII, 144 S. 1897. geb. n. *M.* 2.40.
- II. — Abbildung in verändertem Maße. Berechnung der Größen der ebenen Geometrie. 2. Aufl. Mit 188 Textfig. und 1 lithogr. Kärtchen. IX, 248 S. 1896. geb. n. *M.* 3.30.
- III. — Die Gebilde des körperlichen Raumes. Abbildung von einer Ebene auf eine zweite. (Kegelschnitte). 2. Aufl. Mit 130 Textfig. XII, 192 S. 1901. geb. n. *M.* 3.30.
- Heß, Edm.**, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und der gleich-eckigen Polyeder. Mit 16 lithogr. Taf. X, 476 S. gr. 8. 1883. geh. n. *M.* 14.—
- Holz Müller, Gust.**, Einführung in das stereometrische Zeichnen. Mit Berücksichtigung der Kristallographie und Kartographie. Mit 16 lithogr. Taf. VI, 102 S. 1886. gr. 8. kart. n. *M.* 4.40.
- Müller, C. H., u. Presler, O.**, Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie.
- Ausgabe A. Vorzugsweise f. Realgymnasien u. Oberrealschulen. Mit 233 Textfig., VIII, 320 S. gr. 8. 1901. geb. n. *M.* 4.—
- Ausgabe B. Für Gymnasien u. sechsstufige Realanstalten. Mit 122 Textfig., VI, 138 S. gr. 8. 1903. geb. n. *M.* 2.—
- Schell, W.**, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik mit besonderer Rücksicht auf das Bedürfnis technischer Hochschulen. Mit vielen Holzschn. 2., umgearb. Aufl. 2 Bde. gr. 8. geh. n. *M.* 20.—, in Halbfr. n. *M.* 24.—
- I. Band. 1. Geometrie der Streckensysteme und Geometrie der Massen. 2. Geometrie der Bewegung und Theorie der Bewegungszustände (Kinematik). XVI, 580 S. 1879. geh. n. *M.* 10.—, in Halbfr. n. *M.* 12.—
- II. — 3. Theorie der Kräfte und ihrer Äquivalenz (Dynamik im weiteren Sinne, einschl. Statik). 4. Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne). XII, 613 S. 1880. geh. n. *M.* 10.—, in Halbfr. n. *M.* 12.—

Im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig ist erschienen:

Schoenflies, A., Kristallsysteme und Kristallstruktur. Mit 73 Textfig. XII, 639 S. gr. 8. 1891. geh. n. *M.* 12.—

———— Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Mit Textfig. VI, 195 S. gr. 8. 1886. geh. n. *M.* 4.—

Schroeter, H., Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach Jacob Steiners Prinzipien auf synthetischem Wege abgeleitet. Mit viel. Textfig. XVI, 720 S. gr. 8. 1880. geh. n. *M.* 16.—

———— die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. Auf synthetisch-geometrischem Wege abgeleitet. VIII, 296 S. gr. 8. 1888. geh. n. *M.* 8.—

———— Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies. VI, 101 S. gr. 8. 1890. geh. n. *M.* 2.80.

Sohncke, L., Entwicklung einer Theorie der Kristallstruktur. Mit 55 Holzschn. im Text u. 5 lithogr. Taf. VIII, 248 S. gr. 8. 1879. geh. n. *M.* 8.—

Steiner, J., Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. n. *M.* 20.—, in Leinw. n. *M.* 22.—

Einzel:

I. Teil. Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Bearb. von C. F. Geiser, 3. Aufl. Mit 141 Holzschn. im Text. VIII, 208 S. 1887. geh. n. *M.* 6.—, in Leinwand geb. n. *M.* 7.—

II. — Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Bearb. von H. Schroeter. 3. Aufl. Durchges. von R. Sturm. Mit 103 Textfig. XVII, 537 S. 1898. geh. n. *M.* 14.—, in Leinw. n. *M.* 15.—

Sturm, R., die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Teilen. gr. 8. geh. n. *M.* 42.—

Einzel:

I. Teil. Der lineare Komplex oder das Strahlengewinde und der tetraedrale Komplex. XIV, 386 S. 1892. n. *M.* 12.—

II. — Die Strahlenkongruenzen erster und zweiter Ordnung. XIV, 367 S. 1893. n. *M.* 12.—

III. — Die Strahlenkomplexe zweiten Grades. XXIV, 518 S. 1897. n. *M.* 18.—

———— synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, XX, 388 S. gr. 8. 1867. geh. n. *M.* 8.—

Sturm, R., Elemente der darstellenden Geometrie. 2., umgearb. u. erw. Aufl. Mit 61 Textfig. u. 7 lithogr. Taf. V, 157 S. gr. 8. 1900. In Leinw. n. *M.* 5.60.

———— die kubische Raumkurve. gr. 8. TS. In Leinw. (In Vorbereitung.)

Weiler, A., neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie. Mit 109 Textfig., 2., wohlf. Ausg. VIII, 210 S. gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 2.80.

Wiener, Chr., über Vielecke und Vielfache. Mit 3 lithogr. Taf. VIII, 31 S. gr. 4. 1864. geh. n. *M.* 2.40.

———— stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Graden. Mit erläuterndem Text. 2 fotogr. Blätter u. 8 S. Text. pu. 8. 1869. In Kuvert. n. *M.* 2.40.

———— Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In 2 Bdn. gr. 8.

Einzel:

I. Band 2. Auflage, bearbeitet von H. Wiener, in zwei Teilen: Erster Teil: Die Lehre vom Projizieren; Projektion ebener Gebilde auf eine Tafel, und zwar I. Parallelprojektion. II. Zentralprojektion. Darin enthalten: Ebene Schnitte von Prismen, Pyramiden, Zylindern, Kugeln und Kegeln; die Darstellung dieser Gebilde in schiefer Projektion, in Grund- und Aufriß und in Perspektive. Schattenkonstruktionen. Abwickelungen. Anwendung auf Bauteile u. a. Die Lehre von den Kegelschnitten, begründet auf ihre Spiegeleigenschaften. Mit Textfiguren. (In Vorbereitung.)

II. Band. Krumme Linien (II. Teil) und krumme Flächen. Beleuchtungslehre, Perspektive. Mit Textfig. XXX, 646 S. 1887. n. *M.* 18.—

